This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE

Rue de Louvain, 112

1908

BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908

BRUXELLES
HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112

1908

HARVARD COLLEGE
FEB 14 1912
LIBRARY.
Minot fund
(1908-10)

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — N° 1.

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 11 janvier 1908.

M. C. le Paige, directeur pour 1907, occupe le fauteuil.

M. le chevalier Edm. Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. J. Fraipont, *directeur* pour 1908; Éd. Van Beneden, C. Malaise, Ch. Van Bambeke, Alfr. Gilkinet, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, M. Mourlon, P. Mansion, P. De Heen, Léon Fredericq, Neuberg, A. Lancaster, A. Jorissen, Ch. Francotte, Paul Pelseneer, A. Gravis, *membres;* Ch.-J. de la Vallée Poussin, Th. Durand, Max. Lohest, A. Demoulin, A. Rutot, V. Willem et Alex. de Hemptinne, *correspondants.*

M. le comte Goblet d'Alviella, membre de la Classe des lettres et des sciences morales et politiques, assiste à la séance.

MM. Henry, Mansion, Terby, Lagrange, Deruyts font connaître les motifs de leur absence.

En ouvrant la séance, M. le Paige adresse les félicitations de la Classe à M. Lohest au sujet du prix décennal des sciences minéralogiques qui vient de lui être décerné par arrêté royal du 23 décembre 1907. — Des applaudissements accueillent cette motion ainsi que la réponse de M. Lohest.

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts envoie une ampliation de l'arrêté royal en date du 12 décembre qui nomme président de l'Académie pour 1908, M. Edg. Tinel, directeur de la Classe des beaux-arts pendant ladite année.

— La Classe prend notification de la mort de deux des associés de la Section des sciences mathématiques et physiques.

Lord Kelvin (sir William Thomson), qui s'est illustré par ses travaux de physique et qui a longtemps professé à l'Université de Glasgow, né à Belfast en 1821, décédé à Ayrshire (Écosse), le 17 décembre.

Lord Kelvin, élu le 16 décembre 1878, était le doyen de la Section. Il a été inhumé à Westminster.

Pierre-Jules-César Janssen, directeur de l'Observatoire

de Meudon, qui s'est rendu célèbre par ses travaux sur le soleil et ses observations au Mont Blanc, est décédé à Meudon le 23 décembre. M. Jules Janssen appartenait à l'Académie depuis le 15 décembre 1896.

M. le Secrétaire perpétuel fait savoir qu'il s'est empressé d'exprimer les condoléances de la Classe à Mme veuve Janssen, ainsi qu'à l'Université de Glasgow, au sujet de la mort de son vénéré doyen Lord Kelvin.

— MM. Giovanni Bordiga et Umberto Perazzo, Coiseau et Cousin, Puech, Zunz, Falloise et Erculisse remercient pour les récompenses qui leur ont été décernées dans la séance publique du 17 décembre.

— M. le Dr C.-D. af Wirsen envoie, au nom de l'Institut Nobel, l'opuscule : *Les Prix Nobel décernés en 1905*. — Remerciements.

— Hommages d'ouvrages :

1° *Discours a la séance publique de l'Académie des sciences de Paris, le 2 décembre 1907 (éloges de Moissan et de Berthelot)*; par A. Chauveau, associé de l'Académie royale de Belgique (présenté par M. L. Henry);

2° *Cinq études de géométrie analytique*; ouvrage couronné par l'Académie royale en 1908 (prix François Deruyts); par M. Stuyvaert;

3° *Sur l'excitabilité des différents muscles. — Enquête scientifique sur les végétariens de Bruxelles*; par Mlle J. Ioteyko.

— Remerciements.

PRIX ÉDOUARD MAILLY

POUR FAVORISER LES PROGRÈS DE L'ASTRONOMIE EN BELGIQUE.

(IVe période : 1904-1907.)

La Classe prend notification d'une réédition entièrement refondue et complétée du travail de M. Boutquin qui avait été présenté au dernier concours (1904) et qui porte pour titre : *Le Monde physique. — Les Astres.* Commissaires : MM. F. Terby, Ch. Lagrange et C. le Paige.

PRIX NOBEL

Année 1903.

1° Académie royale des sciences de Suède. Physique : prix à Philippe Senard pour ses travaux sur les rayons cathodiques. — Chimie : prix à Adolphe von Baeyer en reconnaissance du mérite dont il a fait preuve dans le développement de la chimie organique et de la chimie industrielle par ses travaux sur les matières colorantes et les combinaisons hydro-aromatiques ;

2° Institut royal Carolus de médecine et de chirurgie. Prix pour la physiologie et la médecine à Robert Koch, pour ses recherches et ses découvertes concernant la tuberculose;

3° Académie suédoise. Littérature : Prix à Henryk Sienkiewicz en considération de ses grands mérites comme auteur épique ;

4° Prix Nobel de la Paix, décerné par le Comité Nobel du Parlement norwégien à Bertha von Suttner.

RAPPORTS.

Sur les réactions du chlorure mercurique avec les acides organiques; par MM. Oechsner de Coninck et Dautry.

Rapport de M. W. Spring.

« Les auteurs ont constaté que la réduction du *chlorure mercurique* par l'*acide oxalique*, sous l'influence de la lumière, a lieu d'une manière bien différente de celle que produit l'acide malonique, dans les mêmes conditions; ils signalent le fait comme pouvant servir à distinguer ces deux acides.

» J'ai l'honneur de proposer l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

Note sur le sélénium; par MM. Oechsner de Coninck et Raynaud.

Rapport de M. W. Spring.

« Les auteurs font connaître que les variétés du sélénium découvertes récemment par l'un d'eux s'agglomèrent lentement sous l'action de la lumière solaire et passent, respectivement, à une masse cristalline, d'aspect métallique, et à une masse feuilletée amorphe, de couleur ardoisée.

» J'ai l'honneur de proposer aussi l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Sur la volatilité comparée de certains groupes de composés mixtes; par Louis Henry, membre de l'Académie.

DEUXIÈME PARTIE (*).

Des composés méthyléniques mixtes.

Je m'occuperai dans cette note des dérivés *méthyléniques* que je répartis en deux groupes :

a) les dérivés *méthyléniques* proprement dits $H_2C - XX'$

b) et les dérivés *éthylidéniques* $H_3C - CH - XX'$, qui en sont les dérivés *mono-méthylés*. Ils représentent dans leur expression rudimentaire l'ensemble des dérivés mixtes d'ordre *aldéhydique* $C_nH_m - CH.XX'$.

Premier groupe.

Des composés méthyléniques proprement dits $H_2C.XX'$.

Ces composés offrent un intérêt particulier dans l'ensemble des *composés biatomiques mixtes* parce qu'ils en sont les plus simples; aucune influence de radical ou groupement carboné, immédiatement soudé à l'atome

---

(*) Voir la première partie : *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences) pour 1907, pp. 842-855.

de carbone qu'ils renferment, ne s'y fait sentir et n'est à considérer. Il est à regretter, au point de vue dont je m'occupe, que la série de ces dérivés, quoique assez richement fournie déjà, présente, en certains de ses points, des lacunes graves, impossibles ou tout au moins fort difficiles à combler. Manquent en effet tous les dérivés $(HO)CH_2$ -, où à côté de l'*hydroxyle* (HO -) existeraient les radicaux Cl et ses congénères, NH_2 et ses dérivés monoalkylés $NH(C_nH_{2n+1})$, - OH ainsi que les dérivés monoalkylés $(C_nH_{2n+1})O$ - de celui-ci; dès la température ordinaire ou sous l'action d'une légère caléfaction, des corps de cette sorte reviennent au méthanal lui-même $H_2C = O$. Sous ce rapport, mon exposé doit rester nécessairement incomplet vis-à-vis de celui des composés éthyléniques $XCH_2 - CH_2X'$, de l'étage C_2, où cette instabilité et cette incompatibilité fonctionnelles, résultat d'un voisinage immédiat, n'existent pas.

1. La série des composés *mixtes* halogénés $H_2C.XX'$ est complète, sauf bien entendu ceux du fluor.

Série simple $H_2C . X_2$.

$H_2C - Cl_2$	Éb.	42°
$H_2C - Br_2$	—	98°
$H_2C - I_2$	—	180°

Série mixte $H_2C . XX'$.

			Moyenne.
$H_2C - ClBr$	Éb.	68°-69°	70°
$H_2C - ClI$	—	109°	110°
$H_2C - BrI$	—	138°-140°	139°

De même qu'à l'étage C_2, les points d'ébullition des mixtes sont situés, sensiblement, à la moyenne arithmétique des points d'ébullition des simples correspondants.

C'est la conséquence de l'équivalence fonctionnelle parfaite des corps halogènes, d'où résulte, fort approximativement, le même degré d'« association moléculaire à l'état liquide » des divers composés de cette nature, quel que soit le corps halogène qu'ils renferment.

Il en est de même, sensiblement, entre les groupements oxy-alkylés $H_3C.O$ -, H_5C_2 - O, etc.

			Moyenne.
$H_2C.(OCH_3)_2$	Éb.	42°	65°
$H_2C.(OC_2H_5)_2$	—	88°	

Le point d'ébullition du *méthylal* méthylo-éthylique, $H_2C < \begin{matrix} OCH_3 \\ OC_2H_5 \end{matrix}$, 67° sous la pression ordinaire, est fort sensiblement à la moyenne précise de ceux des deux méthylals simples correspondants (*).

2. Dans certaines séries de composés mixtes, le point d'ébullition est situé au delà de celui qui serait la moyenne arithmétique des points d'ébullition des composés simples correspondants :

a) Il en est ainsi dans les dérivés de substitution, méthyléniques, des éthers simples de l'alcool méthylique.

(*) Ce corps, qui n'est pas décrit, a été préparé, il y a une quinzaine d'années, dans mon laboratoire, par mon assistant de ce temps-là, M. De Sonay, aujourd'hui décédé. Il résulte de la réaction de $CH_2 < \begin{matrix} Cl \\ OCH_3 \end{matrix}$ sur l'éthylate sodique. Densité de vapeur calculée 3.10; trouvée 3.09.

Dérivés méthyliques.

				Moyenne.
$H_2C - Cl_2$	Éb.	42°		42°
$H_2C - (OCH_3)_2$	—	42°		
$H_2C < {Cl \atop OCH_3}$	Éb.	59°	Diff. +17°	
$H_2C - Br_2$	Éb.	98°		70°
$H_2C - (OCH_3)_2$	—	42°		
$H_2C < {Br \atop OCH_3}$	Éb.	87°	Diff. 17°	
$H_2C - I_2$	Éb.	170°		106°
$H_2C - (OCH_3)_2$	—	42°		
$H_2C < {I \atop OCH_3}$	Éb.	116°	Diff. 10°	

Dérivés éthyliques.

$H_2C - Cl_2$	Éb.	42°		65°
$H_2C - (OC_2H_5)_2$	—	88°		
$H_2C < {Cl \atop OC_2H_5}$	Éb.	80°	Diff. 15°	
$H_2C - Br_2$	Éb.	98°		93°
$H_2C - (OC_2H_5)$	—	88°		
$H_2C < {Br \atop OC_2H_5}$	Éb.	107°-108°	Diff. 15°	

Dérivés propyliques primaires.

$H_2C - Cl_2$	Éb.	42°	90°
$H_2C - (O . C_3H_7)_2$	—	137°	
$H_2C < {Cl \atop O . C_3H_7}$	Éb.	10°	Diff. 10°

On remarquera que les différences entre les points d'ébullition réels et les points d'ébullition moyens, théoriques, vont en diminuant à mesure que le poids moléculaire du mixte augmente, du chef du corps halogène ou du chef du groupement oxy-alkylé $O - C_nH_{2n+1}$.

b) Il en est de même en ce qui concerne les dérivés *méthyléniques*, chlorés ou oxy-méthylés, de l'*acétate de méthyle* $HCH_2 - (OCO . CH_3)$.

$H_2C - Cl_2$	Éb.	42°	106°
$H_2C - (OCO . CH_3)_2$	—	170°	
$H_2C < {Cl \atop O . COCH_3)}$	Éb. 115°-116°		Diff. 9° à 10°

$H_2C - (OCH_3)_2$	Éb.	42°	106°
$H_2C - (OCO . CH_3)_2$	—	170°	
$H_2C < {OCH_3 \atop O . CO . CH_3}$	Éb. 117°-118°		Diff. 12°

Comme je l'ai déjà fait remarquer à l'occasion des dérivés *éthyléniques* correspondants $XCH_2 - CH_2X'$, la surélévation du point d'ébullition réel par rapport au

point d'ébullition moyen théorique, est due à cette circonstance que les dérivés simplement halogénés, à l'instar des hydrocarbures, ne sont pas ou très faiblement « moléculairement associés » à l'état liquide.

J'ai signalé plus haut ce qu'il en est du *méthylal mixte* méthylo-éthylique $H_2C < \begin{matrix} OCH_3 \\ OC_2H_5 \end{matrix}$. Il est intéressant de mettre en regard de ce composé aliphatique, le *méthylal méthylo-phénylique* $H_2C < \begin{matrix} OCH_3 \\ OC_6H_5 \end{matrix}$.

Les deux simples correspondants étant

$H_2C-(OCH_3)_2$	Éb.	42°
$H_2C-(OC_6H_5)_2$	—	298°

le mixte $H_2C < \begin{matrix} OCH_3 \\ OC_6H_5 \end{matrix}$ bout à 189°-190°, par conséquent 20° environ au delà de la moyenne, 170°, des points d'ébullition des deux méthylals simples. Ce fait montre parfaitement la différence considérable qu'il y a entre les groupements *oxy-alkylés* H_3C-O, H_3C-CH_2-O du groupe aliphatique et le groupement oxy-phénylé H_5C_6-O; l'équivalence fonctionnelle n'existe pas entre ces complexes.

Il serait intéressant d'examiner, au point de vue de leur volatilité relative, des méthylals mixtes correspondant à des alcools aliphatiques isomères, mais de nature diverse, primaires, secondaires et tertiaires, tels que notamment

$$\left\langle \begin{matrix} O.CH_2-CH_2-CH_3 \\ O.CH < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} \end{matrix} \right.$$

$$H_2C \left\langle \begin{array}{l} O - CH_2 - OH_2 - CH_2 - CH_3 \\ O . CH < \begin{array}{l} CH_2 - CH_3 \\ CH_3 \end{array} \end{array} \right.$$

$$H_2C \left\langle \begin{array}{l} OCH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_3 \\ O . C - (CH_3)_3 \end{array} \right.$$

$$H_2C \left\langle \begin{array}{l} O . CH < \begin{array}{l} CH_2 - CH_3 \\ CH_3 \end{array} \\ O . C - (CH_3)_3 \end{array} \right.$$

et finalement

$$H_2C \left\langle \begin{array}{l} O . CH_2 - CH(CH_3)_2 \\ O - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_3 \end{array} \right.$$

malheureusement ces composés n'ont pas encore été appelés à l'existence. Je me propose de confier cette étude à l'un de mes élèves. Je présume que l'écart positif entre le point d'ébullition réel du *mixte* et la moyenne des points d'ébullition des simples correspondants sera d'autant plus grand que la différence entre les groupements $O . C_nH_{2n+1}$ et $O . C_{n'}H_{2n'+1}$ sera elle-même plus considérable, soit quant au poids, soit quant à la structure.

J'ai fait connaître, en 1883, au cours de mon travail sur le *bibromure de méthylène* (*), le *méthylal bioxy-phénylique* $H_2C - (OC_6H_5)_2$ et je l'ai décrit comme un liquide incolore bouillant fixe et sans décomposition à 293°-295° sous la pression de 758 millimètres (non corrigé).

(*) *Annales de chimie et de physique* (5e série), t. XXX, p. 269.

Je l'avais obtenu par la réaction du bromure de méthylène $H_2C.Br$ sur le phénol potassé $H_5C_6.OK$ dans l'alcool. J'ai constaté depuis que ce même composé se fait aisément, non seulement à l'aide des composés haloïdes méthyléniques simples indistinctement, H_2CCl_2, $H_2C\,Br_2.H_2C.I_2$, mais aussi à l'aide des *mixtes* $H_2C.ClBr.H_2C.ClI$ et H_2C - BrI. Vu la différence d'aptitude réactionnelle de Cl, Br, I (*) vis-à-vis des réactifs positifs, j'espérais obtenir des dérivés méthyléniques oxy-phényliques répondant aux formules $H_2C < \begin{matrix} Cl \\ OC_6H_5 \end{matrix}$, $H_2H < \begin{matrix} Br \\ OC_6H_5 \end{matrix}$ et $H_2C < \begin{matrix} I \\ OC_6H_5 \end{matrix}$.

En aucune circonstance, ce but n'a été atteint, et il me paraît impossible à réaliser. La réaction s'établit évidemment à l'origine dans le corps halogène dont le poids atomique est le plus élevé, mais l'existence du groupement oxy-phényle $O.C_6H_5$ à côté du corps halogène restant, détermine dans celui-ci une recrudescence d'aptitude réactionnelle notable; ainsi Cl dans $H_2C < \begin{matrix} Cl \\ OC_6H_5 \end{matrix}$ l'emporte en énergie sur I de H_2C - ClI.

J'ajouterai encore que le *méthylal bi-oxy phénylique* H_2C - (OC_6H_5) se congèle par le froid en une masse cristalline, fusible à + 8°.

En 1887, ce corps fut refait par le Dr M. Arnhold en faisant réagir le chlorure de méthylène sur le phénol sodé. Arnhold lui assigne 298°,8 comme point d'ébullition *corrigé* (**).

(*) Voir *Comptes rendus*, etc.

(**) Voir *Liebig's Annalen der Chemie*, t. CCXL, p. 201. (Zur Kenntniss der dreibasischen Ameisensäure-Aethers und verschiedene Methylals.)

Je dois croire que ce chimiste allemand n'a pas eu connaissance de mon mémoire de 1883, des *Annales de chimie et de physique,* car il a refait le *bibromure de méthylène* sans plus citer mon nom qu'à l'occasion du *méthylal bi-phénylique* $H_2C(OC_6H_5)_2$. Cependant, il avait corrigé le point d'ébullition (82°-83°) que j'avais assigné au *méthylal di-éthylique* $H_2C-(OC_2H_5)_2$ pour le porter à 87° (corrigé). Pour compléter ces observations rétrospectives, j'ajouterai que la deuxième édition de *Beilstein* (*) mentionne déjà le *bi-bromure de méthylène* $H_2C.Br_2$ avec le point d'ébullition 98°, que je lui avais assigné en 1883, au lieu de 80°-82° (Steiner).

Quant au *méthylal* mixte $H_2C < \begin{matrix} OCH_3 \\ OC_6H_5 \end{matrix}$, il vient encore d'être décrit par M. A. Reychler (**), qui en a précisé le point d'ébullition 189°-190°.

Ce corps a une histoire. Il se trouve vraisemblablement dans les produits huileux, peu abondants d'ailleurs, de la torréfaction du café (***). Il y a peu de temps, MM. J. Breslauer et Amé Pictet (IV) l'ont fait connaître comme bouillant à 197°-200°, l'ayant obtenu par la réaction du phénol sur la solution aqueuse du méthanal et par celle de l'oxyde de méthyle monochloré $ClCH_2(OCH_3)$ sur le phénate potassique $C_6H_5.OH$.

(*) Tome Ier, p. 188, année 1886.

(**) *Bulletin de la Société chimique de France,* t. Ier (4e sér.), p. 1196 (20 décembre 1907).

(***) Voir Oscar Bernheimer, *Monatshefte für Chemie,* t. I, p. 456, année 1880.

(IV) *Berichte,* t. XL, p. 3787 (août 1907).

Deuxième groupe.

Des composés éthylidéniques $H_3C - CH . XX'$.

Au point de vue de la volatilité relative des *mixtes*, les composés *méthylo-méthyléniques* ou *éthylidéniques* $H_3C - CH.XX'$ se placent à côté des dérivés *méthyléniques* proprement dits.

1° *Dérivés haloïdes.*

			Moyenne.
$H_3C - CHCl_2$	Éb.	59°-60°	85°
$H_3C - CHBr_2$	—	109°-110°	
$H_3C - CH < {Cl \atop Br}$	Éb.	84°-85°	
$H_3C - CH - Cl_2$	Éb.	59°-60°	119°
$H_3C - CH - I_2$	—	178°-179°	
$H_3C - CH < {Cl \atop I}$	Éb.	117°-119°	
$H_3C - CH . Br_2$	Éb.	109°-110°	144°
$H_3C - CH - I_2$	—	177°-179°	
$H_3C - CH < {Br \atop I}$	Éb.	142°-143°	
$H_3C - CH(O . CH_3)_2$	Éb.	64°	84°
$H_3C - CH(O . C_2H_5)$	—	104°	
$H_3C - CH < {OCH_3 \atop OC_2H_5}$	Éb.	85°	

$H_3C-CHCl_2$	Éb.	59°-60°	123°
$H_3C-CH(NO)_2$	—	186°	
$H_3C-CH<^{Cl}_{NO_2}$	Éb.	124°-125°	

Les points d'ébullition des *mixtes* sont situés sensiblement à la moyenne des points d'ébullition des simples correspondants.

2° *Dérivés oxy-alkylés.*

$H_3C-CH.Cl_2$	Éb.	59°-60°	62°
$H_3C-CH(OCH_3)_2$	—	64°	
$H_3C-CH<^{Cl}_{OCH_3}$	Éb.	72°-75°	Diff. 10° à 13°
$H_3C-CH-Cl_2$	Éb.	59°-60°	82°
$H_3C-CH(OC_2H_5)_2$	—	104°	
$H_3C-CH<^{Cl}_{OC_2H_5}$	Éb.	97°-98°	Diff. 15°-16°
$H_3C-CH-Cl_2$	Éb.	59°-60°	114°
$H_3C-CH.(O.CO.CH_3)_2$		168°	
$H_3C-CH<^{Cl}_{O.CO.CH_3}$	Éb.	121°	Diff. 7°

Les points d'ébullition des *mixtes* sont situés *plus haut*

que la moyenne des points d'ébullition des simples correspondants.

Les éthers *éthylidéniques* mixtes des acides gras méritent une mention particulière; leur point d'ébullition est sensiblement à la moyenne arithmétique des points d'ébullition des deux *simples* correspondants.

$CH_3 - CH . (O . CO . CH_3)_2$ Éb. 168° ⟩ 180°

$CH_3 - CH (O . CO . CH_2 - CH_3)_2$ — 192° ⟩

$CH_3 - CH < \begin{matrix} O . CO . CH_3 \\ O . CO . CH_2 - CH_3 \end{matrix}$ Éb. 179°

Il en doit être ainsi, vu l'équivalence fonctionnelle des résidus halogéniques $-O-CO-CH_3$ et $-O-CO-CH_2-CH_3$.

Il n'en est pas de même, comme on l'a vu plus haut, pour les dérivés mixtes chlorhydriques $-CH < \begin{matrix} Cl \\ O-CO-CH_3 \end{matrix}$, etc.;

On voit ainsi combien H-Cl diffère, fonctionnellement, d'un acide gras tel que $H-O-CO-CH_3$.

Les dérivés *méthyléniques* $H_2C - XX'$ font penser aux dérivés *carboniques* $OC - XX'$. Je crois préférable de m'occuper de ceux-ci dans une communication spéciale, en même temps que des dérivés *oxaliques* $XX'CO-COXX'$ et des dérivés des acides homologues correspondants.

—

Antiquités protohistoriques de Court-Saint-Étienne; par le comte Goblet d'Alviella, membre de l'Académie.

Il y a dix ans, j'ai eu l'honneur de faire une communication à la Classe des sciences sur les silex néolithiques et paléolithiques que j'avais recueillis à Court-Saint-Étienne (1). La plupart de ces objets provenaient de la sapinière dite la Quenique, rendue célèbre, quelques années auparavant, par la découverte d'une nécropole à incinération, qui y avait succédé à l'occupation néolithique. J'ai fait observer à cette occasion que Court-Saint-Étienne, et spécialement la partie de son territoire comprise entre les vallées de la Dyle, de la Thyle et de l'Orne, apporte un nouvel argument à la thèse suivant laquelle, depuis les temps les plus reculés, nos prédécesseurs se sont concentrés sur les mêmes points du pays, soit à raison de certains avantages offerts par la configuration du sol, soit en vertu d'une attraction exercée sur chaque groupe successif d'envahisseurs par les anciens centres de population.

Je voudrais aujourd'hui poursuivre cette étude archéologique, en exposant le résultat de fouilles récentes que j'ai entreprises dans une série de tertres où l'on peut voir comme un prolongement des tombelles de la Quenique.

---

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 3e sér., t. XXXIII, p. 268, 1897.

Champ de la Ferme rouge.
Le Quesnoy
Bettrement

I.

Nous sommes loin du temps où un archéologue allemand, dressant, en 1884, la liste des découvertes d'objets en métal antérieures à l'occupation romaine dans les régions voisines du Rhin, ne trouvait, sur plus de quatre mille emplacements, que sept localités à mentionner dans tout l'ouest de la Belgique (1). Dix ans ne s'étaient pas écoulés que M. Charles Comhaire, au cours de son utile et consciencieux mémoire sur les premiers âges du métal dans les bassins de la Meuse et de l'Escaut, pouvait y signaler, outre 116 trouvailles isolées, 121 cimetières à incinération, qui, presque tous, renfermaient des objets en métal (2).

Court Saint-Étienne figure, à côté de Gedinne et de Louette-Saint-Pierre (arrondissement de Dinant), parmi les plus riches nécropoles de cette catégorie sur le territoire de la haute et de la moyenne Belgique. Malheureusement, il semble que les archéologues eurent longtemps des yeux pour ne pas voir et des mains pour ne pas ramasser. La tradition locale parlait de la Quenique comme d'un ancien camp romain. C'était, sans doute, une déduction que l'imagination populaire tirait de la présence de nombreuses tombelles en cet endroit : le cirque formé sous la Quenique par la vallée de l'Orne a porté de temps immémorial le nom significatif de *Pré des*

---

(1) E. Freiherr von Tröltsch, *Fund-Statistik des vorrömischen Metallzeit in Reingebiete*. Stuttgart, 1884.

(2) Ch.-J. Comhaire, *Les premiers âges du métal*. Bruxelles, 1894, pp. 12-25.

Mottes. Il paraît que, vers la fin du XVIIIe siècle, une de ces tombelles livra des objets que, suivant une tradition de mon enfance, mon bisaïeul maternel fit déposer au château; mais je n'en ai jamais vu traces. Il est à espérer que les dernières trouvailles auront meilleur sort.

FIG. 1. — Échelle de $^1/_{40\,000}$.

Les dix hectares qui forment la sapinière de la Quenique occupent le rebord méridional d'un plateau rectangulaire, qui domine abruptement, vers le sud-est, le cirque de la vallée de l'Orne, et vers l'ouest, les vallées de la Dyle ainsi que de son affluent la Thyle; alors qu'au nord il s'incline en pente douce vers le ruisseau du Ry Angon, qui se jette dans la Dyle à Céroux-Mousty, en aval de Court (fig. 1). Un isthme de quelque cent mètres de large le réunit aux hauteurs qui se prolongent au sud vers la province de Namur. Ce plateau est formé, dans toute sa partie la plus élevée, par des sables bruxelliens, jaunâtres ou blanchâtres, qui recouvrent, à d'assez grandes

profondeurs, les schistes primaires du massif brabançon. Ces derniers affleurent sur le flanc des vallées, où ils laissent échapper plusieurs sources. Des points culminants, n'était l'obstacle des plantations modernes, la vue, plongeant à travers cinq tronçons de vallée, découvrirait un panorama circulaire d'une vingtaine de kilomètres. A l'époque où toute la partie sablonneuse de cette région était couverte de bruyères, la Quenique offrait un admirable emplacement pour l'établissement d'un camp retranché. Toutefois, aux premiers âges du métal, il ne semble pas qu'on en ait fait autre chose qu'un cimetière.

Il y a un peu plus d'un quart de siècle, on y voyait encore une trentaine de tombelles, dont quelques-unes avaient été fouillées en 1861, très superficiellement, pour le compte du Gouvernement, par un professeur de l'Université de Bruxelles qui habitait Villers-la-Ville, Jules Tarlier.

Il y trouva divers objets déposés actuellement au Musée du Cinquantenaire : une urne renfermant des ossements incinérés; une autre, plus petite, recueillie à l'intérieur de la précédente; deux tronçons d'épées en fer, dont l'un constitue la poignée d'une épée à cran et à rivets, à soie plate, avec filets sur les bords; une plaque d'ornement très curieuse en bronze (reproduite dans les *Annales de la Société archéologique de Nivelles*, t. II, 1882), formée de deux parties rectangulaires juxtaposées, l'une pleine, l'autre découpée en deux rangs de cinq perles; divers fragments de fibules, boucles et boutons en bronze; enfin, une tige de bronze sinueuse et tubulaire, en forme d'accent circonflexe, avec une œillère de chaque côté du centre (cf. notre fig. 2, *a*).

On a commencé par qualifier cet ustensile de porte-épée; puis on a voulu y voir un mors de cheval.

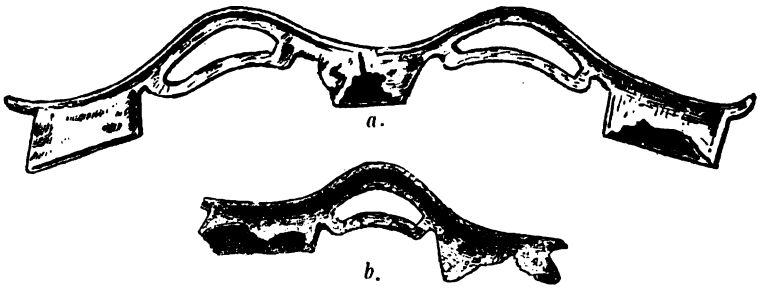


Fig. 2. — Objets en bronze.

Ce mobilier devait suffire pour établir à quel âge appartenait la sépulture; il n'en resta pas moins catalogué au Musée de la Porte de Hal, pendant plus de vingt ans, sous l'étiquette de gallo-romain. Et pourtant, dès 1864, Jules Tarlier lui-même, en parlant de ses fouilles, n'hésitait pas à formuler cette interrogation :

« Ces objets en bronze ne reportent-ils pas l'origine du cimetière de Court à l'époque gauloise ou belge, antérieurement à l'invasion de César (1)? »

La sapinière de la Quenique appartenait alors au bourgmestre de Court, Joachim Liboutton, et les magnifiques conifères presque octogénaires qui s'y épanouissaient, sans rivaux dans le Brabant, rendaient quasi impossibles les recherches méthodiques qu'il aurait fallu entreprendre.

---

(1) Tarlier et Wauters, *Histoire et géographie des communes belges*. Bruxelles. Fascicule du canton de Wavre (1864), p. 128.

Les fouilles de Tarlier étaient à peu près oubliées, lorsque, en juillet 1870, des scieurs de long, ayant entamé une tombelle pour y creuser une fosse, s'enfuirent épouvantés à la vue d'une grande urne renfermant des ossements humains; il y eut même, à ce propos, une descente de la gendarmerie, qui classa l'affaire.

Liboutton mourut en 1875, laissant la majeure partie de ses biens aux Hospices de Court, qui, aussitôt entrés en possession, décidèrent de vendre les sapins et de défoncer le terrain, en vue d'y établir une nouvelle plantation.

Pendant l'hiver de 1877 à 1878, la sapinière fut donc livrée à des ouvriers qui, en retournant le sable et en nivelant les tertres, exhumèrent d'innombrables vases remplis d'ossements et souvent accompagnés d'objets en métal. Les urnes furent aussitôt éventrées, « *pó vir c' qu' i n'arot d' dins* » ; les objets des dépôts funéraires, brisés, rejetés dans le défoncement ou dispersés.

Quelques objets, recueillis par un habitant de Court, Frédéric Gérard, avec l'aide de M. Ad. Mortier, aujourd'hui commis-chef des postes, à Bruxelles, prirent le chemin de diverses collections particulières.

Je tiens de cette origine deux petits vases; l'un, à large col, que recouvrait, paraît-il, une plaque de schiste (planche IV, n° 9); l'autre (id., n° 8), de dimensions plus réduites encore, muni, vers le milieu de la panse, d'un bec ou mamelon que perce un trou de la grosseur d'une tête d'épingle; serait-ce un biberon (1)? — Je possède

(1) M. Mortier m'a assuré que ce vase n'a pas été découvert sur le plateau proprement dit, mais un peu au nord, vers le débouché de la vallée du Ry Angon sur Franquegnies.

également de la même provenance les objets suivants en métal :

1° Plusieurs petits objets de bronze (voy. pl. II) :

a) Trois boucles ;

b) Une tige tubulaire recourbée ;

c) Un poinçon ;

d) Deux tiges recourbées pleines ;

e) et *f*) Deux plaques de boucliers (?), dont l'une encore munie de sa pointe ;

g) Une plaque ornementée avec filets ;

h) Une sorte de pendeloque ;

2° Une épée de fer à double tranchant, à soie plate, à crans et à rivets ; elle mesure, sans la pointe, qui manque, 55 $^1/_2$ centimètres de long sur une largeur moyenne de 6 $^1/_2$ centimètres. C'est bien le type caractéristique des épées de Hallstatt (voy. plus loin, planche VI, 1) ;

3° Les fragments de plusieurs glaives en bronze ; l'un d'eux, assez complet, à soie plate, avec filets sur les deux bords de la lame, possède encore les rivets de poignée (1) (voy. planche III).

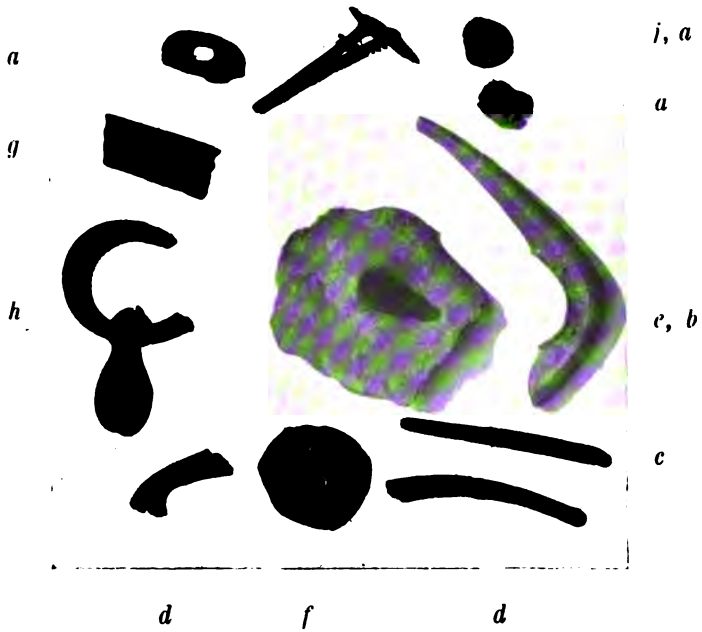
Enfin, en 1890, je trouvai, parmi des débris de poterie et d'ossements, à l'entrée d'un terrier de lapin qui débouchait sur l'emplacement d'une tombelle disparue, un peson de fuseau ou fusaïole de terre cuite, légèrement évidé à la base et percé de haut en bas (2) (voy. pl. V, *b*).

---

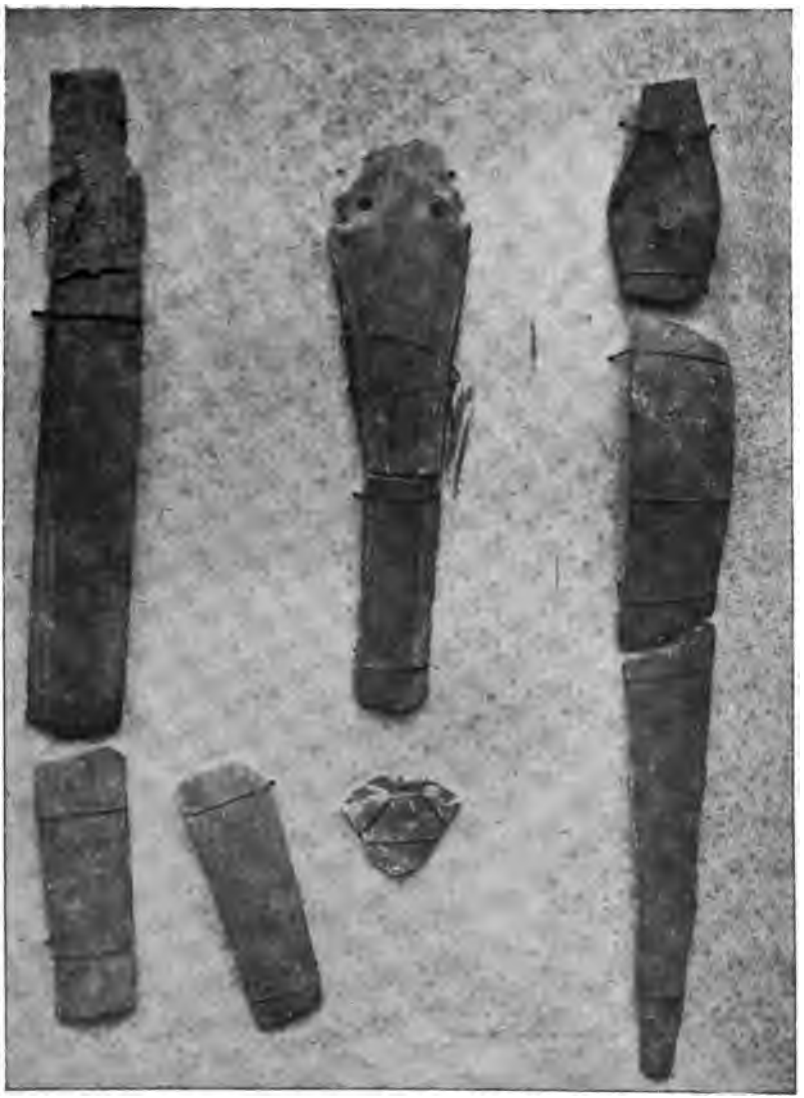
(1) Suivant M. Mortier, une de ces armes aurait été trouvée à la Quenique, en compagnie d'une urne, à l'intérieur d'un petit ciste formé par des plaques de schiste.

(2) *Annales de la Société d'archéologie de Bruxelles*, t. XIV (1900), p. 289.

Chapelle sur une tombelle à la Quenique.



Objets de bronze.



Armes de bronze (réd. au tiers).

Cet objet rappelle absolument les fusaïoles si abondamment recueillies par Schliemann à Hissarlik dans les débris de la première cité (1).

*
* *

Cependant, un archéologue nivellois, le digne et savant docteur N. Cloquet, de Feluy, ayant appris l'événement par un fait-divers publié dans un petit journal de Wavre, au cours de l'hiver de 1878, était accouru sur les lieux avec le président de la Société archéologique de Nivelles, le docteur Lebon, alors que les travaux de défoncement n'étaient pas encore complètement terminés. Ils ne purent recueillir qu'une urne et un poignard de fer avec rivets en bronze, au milieu des débris de poterie qui s'entassaient à la surface du nouveau sol, pêle-mêle avec les cendres et les esquilles des ossements brûlés. Cloquet n'en publia pas moins, l'année suivante, dans les *Annales* de la Société archéologique de l'arrondissement de Nivelles (t. II, pp. 32 et suiv.), un mémoire sur *les Tumulus du canton de Wavre et le cimetière celtique de Court-Saint-Étienne*, où, comparant les objets recueillis à Court avec les trouvailles opérées précédemment dans les cimetières analogues de Gedinne et de Louette-Saint-Pierre, il conclut qu'on se trouvait également devant une nécropole remontant au premier âge du fer — c'est-à-dire à l'époque où les armes et les ustensiles de bronze se mélangeaient encore à l'industrie du fer. — C'est à

(1) Perrot et Chipiez, *Histoire de l'Art dans l'antiquité*. Paris, 1894. t. VI. p. 906.

cette civilisation que Gabriel de Mortillet a donné le nom de Hallstattienne, parce que le type s'en est surtout rencontré parmi les tombelles de Hallstatt, aux environs de Salzbourg.

M. Louis Stroobant a publié récemment les observations suivantes à propos des nécropoles à incinération de la Campine : « La nécropole proprement dite, d'une étendue parfois considérable, est souvent enclose de levées de terre mesurant en moyenne 1 mètre de hauteur sur 2 ou 3 mètres de large. Il en subsiste des parties à Ryckevorsel, à Luiks-Gestel, à Grobbendonck, à Alphen. Le plus souvent, un chemin antique (*heirbaan*) longe la nécropole (Casterlé, Grobbendonck, Meir, Ryckevorsel). Toutes ces nécropoles, sans exception, sont exposées à l'est, c'est-à-dire qu'elles se trouvent sur la déclivité d'un terrain descendant en pente vers l'est. Les tombelles sont presque toujours alignées sur plusieurs rangées parallèles, du nord au sud. Au milieu des tombelles se rencontre souvent un tertre plus élevé (1). »

Ces particularités n'ont pas été, que je sache, relevées à la Quenique — sauf la troisième. Cependant elles y sont toutes nettement marquées : 1° Il existe sur le versant qui descend dans la vallée de l'Orne, à peu près à la cote 94, une levée de terre, avec fossé à l'intérieur, qui longe le plateau sur une longueur continue de 575 mètres et que j'ai longtemps tenue pour un ancien retranchement d'âge incertain ; 2° La déclivité générale du terrain est vers l'est-sud-est où coule l'Orne ; 3° La

(1) Louis Stroobant. *Quel est l'âge des tertres de la Campine?* dans les Annales du XXe Congrès de la Fédération archéologique et historique de Belgique. Gand, 1907.

nécropole est longée par un chemin qui parait avoir constitué la plus ancienne communication de la vallée avec le plateau, à en juger par la hauteur des berges. Cloquet le nomme « un chemin gaulois (1) »; 4° On voit par le plan ci-après (fig. 3) que sur les cinq tombelles dont je puis désigner l'emplacement, quatre étaient orientées nord-sud; 5° Un des tertres dépassait les autres en étendue et en hauteur.

Quand le docteur Cloquet vint à la Quenique, il n'y restait plus que deux tombelles; l'une, encore intacte aujourd'hui, est surmontée d'une chapelle rebâtie en 1880 (voy. planche II), en face d'un vieil orme qui, planté au carrefour de deux chemins, portait entre les branches, jusqu'en ces dernières années, une statuette de saint Hubert fort réputée dans le pays (2); l'autre, haute de 1 mètre environ, sur 15 à 16 mètres de diamètre, avait été partiellement respectée par le défonçage. j'ignore pour quelle raison.

L'archéologue nivellois demanda la permission d'y faire une fouille; mais le président du Conseil des hospices, qui venait d'être tancé par le Gouverneur du Brabant pour les actes de vandalisme archéologique qu'il avait laissés s'accomplir, refusa l'autorisation et, pendant plusieurs années, l'administration locale veilla sur ses

---

(1) Cloquet, *Cimetière celtique de Court-Saint-Étienne*, dans les Annales de la Société archéologique de Nivelles, t. II (1882), p. 32.

(2) Cloquet fait observer à ce propos qu'il est assez fréquent de rencontrer des tertres et des tumuli servant d'emplacement à des chapelles ou à des églises. — C'est la réflexion de Renan : L'homme a toujours prié dans les mêmes lieux.

deux dernières tombelles avec la vigilance légendaire du chien du jardinier.

Entretemps, j'acquis la propriété du terrain, où des sapins avaient été replantés et, en 1891, j'invitai la Fédération archéologique et historique, qui m'avait fait l'honneur de me confier la présidence de sa session de Bruxelles, à venir explorer la seule tombelle encore accessible de la Quenique.

La fouille fut opérée le 5 août 1891, sous la direction de M. le baron de Loë, secrétaire du Congrès (1). On y trouva, au niveau du sol vierge, sur un lit de charbon, quelques ossements, un rognon de silex ayant subi l'action du feu (2), un clou ou rivet en bronze long de 29 millimètres (cf. plus haut planche II, *j*), enfin un objet de bronze assez curieux que je crois être la partie d'un ustensile analogue à celui que Jules Tarlier avait découvert trente ans plus tôt dans les mêmes parages; ce nouvel exemplaire se compose également d'une tige sinueuse et tubulaire qui mesure en longueur à peu près 13 $^1/_2$ centimètres, alors que le précédente en mesurait 26 (fig. 2 *a* et *b*).

On a d'abord voulu voir, dans ces ustensiles énigmatiques, un porte-épée! Aujourd'hui, on les représente comme un mors. Il serait plus exact de dire : un des deux montants d'un mors. M. Bertrand, dans son *Archéologie celtique et gauloise* (Paris, 1889, figure 56), reproduit un mors complet, trouvé dans la station lacustre de

---

(1) *Compte rendu du Congrès de Bruxelles*. Bruxelles (1892), p. 517.

(2) Ne serait-ce pas à l'abondance de ces « broyeurs » en silex, dont j'ai trouvé de nombreux exemplaires à la surface, que serait dû le nom même de la Quenique. bien que leurs dimensions dépassent notablement celles des « billes » chères à nos enfants ?

Mœringen, où deux montants analogues sont également munis de trois œillères. — Ce qui me fait hésiter sur cette interprétation de nos objets, c'est que la tige y est creuse et, par suite, qu'elle devait offrir une résistance insuffisante à la pression.

La tombelle ne renfermait aucune trace de poterie, en dehors de quelques fragments dispersés à la surface; il est vrai que les urnes ont pu être enlevées pendant le défoncement de 1878.

*
* *

Dans l'automne de 1902, j'eus l'occasion de faire défoncer, au lieu dit Bettremont, une sapinière d'un demi-hectare qui formait la continuation de la Quenique vers l'est. Le sol descend d'ici jusqu'à l'Orne en deux gradins. A mi-côte sourd une fontaine profondément encaissée, qui envoie ses eaux à la rivière en aval du hameau de Beaurieux. Ce terrain ne présentait aucun tertre; mais des tombelles ont très bien pu y être nivelées au cours de quelque défoncement antérieur, sans qu'on ait atteint la couche des dépôts funéraires. Quoi qu'il en soit, j'y ai recueilli, à quarante ou cinquante centimètres de profondeur et à une assez grande distance les unes des autres, trois urnes remplies d'ossements (planche IV, n°s 1, 2 et 4). La dernière en renfermait une quatrième, plus petite, qui tomba littéralement en poussière quand je cherchai à la retirer.

Sur le même terrain, à des profondeurs variables et sans connexion apparente avec les bûchers funéraires, j'ai recueilli au cours des travaux :

1° Un bel exemplaire de ces ustensiles de bronze où l'on a voulu voir tour à tour une pendeloque (Ubaghs),

un petit ciseau (Hermann), un rasoir (de Mortillet), un couteau de sacrifice (Bequet) (voir plus loin figure, planche VI, 2, *b*). Un exemplaire assez semblable a été trouvé naguère dans la grotte de Sinsin (1), sauf que le manche compte trois anneaux au lieu de deux;

2° Un petit cylindre de bronze en forme de roulette, mesurant 11 centimètres de circonférence et percé d'un trou au centre;

3° Enfouis côte à côte, au milieu de cendres de bois, quatre objets de fer : une grille en forme de serpentin, composée d'une tige se repliant quatre fois sur elle-même (large de 15 centimètres sur 21 de long.); deux barres plates, portant un trou à l'extrémité et ayant pu servir de support aux objets placés sur la grille (longueur : 33 centimètres chacune); enfin une tige de fer creuse, longue de 59 centimètres (voy. planche VI, 3).

J'ai exposé ces objets de fer, en 1903, à la Société d'anthropologie de Bruxelles, qui a bien voulu les reproduire dans son *Bulletin* (2). Toutefois, personne n'a pu me donner d'indication sur leur destination réelle. Peut-être y a-t-il là un attirail de fondeur, mais qui peut remonter à n'importe quelle époque.

* * *

A l'autre extrémité, vers le sud, la crête de la Quenique se termine par une sorte d'éperon boisé qui domine assez

---

(1) *Annales de la Société d'archéologie de Namur*, t. XVI, pl. II, fig. 5.

(2) *Bulletin de la Société d'anthropologie de Bruxelles*, t. XXII (1903 , planche II.

abruptement le bassin formé par la jonction de l'Orne et de la Thyle, alors qu'à l'ouest prend naissance une dépression qui descend en pente douce vers la Dyle. Il y avait là, jusqu'au milieu du dernier siècle, une bruyère d'un hectare et demi à deux hectares, qui s'allongeait entre la crête de la vallée de l'Orne et les cultures du *Champ de la Ferme rouge*. On en fit une sapinière vers 1830. Après une première coupe en 1860, on y replanta des sapins, en se bornant à remuer très superficiellement le terrain. Ainsi s'explique qu'il s'y fût conservé cinq tertres de 20 à 25 mètres de diamètre, dépassant de 1m50 à 1m80 le niveau du sol et éparpillés, à des distances mesurant de 15 à 30 mètres. (Voy. figure 3.) Ayant exploité la nouvelle sapinière au cours des derniers hivers, j'ai fait éventrer les tombelles jusqu'au niveau de la terre vierge et retourner le sol de la parcelle jusqu'à 60 centimètres de profondeur.

Les tombelles ont été attaquées, suivant la méthode usuelle, par le creusement de deux tranchées prolongées, au niveau du sol ancien, jusqu'à leur rencontre au centre du tertre, les coins des parois étant ensuite abattus et rejetés (voy. planche I).

Voici les constatations que j'y ai faites :

Au niveau de l'ancien sol s'étendait une aire de trois à quatre mètres de diamètre, où des cendres de charbon de bois étaient mélangées avec quelques rares esquilles d'ossements torréfiés. Sur ce lit noirâtre reposaient une ou plusieurs urnes renfermant des ossements brûlés, mélangés à des cendres fines. Près des urnes se trouvaient enterrés des objets de fer et de bronze, le plus souvent altérés par l'action du fer ou brisés et tordus intentionnellement.

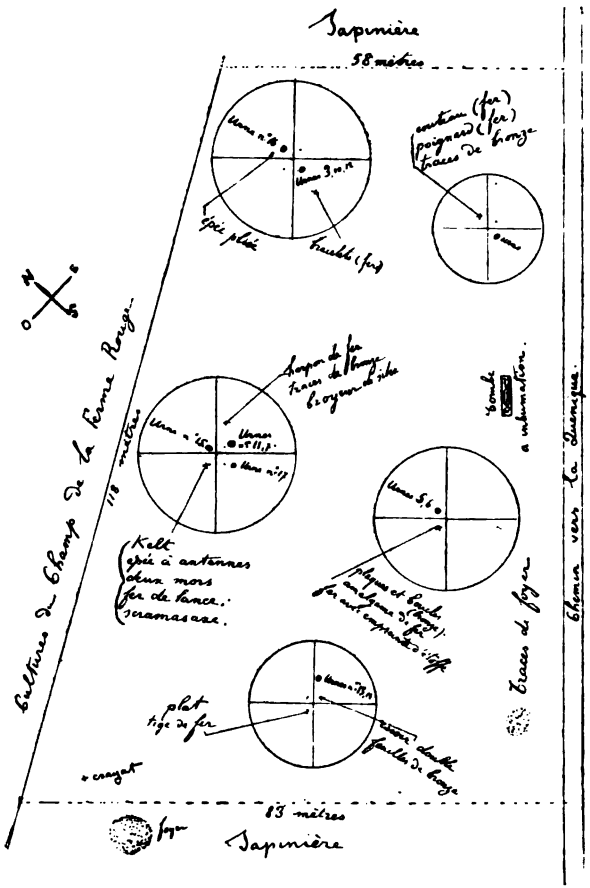


FIG. 3. — Tombelles du Champ de la Ferme rouge.

Plusieurs objets de bronze étaient fondus au point d'être devenus méconnaissables. Les objets de fer étaient pour la plupart enveloppés d'une gangue siliceuse, pro-

venant de la solidification du sable au contact du fer, sous l'action de la chaleur ou de l'humidité. Il est à remarquer que, dans toutes les tombelles, les dépôts funéraires se trouvaient à un ou deux mètres du centre apparent. Parmi les cendres, j'ai recueilli un fragment d'épée portant l'empreinte très nette d'un morceau d'étoffe et une petite scorie où l'on distingue, parmi des traces de fer et de bronze, des tiges à demi carbonisées de graminées ayant sans doute servi à l'allumage du bûcher, à moins qu'elles ne proviennent de la paille sur laquelle on aurait déposé le cadavre.

Un fait à signaler, c'est que, en dehors des tertres, le terrain n'a fourni ni urne ni objet de métal. Sur un point, j'ai bien constaté la présence de charbon de bois avec quelques esquilles d'os et quelques fragments de poterie brisée; mais l'état et la dispersion de ces débris semblaient indiquer une sépulture violée et nivelée à une époque antérieure. — Cette association constante des dépôts funéraires avec la présence d'un tertre semble en contradiction avec l'opinion que, à la Quenique, les urnes auraient été découvertes enfouies çà et là ou même alignées, sans connexité avec les tombelles (1).

En réalité, nous ne possédons aucune relation de première main sur les découvertes de la Quenique et l'enquête orale que j'ai essayé d'organiser parmi les survivants de la grande dévastation, lorsque, quelques années plus tard, je revins habiter le pays, n'aboutit sur ce point qu'à des déclarations contradictoires. En supposant que le

(1) CLOQUET dans les *Annales de la Société archéologique de Nivelles*, t. II, p. 40.

nombre exact des urnes n'ait pas été exagéré (on a parlé de multiples centaines !), il est possible que le même tertre en ait renfermé plusieurs, comme je l'ai constaté dans mes dernières fouilles; d'autre part, à la Quenique, sur bien des points les circonférences des tombelles se touchaient ou même se pénétraient les unes les autres.

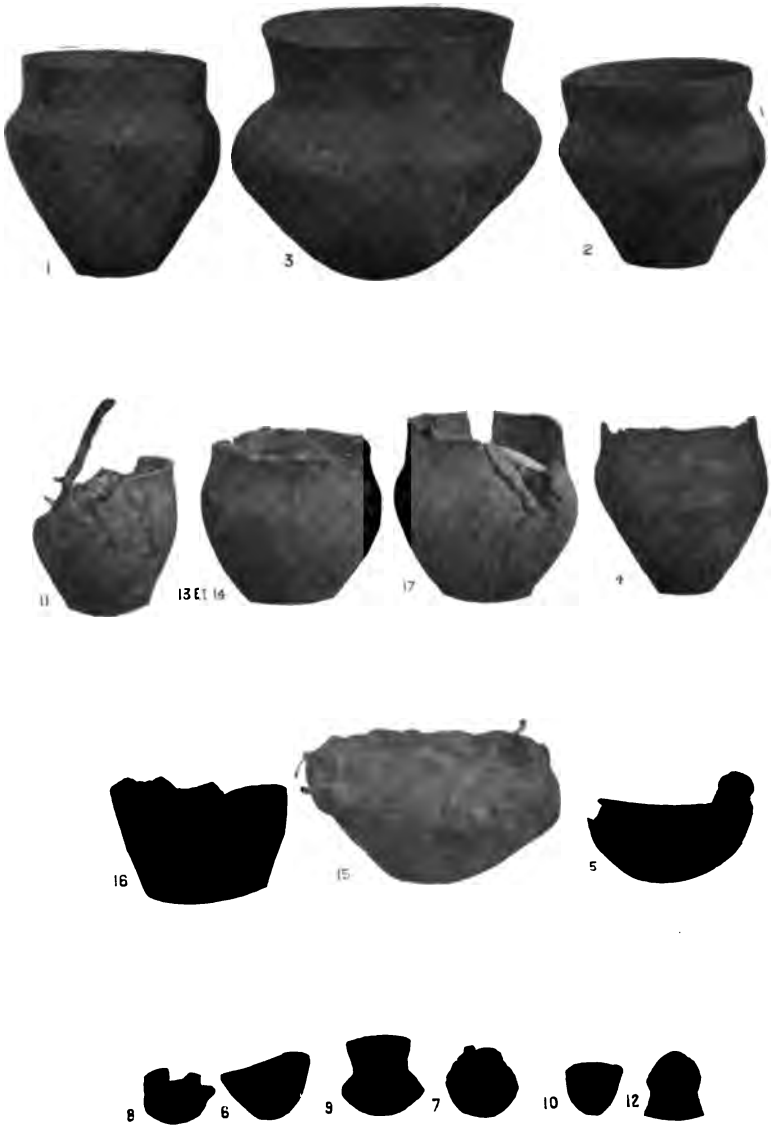
Cependant, je ne voudrais pas trop généraliser. Il est possible que les honneurs du tumulus aient été réservés aux cendres des personnages de distinction, comme le fait s'observe souvent chez les peuples barbares, alors que les urnes destinées au commun de la tribu auraient été simplement enfouies dans le sol (1).

Dans le premier cas, voici comment les choses doivent s'être passées : Après avoir débroussaillé le sol, on y élevait le bûcher ; on y plaçait le cadavre et on allumait. Pendant la combustion, on jetait dans le foyer les armes, les ustensiles, les parures du défunt, fréquemment après les avoir tordus ou brisés, à moins qu'on ne laissât au feu le soin d'achever la destruction. C'était assurément le meilleur moyen de les mettre à l'abri des voleurs, à une époque où il n'y avait pas encore d'archéologues. Mais il est plus probable, à en juger par la signification de cet usage partout où il a été rencontré dans des temps plus rapprochés de nous, qu'on s'imaginait ainsi envoyer l'âme de l'objet rejoindre l'âme de son propriétaire. Aussitôt l'incinération achevée, on ramassait soigneusement les

---

(1) M. L. De Pauw m'a dit avoir assisté, en compagnie de feu Alfred Rucquoy, qui habitait alors Court-Saint-Étienne et qui y réunit une assez belle collection d'objets, à l'exhumation de plusieurs urnes disposées en alignement dans la partie du plateau qui s'abaisse vers la vallée de l'Orne.

PLANCHE IV.



Urnes cinéraires (réd. au $^{1}/_{10}$).

cendres et on les versait dans une urne qui était placée sur le sol, à peu de distance des possessions du défunt; ensuite, on recouvrait le tout avec du sable jusqu'à ce que le tertre atteignît 1m50 à 2 mètres de hauteur.

Poterie.

Les vases que j'ai recueillis au nombre de treize, dans les cinq tertres. sont fabriqués à la main, comme ceux de la Quenique; c'est la même pâte grise, peu cuite et d'une texture assez grossière; l'extérieur, toutefois, est recouvert d'un engobe lisse, brunâtre ou jaunâtre, d'une pâte plus fine. Les racines des sapins les avaient quelque peu endommagés; on peut même voir dans le n° 11 de la planche IV une racine qui est descendue chercher sa nourriture dans ces cendres plus de deux fois millénaires.

La forme qui domine est le type d'urne, qu'on pourrait appeler classique, avec lequel nous ont familiarisés l'Italie, la Grèce primitive et même l'Orient (1). C'est la jarre à col plus ou moins étroit et à panse rebondie. J'en ai trouvé huit qui rentrent dans cette catégorie (nos 1, 2, 3, 4, 7, 11, 13, 17). L'une d'elles, de dimensions exceptionnelles, ne mesure pas moins de 29 centimètres de haut et de 1m12 de circonférence à sa plus grande largeur (n° 3). Les autres présentent les formes de la terrine ou de l'écuelle (n° 5), de la jatte (n° 6), d'un champignon

(1) Telle est également la nature et la forme des vases qui prédominent dans les nécropoles de la Campine. (Voir, dans COMHAIRE, les pl. XIV, XV et XVI.)

inverti (n° 12), d'un seau ou pot de fleur (n° 16). Le vase le plus intéressant est une sorte de bac oblong, haut de 17 centimètres sur 93 de pourtour, avec un orifice de 20 centimètres de long sur 14 de large (n° 15). La pâte, particulièrement lourde et grossière, y était dissimulée sous un engobe, conservé par places, qui laisse distinctement apercevoir un essai de décoration géométrique, tracé à la pointe, peut-être avec une sorte de peigne à cinq dents. Ce sont deux rangées de rainures; la rangée supérieure, composée de cinq droites parallèles; la rangée inférieure, de cinq lignes ondulées, dessinant une vague spirale.

Fig. 4. — Vase à décoration géométrique.

Les recherches auxquelles a bien voulu se livrer le savant conservateur des collections de l'Université, M. De Pauw, sur les débris renfermés dans les quelques urnes que j'ai pu lui soumettre, établissent que tous les ossements sont de provenance humaine. L'une d'elles (n° 16), qui renfermait la petite urne n° 6, contenait des os qu'il croit pouvoir attribuer à une jeune

femme de petite taille; elle avait été incinérée avec un anneau de bronze au bras (1).

Les plus réduits de ces vases — qui ne dépassent pas 12 centimètres de haut sur 22 de pourtour — semblent trop exigus pour avoir renfermé les débris de l'incinération d'un adulte. Malheureusement, leur contenu ne se prêtait plus guère à des déterminations rigoureuses. Chacune de ces urnes minuscules était insérée dans une des grandes. Le vase le plus considérable (n° 3) en renfermait même deux (n°s 10 et 12).

Comme il est peu probable qu'on ait conservé les restes d'un enfant pour les placer dans l'urne de son père ou de sa mère au décès subséquent de ceux-ci, ne serait-il pas permis de supposer que les décès ont été simultanés et, dès lors, que les grandes urnes renferment les cendres d'une femme morte en couches? Mais ici se présente la question : s'il s'agit d'un enfant mort-né ou d'un enfant immolé après la mort de la mère. Le sacrifice de l'enfant dont la mère mourait en lui donnant le jour, était une coutume naguère encore répandue chez certaines peuplades de l'Amérique du Nord; soit, d'après Bancroft, parce qu'on considérait le nouveau-né comme un assassin (2); soit, d'après d'autres, parce qu'on désirait lui épargner de mourir d'inanition (3); soit, enfin, parce qu'on voulait munir la défunte d'un enfant à allaiter dans l'autre

---

(1) Dans l'urne n° 17, M. De Pauw m'a signalé un frontal incrusté de plusieurs pointes de bronze; les cendres de cette urne renfermaient, en outre, des fragments de fibule également en bronze.

(2) Bancroft, *Native Races of the Pacific States*, t. I, p. 590.

(3) M. de P., *Recherches philosophiques sur les Américains*, t. II, p. 239.

monde. Cette dernière interprétation semble justifiée par la curieuse survivance qu'on rencontre à la fois dans les archipels de l'Océanie et parmi les tribus de la Guinée, où l'on enterre l'accouchée avec un morceau de bois sur la poitrine, afin qu'elle conserve l'illusion d'emporter son nouveau-né (1). Chez une peuplade de la Mélanésie, le petit orphelin est ensuite caché pendant quelque temps dans la case d'une autre famille, afin que la mère ne puisse pas venir le chercher, au cas où elle s'apercevrait du subterfuge (2). Plus près des temps et des lieux qui nous occupent ici, de nombreux tumuli du nord de l'Europe, où les cadavres étaient ensevelis et non incinérés, ont livré le squelette d'un nouveau-né à côté de celui d'une femme : « Il est probable, dit à ce propos sir John Lubbock, que lorsqu'une femme mourait en donnant le jour à un enfant ou pendant qu'elle le nourrissait, l'enfant était enterré vivant avec elle, ainsi que cela se fait encore chez quelques tribus d'Esquimaux (3). »

Comme, à en juger par la nature des objets déposés près des urnes, c'étaient surtout des hommes qu'on enterrait sous les tertres, on peut se demander ce qui valait cet honneur exceptionnel aux femmes mortes en couches. Peut-être était-ce la conséquence d'une idée analogue à celle qui prévalait chez certains peuples de l'Amérique ancienne, concernant la destinée posthume des femmes mortes pendant l'enfantement. Les Aztecs et

---

(1) Frazer, *Golden Bough*, 2e éd., 1900, p. 245.
(2) R. C. Codrington, *The Melanesians*, p. 275.
(3) Sir John Lubbock, *L'homme préhistorique*, t. I, p. 166.

d'autres peuples voisins les envoyaient au royaume du Soleil, qu'elles partageaient avec les âmes des guerriers tombés sur les champs de bataille ou immolés dans les cérémonies religieuses (1).

La plausibilité de cette explication est plus grande encore quand on trouve simultanément deux urnes exiguës dans une plus grande.

Ici, en effet, ne s'agirait-il pas de jumeaux?

Chez la plupart des non-civilisés, la naissance de jumeaux a toujours passé pour un fait surnaturel ou du moins suspect, un maléfice qui entraîne l'immolation des enfants et fréquemment de la mère, alors que, parmi les populations plus avancées, on se contente de les *tabouer*, c'est-à-dire qu'on les expulse ou qu'on les met en quarantaine, afin d'éviter que toute la peuplade n'en soit contaminée. Mais chez les non-civilisés, on confond aisément, dans le surnaturel, les notions d'impureté et de sainteté, de néfaste et de propice. Par cela même que les jumeaux sont censés une procréation de la puissance surhumaine, on tend à se concilier leur influence et on leur rend des honneurs divins après leur mort (2). Il

---

(1) Albert Réville, *Religions du Mexique, de l'Amérique centrale et du Pérou*. Paris, 1885, p. 190. — Suivant d'autres, les femmes mortes en couches devenaient au Mexique des déesses redoutées. (Comp. *Revue de l'Histoire des religions*, t. LVI, n° 3, p. 291, note.)

(2) Comp. les nombreux cas de ce genre relevés par les voyageurs et les ethnographes; M. Rendell Harris les a récemment rassemblés dans son volume : *The Heavenly Twins*. Un vol. Cambridge, 1906. — M. Harris croit pouvoir rattacher à cet ordre d'idées les personnages de Castor et Pollux, des deux Açvins védiques, de Romulus et Rémus, etc.

n'y aurait donc rien de surprenant à ce que nos prédécesseurs eussent à la fois immolé et vénéré certains de leurs nouveau-nés jumeaux en compagnie de la mère.

Les abords des tombelles ont livré cinq ou six plaques de schiste analogues à celles qu'on rapporte avoir recouvert des urnes à le Quenique; mais je n'ai pu constater aucun cas de superposition directe. D'ailleurs, ces plaques ne mesuraient guère qu'environ 25 centimètres de long, sur 12 à 13 de large, ce qui eût été insuffisant pour recouvrir entièrement l'ouverture des grandes urnes. A la Quenique, suivant Cloquet, des plaques analogues fermaient les urnes enterrées en alignement (1). Dans ce cas, elles servaient peut-être à remplacer le tertre, soit pour protéger les cendres, soit pour empêcher l'âme de s'échapper.

En dehors des vases invariablement utilisés pour contenir des cendres humaines, j'ai trouvé les fragments d'un plat circulaire, du type encore en usage dans notre vaisselle; patiemment reconstitué au Musée du Cinquantenaire, il mesure 36 centimètres de diamètre et porte deux trous de suspension, à 7 centimètres l'un de l'autre (voy. planche V, *a*). On voit que l'usage de suspendre les assiettes ne date pas d'hier.

Bronze.

Les objets de bronze que j'ai pu déterminer ne sont pas très nombreux, ayant été particulièrement attaqués

---

(1) *De l'âge du bronze et du premier âge du fer en Belgique.* Bruges, 1888, p. 6.

a PLANCHE V.

Plat en terre cuite (réd. au $^1/_5$).

b

(Profil)

(Plan)

Peson de fuseau (grandeur nat.).

n'y aurait donc rien de surprenant à ce que nos prédécesseurs eussent à la fois immolé et vénéré certains de leurs nouveau-nés jumeaux en compagnie de la mère.

Les abords des tombelles ont livré cinq ou six plaques de schiste analogues à celles qu'on rapporte avoir recouvert des urnes à le Quenique; mais je n'ai pu constater aucun cas de superposition directe. D'ailleurs, ces plaques ne mesuraient guère qu'environ 25 centimètres de long, sur 12 à 13 de large, ce qui eût été insuffisant pour recouvrir entièrement l'ouverture des grandes urnes. A la Quenique, suivant Cloquet, des plaques analogues fermaient les urnes enterrées en alignement (1). Dans ce cas, elles servaient peut-être à remplacer le tertre, soit pour protéger les cendres, soit pour empêcher l'âme de s'échapper.

En dehors des vases invariablement utilisés pour contenir des cendres humaines, j'ai trouvé les fragments d'un plat circulaire, du type encore en usage dans notre vaisselle; patiemment reconstitué au Musée du Cinquantenaire, il mesure 36 centimètres de diamètre et porte deux trous de suspension, à 7 centimètres l'un de l'autre (voy. planche V, *a*). On voit que l'usage de suspendre les assiettes ne date pas d'hier.

Bronze.

Les objets de bronze que j'ai pu déterminer ne sont pas très nombreux, ayant été particulièrement attaqués

---

(1) *De l'âge du bronze et du premier âge du fer en Belgique.* Bruges, 1888, p. 6.

a **PLANCHE V.**

Plat en terre cuite réd. au $^1/_3$.

par le feu, qui a dû être très violent. J'ai recueilli dans trois tombelles une cinquantaine de fragments isolés, consistant surtout en feuilles minces et légères, fortement recroquevillées et pesant ensemble plus de 1 kilogramme.

J'ai pu toutefois y reconnaître plusieurs plaques de ceinturon, deux encore munies de leur bélière, ainsi qu'un rasoir double (planche VI, 2, *a*) analogue à celui que j'avais recueilli au Bettremont (planche VI, 2, *b*) (1). La tombelle principale m'a livré une extrémité de bouterolle et un kelt ou hachette de bronze, à douille et à boucle, avec tranchant très aiguisé (planche VII, A).

Longue de 10 $^1/_2$ centimètres, entièrement intacte et d'un dessin très élégant, cette hachette se rapproche du kelt recueilli en 1892, sur le Ry de la Wastez près de Bousval, par M. Collins, de Genappe, qui l'a décrite dans le tome IV des *Annales de la Société archéologique de Nivelles* (2).

M. Comhaire écrivait en 1894 que jusque-là on n'avait trouvé aucune hache de bronze dans une sépulture (3); d'où il concluait que c'était un outil et non une

---

(1) Dans les deux cas, le manche porte une strie longitudinale qui, sur l'exemplaire intact, se poursuit jusqu'à l'entaille du sommet, comme pour indiquer la séparation des deux lames géminées.

(2) M. Collins se demande, à ce propos, si Wastez ne provient pas de Hasta = Hache. On pourrait aussi bien soutenir que cette dénomination provient de Hoste (Hostis); le vallon, en effet, est dominé par un petit plateau aux flancs rocailleux qui se prêtait à l'établissement d'un oppidum ou d'un poste fortifié. Mais l'explication la plus vraisemblable est celle qui rapprocherait Wastez de *Wüste, Waste*, solitude. (Voir aussi Léon Vanderkindere, sur le mot Woeste, dans la *Revue de l'Université de Bruxelles*, t. I, 2e année, p. 412.)

(3) *Mémoire cité*, p. 33.

arme. Il nous est impossible d'admettre cette distinction. La présence de mors et de rasoirs prouve que ce n'étaient pas seulement les armes dont se faisait escorter le défunt.

Objets de fer.

Je me borne à signaler les objets suivants trouvés isolément dans les tombelles à côté d'autres fragments qu'il m'a été impossible de déterminer :

Une grande épée à deux tranchants, à cran et à pointe triangulaire, mesurant 1m4 de long. Cette épée était ployée au point de former un cercle parfait, la pointe venant en contact avec la lame à la naissance de la poignée. Sans prétendre que les populations de cet âge connaissaient l'acier, on peut difficilement se refuser à conclure qu'elles possédaient des procédés pour donner une certaine souplesse à leurs armes de fer (planche VI, 4).

Une tige de fer torse, à douille, longue de 49 1/2 centimètres, s'amincissant vers le bout et se terminant par deux pointes recourbées (harpon ou petite fourche) (planche VI, 5).

Un petit poignard long de 19 centimètres.

Une réduction de hache d'une longueur totale de 8 centimètres, laquelle n'a pu servir que d'amulette ou de jouet (planche VI, 6 A).

Un couteau long de 14 centimètres (planche VI, 6 B).

Plusieurs fragments d'anneaux dont deux s'adaptent de façon à former un cercle de 6 centimètres de diamètre.

Un amalgame d'objets ferrugineux dans lequel on

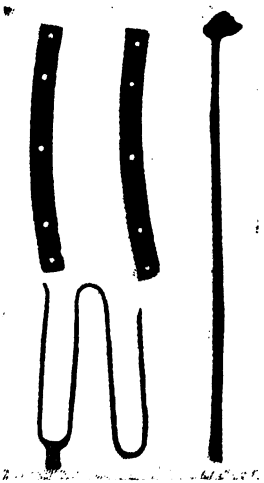
1. Épée de fer.

a

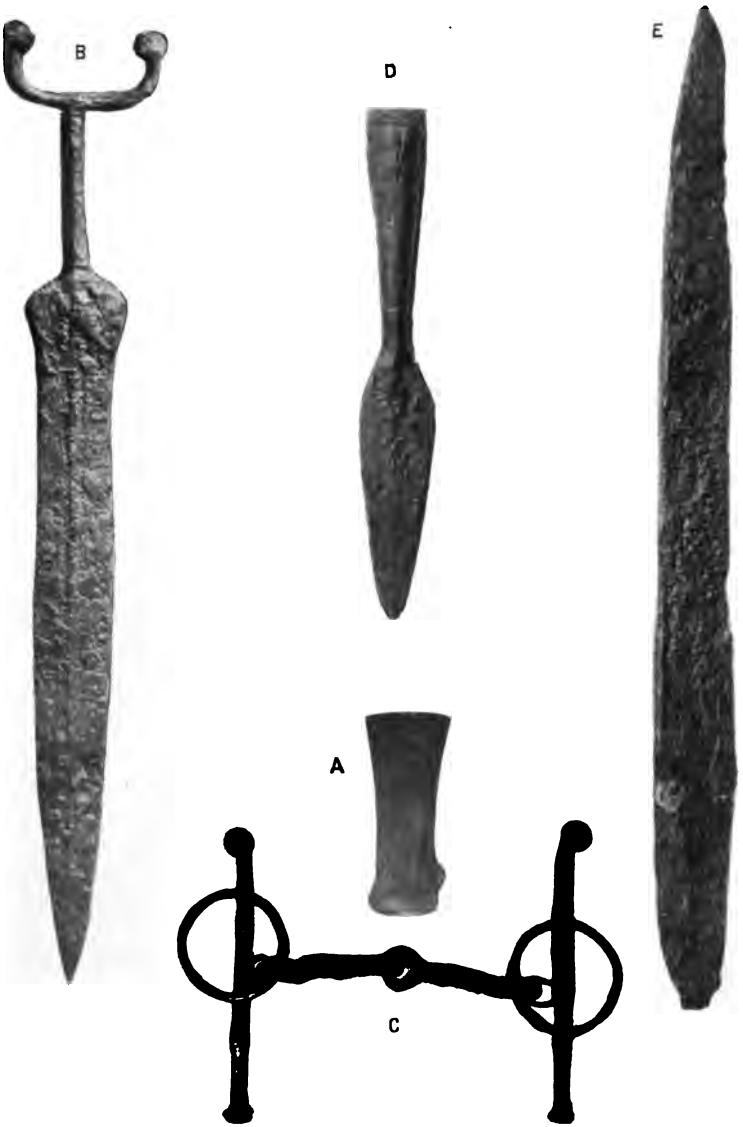
5. Fourche de fer.

b

2. Rasoirs en bronze.



3. Attirail de fondeur. (?)



Objets recueillis dans la même gangue (réd. au 1/4).

peut distinguer six anneaux analogues qui se détachent irrégulièrement de la masse.

La principale tombelle, qui contenait trois grandes urnes et une petite, renfermait, à 1 mètre du centre, sur le lit du bûcher, un gros bloc irrégulier de sable agglutiné par l'oxyde de fer, pesant une douzaine de kilogrammes (1). M'étant assuré de la présence d'objets en métal, je fis transporter cette gangue, telle quelle, au Musée du Parc du Cinquantenaire, et là, par un traitement approprié, on en fit successivement sortir, sous les yeux de M. le baron de Loë, outre la hache de bronze dont j'ai parlé plus haut (planche VII A), les armes en fer dont voici la description :

1. Une épée à antennes, ou plutôt un poignard long de 50 centimètres, à large lame, à deux tranchants et à pointe effilée, avec nervure médiane; la poignée est munie de deux antennes ornées chacune d'une paire de boules (planche V, B). Cette arme était brisée en plusieurs morceaux, mais heureusement complète (2). C'est, je pense, la première épée à antennes qui ait été découverte dans notre pays. On en a trouvé quelques-unes en France, dans l'Allemagne méridionale et le sud de l'Europe. M. Déchelette, le savant conservateur du Musée de Roanne, qui a consacré à ce type de glaives un article spécial de la

(1) Un peu à gauche du point où la planche I montre un ouvrier debout dans la tranchée.

(2) Le service des fouilles du Musée, dirigé par M. le baron de Loë, a droit à mes meilleurs remerciements pour avoir gracieusement accepté de reconstituer une partie de mes trouvailles, en échange de l'autorisation d'en prendre un moulage.

Revue préhistorique (1906), croit qu'il représente la troisième et dernière période du premier âge du fer; son origine devrait être cherchée en Italie, où l'on a recueilli à Assise une forme absolument identique à la nôtre (1). La longue épée de fer caractériserait alors la seconde période et l'épée de bronze la première de l'époque hallstattienne.

2 et **3**. Deux mors de cheval complets et à peu près identiques (voy. l'un d'eux, planche VII, C). Les montants, légèrement recourbés vers une des extrémités, sont réunis par un filet formé de deux tiges tordues s'agrafant l'une à l'autre. A la naissance de ces tiges sont insérés deux grands anneaux mobiles, destinés au passage des rênes.

On a déjà constaté la présence de mors analogues pendant le premier âge du fer.

La partie du mors entrant dans la bouche du cheval était, d'après la longueur du filet, dans les deux exemplaires, respectivement de 15 et de 14 centimètres, — comme de nos jours en moyenne, — ce qui attesterait que la taille de l'espèce chevaline n'a guère changé dans notre pays (2).

---

(1) DÉCHELETTE, *Les glaives à antennes de l'époque hallstattienne*, dans la REVUE PRÉHISTORIQUE, p. 309, fig. 1.

(2) M. Charles Dens décrit une moitié de mors analogue, trouvée sur le territoire d'Ottignies, à quelques kilomètres de la Quenique; la proportion y est la même : 15 centimètres. (*Annales de la Société d'archéologie de Bruxelles*, 1903.) — D'autre part, dans un mors du premier âge du fer trouvé à Mœringen, en Suisse, le filet ne comporte que 9 centimètres de longueur, ce qui indique une monture de très-petite taille. (ALEX. BERTRAND, *Archéologie celtique et gauloise*, p. 218.)

Ici se présente la question : si l'on se bornait à enterrer avec le mort le harnachement de sa monture ou si, en outre, on sacrifiait celle-ci sur la tombe. Nul n'ignore en effet que ce dernier usage, à peu près universel chez les peuples barbares, s'est perpétué en Europe, pour ainsi dire, jusqu'à nos jours et même qu'il a laissé des traces encore discernables dans le cérémonial de nos funérailles militaires (1). Je puis seulement rappeler à nouveau que, d'après les minutieuses recherches de M. De Pauw, parmi les nombreux débris dont il a fait l'examen, il ne s'est pas rencontré d'ossements attribuables à des chevaux ou à d'autres animaux.

Il est intéressant de constater, même quand il s'agit d'ustensiles aussi compliqués que le mors, la persistance de certains types industriels à travers les âges. Dès cette époque, nous trouvons également, fixées pour toute la suite des temps intermédiaires, les formes de la lance, de la hache, du poignard, du clou, de la boucle, de l'urne, du plat, etc.

4. Un fer de lance ou plutôt de pique, présentant le type classique avec douille (pl. VII, D). Sa longueur est de 28 centimètres, dont 15 pour la pointe proprement dite.

5. Une arme offrant toutes les apparences d'un scramasaxe, avec une lame à un seul tranchant et à dos épais (planche VII, E). Elle était brisée intentionnellement en trois morceaux, mais reconstituable dans son intégralité. La partie antérieure de la lame garde encore son manche,

---

(1) Cf. Goblet d'Alviella, *L'Idée de Dieu d'après l'anthropologie et l'histoire*. Bruxelles, 1892, pp. 34-35.

dont le bois a été conservé en partie, grâce à l'oxyde de fer qui l'a pour ainsi dire fossilisé. Longueur : 55cm4; largeur moyenne de la lame : 3cm5.

Comment expliquer, dans le dépôt funéraire d'un tertre à incinération, — sur le lit formé, à 1m30 de profondeur, par les cendres des bûchers, — auprès de quatre urnes cinéraires qui paraissent intactes, — parmi d'autres tombelles appartenant sans conteste au premier âge du fer, — à une distance réciproque suffisamment réduite pour que l'oxydation ait enveloppé ces objets dans une même gangue sablonneuse, — la juxtaposition d'engins aussi caractéristiques d'époques séparées par un bon millier d'années : le kelt de la fin de l'âge du bronze, l'épée à antennes de la seconde période de la civilisation hallstattienne et le couteau de chasse des envahisseurs francs du IVe siècle après notre ère ?

« Il est rare, écrit M. Montelius (1), que les différentes périodes soient mêlées dans une découverte... Un type de la première période est parfois associé à un type de la deuxième, mais jamais de la troisième. » — Or, le savant suédois ne compte pas moins de cinq périodes entre la fin de l'âge du bronze et le commencement de notre ère.

Que vient donc faire ici le scramasaxe? Est-ce le cas d'appliquer la règle que, quand on exhume ensemble des objets d'âge différent, c'est le moins ancien qui date l'enfouissement? Il faudrait supposer, ou bien un archéologue franc déposant sa collection d'armes de tout âge dans une tombelle du premier âge du fer, ou bien le propriétaire du scramasaxe, enterré sous un tertre

---

(1) *Congrès d'anthropologie et d'archéologie préhistoriques de Paris*, XIIe session, p. 351.

hallstattien, sans qu'on eût dérangé le dépôt funéraire des premiers occupants.

Mais, dans ce cas, n'aurais-je pas retrouvé ses ossements? Or la tombe ne renfermait, en dehors de quelques esquilles corrodées par le feu, d'autres débris humains que les restes incinérés dans les urnes. La position des objets funéraires n'indique, du reste, aucun remaniement.

Il y aurait bien encore une autre explication : c'est la thèse soutenue en 1906, à Gand, par M. Louis Stroobant, au sein du Congrès de la Fédération archéologique et historique, en vue d'établir que la civilisation de Hallstatt aurait été tardivement introduite dans notre pays par les Francs Saliens, après la chute de la domination romaine.

Mais cette assertion renverse trop complètement toutes les données de notre archéologie protohistorique, pour que, en dépit du scramasaxe, nous acceptions d'y suivre l'auteur, dans l'état actuel de la science.

Faut-il admettre, enfin, qu'une arme analogue au scramasaxe était déjà en usage parmi les populations du premier âge du fer? Dans ce cas, il est étrange qu'on n'en ait jusqu'ici constaté la présence, en Belgique ou ailleurs, ni dans les tombelles de cette période, ni parmi les dépôts des temps postérieurs, sauf après l'arrivée des Francs.

Je ne puis que poser le problème sans chercher davantage à le résoudre.

Quoi qu'il en soit, laissant de côté cette énigme, on peut tenir pour acquis que nos cinq tombelles remontent également au premier âge du fer, comme, du reste, toutes les sépultures de la Quenique, lesquelles, scramasaxe à part, présentent partout les mêmes caractères archéologiques. « Ces caractères, écrit M. Comhaire, à propos

des tombelles du canton de Wavre en général, se retrouvent dans une série immense de nécropoles (plus de 140,000 tumuli) de la Prusse rhénane, de l'Est de la France, le long du Rhin depuis Mayence jusqu'à l'Ain, en longeant les côtes occidentales du Jura, sur les plateaux de la Bavière rhénane, de l'Alsace-Lorraine, de la Bourgogne et de la Franche-Comté, et même, vers le centre de la France, dans la Creuse. Toutes sont classées dans le premier âge du fer et nos nécropoles belges doivent leur être assimilées (1). »

Y a-t-il moyen d'établir, au moins approximativement, à quel peuple remontent ces sépultures?

Gabriel de Mortillet a cru pouvoir identifier le premier âge du fer avec la civilisation des Celtes et le second avec celle des Gaulois.

S'en tenant à l'histoire de nos provinces et écrivant avant les grandes découvertes de l'archéologie orientale qui ont marqué la fin du siècle, Cloquet voulait trouver dans nos nécropoles à incinération les vestiges des populations celtiques qui, d'après César, habitaient la Belgique antérieurement à la première invasion des Germains, deux ou trois siècles avant notre ère (2).

Un autre de nos archéologues les plus distingués, Henri Schuermans, tout en acceptant l'origine préromaine des objets recueillis à la Quenique, a contesté la possibilité de leur assigner un âge plus ancien que l'invasion des Éburons et des Nerviens (3).

---

(1) Comhaire, *Mémoire cité*, p. 95.

(2) *De Bello Gallico*, II, p. 4.

(3) *Lettre au docteur Cloquet* dans les Annales de la Société archéologique de Nivelles, t. III, 1885, p. 60.

Enfin, M. Combaire a essayé de mettre ces savants d'accord, en alléguant le fait de deux invasions germaniques successives : la première serait celle des Belges; elle aurait précédé de plusieurs siècles l'arrivée des Éburons et des Nerviens (1).

On peut considérer comme établi que l'emploi du fer a commencé en Égypte au XIIIe siècle avant notre ère, un peu plus tard en Grèce et en Italie. Suivant M. Montelius, c'est entre le VIIIe et le IXe siècle que ce métal aurait pénétré dans notre pays (2). — D'après M. de Pierpont et d'autres archéologues, cette pénétration n'aurait eu lieu qu'au Ve siècle avant notre ère (3). M. Déchelette, à la suite de MM. Reinecke et Hoernes, divise le premier âge du fer en deux périodes respectivement caractérisées : 1° de 900 à 700, par le mélange d'objets de fer aux glaives de bronze, ensuite par l'apparition de la grande épée de fer hallstattienne; 2° de 700 à 500, par les épées et les poignards à antennes (4). — Quoi qu'il en soit, ces évaluations reportent l'âge de nos tombelles au delà du Ve siècle avant J.-C., et dès lors il est peut-être téméraire de chercher à mettre un nom historique sur les populations qui, à cette époque, occupaient notre territoire. Tout au plus convient-il de rappeler ici les traditions classiques réunies

---

(1) COMHAIRE, *Premiers âges du métal*, pp. 126 et suiv.

(2) *Chronologie préhistorique*, dans le COMPTE RENDU DU CONGRÈS D'ANTHROPOLOGIE ET D'ARCHÉOLOGIE PRÉHISTORIQUES, XIIe session. Paris, 1900, p. 330.

(3) *Compte rendu du XXe Congrès de la Fédération archéologique et historique de Belgique*. Gand, 1907.

(4) DÉCHELETTE, *Les glaives à antennes de l'époque hallstattienne*, dans la REVUE PRÉHISTORIQUE, 1906, p. 308.

par Amédée Thierry et Schayes (1), en vue d'établir que, vers le VIIe siècle avant notre ère, des peuplades portant le nom de Bolg ou Belges, après avoir remonté la vallée du Danube, envahirent notre territoire, en refoulant vers le sud les anciennes populations celtiques. Ce seraient ces « Belges primitifs », comme les désigne M. Comhaire, qui auraient introduit chez nous la civilisation de Hallstatt.

Quant à la provenance de cette civilisation, le doute n'est guère possible. La nature et la forme de nos trouvailles ne sont pas seulement en rapport avec les dépôts funéraires de Hallstadt, mais encore avec ceux de l'Étrurie et de la Grèce, vers la fin de l'âge mycénien.

Toutefois, leur apparition ne suppose pas nécessairement des invasions destructrices; cette introduction a pu être tardive et graduelle. Suivant M. Alfred Bequet, dont le nom fait autorité dans notre archéologie préhistorique, l'importation du bronze serait due chez nous à un courant commercial de longue durée : « Nos contrées, écrit-il, étaient parcourues par des fondeurs nomades, dont les habitudes étaient semblables à celles des Bohémiens qui, de nos jours encore, vont errant de pays en pays, faisant de la chaudronnerie et ne se mêlant pas à la population. Ils approvisionnaient les tribus d'armes et d'objets de parure qu'ils fondaient sur place (2). »

Peut-être cette explication ne vaut-elle que pour les

---

(1) Voir aussi D'ARBOIS DE JUBAINVILLE, *Les Celtes depuis les temps les plus anciens*. Paris, 1904.

(2) *Annales de la Société archéologique de Namur*, t. XVI, p. 244.

objets de bronze qui présentent en général plus de fini. Les populations locales ont dû apprendre de bonne heure à confectionner elles-mêmes les armes et les parures de fer, ainsi que la poterie, dont les modèles leur étaient apportés du lointain Orient. J'ai constaté dans les sables du terrain défoncé, un peu au sud des tertres, les traces d'un bûcher considérable, où je n'ai recueilli aucun objet; mais à quelques mètres de là se trouvait un grand « crayat de sarrazin » de forme rectangulaire, mesurant environ 7 décimètres cubes, et pesant 17^{kg}800, ce qui donne par décimètre cube 2^{kg}550. D'après les calculs de M. De Pauw, ce poids ne s'explique que si, traité au charbon de bois, le bloc a retenu 35 à 40 °/₀ de fer, ce qui est, comme on sait, une garantie d'antiquité. Les bords étaient légèrement vitrifiés.

Quant aux routes suivies par ces courants commerciaux, M. von Tröltsch, dans la carte annexée à son mémoire de 1884, en signalait deux principales, que les récentes découvertes confirment de plus en plus : l'une qui, après avoir remonté la vallée du Danube, a suivi du sud au nord le cours du Rhin; l'autre, qui a longé successivement, dans la même direction, le cours du Rhône, de la Saône, de la Moselle et de la Meuse, lançant, à l'embouchure de la Sambre, un embranchement qui de Jemeppe aurait été rejoindre la vallée de la Dyle, pour suivre cette dernière jusqu'à l'Escaut. Peut-être pouvons-nous aujourd'hui préciser davantage comment ce dernier courant aurait passé de la vallée de la Sambre dans celle de la Dyle, en remontant jusque près de Gembloux le cours de l'Orneau, puis en prenant, à quelques kilomètres vers l'ouest, la vallée sinueuse de l'Orne, qui débouche dans celle de la Dyle à Court-Saint-Étienne.

Si même il faut admettre avec M. Comhaire que l'introduction du fer et du bronze se serait faite dans notre pays par le nord-est, progressant du nord au sud, depuis la vallée de la Drenthe et les bruyères de la Campine jusqu'aux riches nécropoles de la Marne, de l'Aisne et de la Seine, pour atteindre, en dernier lieu, l'Helvétie dans les stations de la Tène, il n'en est pas moins acquis que les nécropoles du canton de Wavre, et en particulier Court-Saint-Étienne, ont constitué un important chaînon intermédiaire. Peut-être, à une époque où le régime de nos eaux était plus abondant, faut-il y chercher le point d'embarquement et de débarquement pour les caravanes qui devaient emprunter la voie de terre entre le bassin de l'Escaut et celui de la Meuse.

A la différence de ce qui a été observé à la Quenique, je n'ai recueilli aux abords des tertres que peu de silex travaillés. Les dépôts funéraires ne m'en ont pas fourni davantage, sauf un petit broyeur ayant subi l'action du feu et quelques fragments de grès ayant pu servir de polissoir, ainsi qu'une molette assez curieuse, en forme de demi-lune ; — tous objets qui étaient encore en usage au premier âge du fer.

En dehors des tombelles, près de la crête de la vallée de l'Orne, mes ouvriers ont mis à découvert dans le sable une sépulture à inhumation. Le squelette, dont les os étaient malheureusement en fort mauvais état, gisait à 80 centimètres de profondeur, dans une fosse dont les parois étaient protégées par des dalles irrégulières de schiste placées verticalement (1). L'orientation de la fosse

---

(1) Les ossements que j'ai pu recueillir ont été déterminés de la sorte par M. De Pauw : « crâne, humérus, vertèbres, os iliaque, fémur, tibia, péroné, phalangines, phalangettes (âgé). »

se rapprochait du nord-est au sud-ouest, les pieds vers le nord-est. S'il pouvait être admis qu'il y a là une sépulture de l'époque marnienne, ce serait un anneau de plus dans la chaîne des civilisations qui se sont succédé sur le plateau de la Quenique.

Enfin, sous l'extrémité occidentale du plateau, là où il s'abaisse vers la vallée de la Dyle, j'ai recueilli plusieurs fragments de vases fabriqués au tour, d'une pâte claire et fine, à rebord arrondi, qui rappellent les *tèles* romaines, ainsi qu'un beau polissoir de grès, offrant sur une face de profondes rainures coniques et, sur l'autre, une surface polie et concave qui a servi de meule ; — alors qu'à l'extrémité orientale, sous l'éperon rocheux qui descend de la Quenique dans la vallée de l'Orne, il a été découvert une grande meule, en arkose, incontestablement de l'époque gallo-romaine (fig. 5).

Fig. 5. — Meule gallo-romaine (réduit au $^1/_7$).

Bibliographie de la Quenique.

JULES TARLIER et ALPHONSE WAUTERS, La Belgique ancienne et moderne : *Géographie et histoire des communes belges*. Fascicule du canton de Wavre, p. 128. Bruxelles, 1864.

Dr NORBERT CLOQUET, *Cimetière celtique de Court-Saint-Étienne*, dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ ARCHÉOLOGIQUE DE L'ARRONDISSEMENT DE NIVELLES, t. II (1882), p. 32 (avec planches). — *Correspondance avec M. Schuermans concernant le cimetière celtique de Court-Saint-Étienne* (ID., t. III, p. 59.) — *Nouvelle communication concernant le cimetière celtique de Court-Saint-Étienne*. (ID., t. III, p. 78.) — *Excursion dans les vallées de la Dyle et de la Lasne*. (ID., t. IV.)

Baron DE LOË. *Les tombelles des environs de Wavre et de Court-Saint-Étienne*, dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ D'ARCHÉOLOGIE DE BRUXELLES. Bruxelles, t. V. (1891), p. 222. — *Excursion à Court-Saint-Étienne*, dans le COMPTE RENDU DE LA SEPTIÈME SESSION DE LA FÉDÉRATION ARCHÉOLOGIQUE ET HISTORIQUE, p. 517. Bruxelles, 1892. — (En tiré à part sous le titre : *Fouille d'une tombelle au plateau de la Quenique*.)

CHARLES-J. COMHAIRE, *Les premiers âges du métal dans les bassins de la Meuse et de l'Escaut*, vol. in-8° de 133 pages avec 17 planches et 3 gravures. Bruxelles, 1894.

LOUIS GALESLOOT, *Une excursion archéologique à Court-Saint-Étienne*, dans les ANNALES DE LA SOC. ARCH. DE NIVELLES, t. III, pp. 291-297.

Comte GOBLET D'ALVIELLA, *Silex néolithiques et paléolithiques de Court-Saint-Étienne*, dans les BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE (Classe des sciences), 3e sér., t. XXXIII (1897), avec planches. — *Bulletin de la Société d'anthropologie de Bruxelles*, t. XXII, pl. II. — *Annales de la Soc. d'archéol. de Bruxelles*, t. XIV, p. 289.

Sur les réactions du chlorure mercurique avec les acides organiques (1); par MM. Oechsner de Coninck et Dautry.

Nous avons repris l'étude d'une réaction indiquée par E. Becquerel et Marchand, entre le chlorure mercurique et l'acide oxalique; à la suite d'essais préliminaires, nous avons cru devoir modifier les proportions respectives du sel, de l'acide et de l'eau, primitivement adoptées par ces auteurs. Nous avons pris :

Eau	1 litre
Chlorure mercurique	6gr6
Acide oxalique pur	1gr6

Les liqueurs ont été exposées à la grande lumière pendant deux heures, quatre heures, six heures et huit heures.

Dans ces différentes expériences, nous avons toujours vu se former un précipité de chlorure mercureux dont le poids variait de 0gr05 à 0gr14.

Si, conformément aux recommandations de Marchand, l'on dissout 6gr5 de chlorure mercurique et 1gr58 d'acide oxalique dans 100 grammes d'eau, et qu'on expose les liqueurs à la lumière, on voit se former bientôt un préci-

(1) Institut de chimie, Montpellier.

pité de chlorure mercureux. Marchand a obtenu les résultats suivants :

	Précipité :
Exposition de 1 h.	0gr460
— de 2 h.	0gr614
— de 3 h.	0gr727
— de 4 h.	0gr899

Dans des conditions de temps identiques, nous avons obtenu des précipités dont les poids représentaient environ les $^4/_5$ des poids mesurés par Marchand.

Nous avons dû arrêter nos expériences, à cause des pluies torrentielles de l'automne, et, pour les journées sans pluie, à cause de la proportion inusitée de vapeur d'eau répandue dans les couches moyennes et supérieures de l'atmosphère de notre région.

Action de l'acide malonique. — Dans 1 litre d'eau, nous avons dissous 6gr6 de chlorure mercurique et 1gr83 d'acide malonique pur; la liqueur a été exposée à la lumière; or, *ce n'est que vers le douzième jour* que nous avons vu apparaître un précipité très faible, en grains extrêmement fins, de chlorure mercureux. Ce précipité n'a que très peu augmenté dans les quinze jours qui ont suivi.

Ce résultat nous paraît digne d'être signalé, car il fait ressortir *un caractère différentiel nouveau entre l'acide malonique et l'acide oxalique.*

Montpellier, 26 décembre 1907.

—

Note sur le sélénium (1); par MM. Oechsner de Coninck et Raynaud.

Dans une note présentée à l'Académie royale (séance d'avril 1907), nous avons montré que lors de la précipitation de l'acide sélénieux par l'acide sulfureux, il se produit une variété cristalline et une variété amorphe de sélénium. Nous avons abandonné ces deux variétés à l'action prolongée des radiations solaires. Après sept mois d'exposition, nous avons remarqué que la variété cristalline s'était agglomérée en une masse compacte, d'aspect métallique, dont la cassure laissait voir des cristaux parfaitement nets, doués d'un bel éclat.

Quant à la variété amorphe, elle avait subi, elle aussi, une agglomération sensible. Elle se présentait sous la forme de *feuillets amorphes, schisteux, flexibles, de couleur ardoisée, ternes et dépourvus d'éclat spécial.*

Montpellier, 26 décembre 1907.

ÉLECTIONS.

La Classe procède à l'élection de son directeur pour 1909; les suffrages se portent sur M. Deruyts.

M. le Paige, directeur sortant, après avoir remercié ses confrères de leur concours affectueux pendant l'exercice de son mandat, installe au fauteuil présidentiel M. Fraipont, lequel se fait l'organe de la Classe en remerciant M. le Paige pour l'autorité, la dignité et l'aménité avec lesquelles, dit-il, son prédécesseur a dirigé les travaux.

---

(1) Institut de chimie, Montpellier.

Je prends la présidence, ajoute-t-il, avec confiance, fort du concours et de la bienveillance de mes confrères. — (*Applaudissements.*)

OUVRAGES PRÉSENTES.

Ioteyko (*J.*) et *Kipiani* (*Varia*). Enquête scientifique sur les végétariens de Bruxelles. Leur résistance à la fatigue étudiée à l'ergographe; la durée de leurs réactions nerveuses; considérations énergétiques et sociales. Bruxelles, 1907; in-8° (77 p.).

Ioteyko (*J.*). Sur l'excitabilité des différents muscles. Bruxelles, 1907; extr. in-8°.

Van der Stricht (*O.*). La vitellogenèse et la deutoplasmolyse de l'œuf de chauve-souris. Lille, 1907; extr. in-8° (6 p.).

Godeaux (*Lucien*). Sur une surface du neuvième ordre. Paris, 1907; extr. in-8° (4 p.).

— Sur une extension à l'espace d'un théorème de Grassmann. Paris, 1907; extr. in-8° (4 p.).

— Note sur une transformation géométrique. Bruxelles, 1907; extr. in-8° (3 p.).

Dubois (*Eugène*). Note sur une nouvelle espèce de Cerf des argiles de la Campine : *Cervus Ertbornii*, n. sp. S. l. n. d.; in-8° (7 p., 1 pl.).

Stuyvaert (*M.*). Cinq études de géométrie analytique. Applications diverses de la théorie des matrices et de l'élimination. Gand, 1908; in-8° (VI-230 p.).

Schaeberle (*J. M.*). The effective surface-temperature of the Sun and the absolute temperature of space. Ann Arbor, 1907; extr. in-8° (2 p.).

Schaeberle (J. M.). — The probable origin and physical structure of our sideral and solar systems. Ann Arbor, 1907; extr. in-4° (2 p.).

WIESBADEN. *Nassauischer Verein für Naturkunde.* Jahrbücher, 60. Jahrgang, 1907.

FRIBOURG. *Naturforschende Gesellschaft.* Berichte, XV. Band, 1907.

LINDENBERG. *Königl. preuss. aeronautische Observatorium.* Ergebnisse der Arbeiten im Jahre 1906, Band II (Richard Assmann).

FRANCFORT-SUR-MAIN. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.* Bericht, 1907.

— Festschrift zur..... neuerbauten Museums, am 13 Oktober 1907.

—

Chauveau (A.). Discours à la séance publique annuelle de l'Académie des sciences de Paris, le 2 décembre 1907. Paris, 1907; extr. in-4° (29 p.).

Foveau de Courmelles. L'Année électrique, électrothérapique et radiographique. Revue annuelle des progrès électriques en 1907, 8e année. Paris, 1908; pet. in-8° (368 p.).

SÈVRES. *Comité international des Poids et Mesures.* Comptes rendus des séances de la quatrième Conférence générale, réunie à Paris en 1907. Paris, 1907; in-4°.

— Les récents progrès du système métrique. Rapport, par Ch.-Ed. Guillaume. Paris, 1907; in-4°.

—

LONDRES. *British Museum.* National antarctic Expedition 1901-1904. Natural history: Vol. I, Geology; II, Zoology; III, Zoology and Botany. 1907; 3 vol. in-4°.

—

DELFT. *Technische Hoogeschool.* De berekening, de bouw en het bedrijf van het Kabelnet der gemeente Amsterdam. Proefschrift... door Gérard de Gelder. 1907; in-8°.

— Mathematische und mikroskopisch-anatomische Studien über Blattstellungen nebst Betrachtungen über den Schalenbau der Miliolinen, von G. Van Iterson. Iéna, 1907; in-8°.

UTRECHT. *Laboratorium der Hoogeschool.* Onderzoekingen gedaan door Pekelharing en Zwaardemaker, 5de reeks, VIII. 1907.

—

Leyst (*Ernst*). Ueber Schätzung des Bewölkungsgrade. Moscou, 1906; extr. in-8° (51 p.).

— Ueber das Erdbeben von San-Francisco nach den Aufzeichnungen der Seismographen in Moskau. Moscou, 1906; extr. in-8° (6 p.).

— Luftelectrische Zerstreuung und Radioactivität in der Höhle Bin-Basch-Choba in der Krim. Moscou, 1906; extr. in-8° (10 p.).

— Meteorologische Beobachtungen in Moskau im Jahre 1903, 1904, 1905 und 1906 Moscou, 1906: extr. in-8°.

— Höfe um Sonne und Mond in Russland. Moscou, 1906; in-8° (109 p.).

Vecchi (*Emilio-Augusto*). Antonio Cabreira, noticia succinta da sua vida e obras. Lisbonne, 1907; in-8° (32 p.).

SAINT-PÉTERSBOURG. *Commission sismique permanente.* Comptes rendus des séances, t. II, 3e liv. 1907; in-4°.

BUCAREST. *Observatoire météorologique.* Buletinul lunar al Observatiunilor meteorologice din România (Stefan Hepites), Anul XV. 1906; in-4°.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — N° 2.

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 1er février 1908.

M. Julien Fraipont, directeur.

M. le chevalier Edmond Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. Éd. Van Beneden, C. Malaise, Ch. Van Bambeke, Alfr. Gilkinet, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, M. Mourlon, P. De Heen, C. le Paige, Léon Fredericq, J.-B. Masius, Neuberg, A. Lancaster, A. Jorissen, Ch. Francotte, Paul Pelseneer, Aug. Lameere, G. Cesàro, *membres;* A. Demoulin, A. Rutot, V. Willem et Alex. de Hemptinne, *correspondants.*

Les félicitations de la Classe sont adressées à M. Spring au sujet de son élection comme membre titulaire de la

Royal Institution of Great Britain, de Londres, à laquelle a appartenu notre regretté confrère J.-S. Stas et dont fait partie M. G. Van der Mensbrugghe.

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts envoie une requête de M. P.-J. Havet, de Louvain, sollicitant la faveur de pouvoir occuper une des tables belges de la Station zoologique de Naples. — Renvoi à MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq.

— La Classe accepte le dépôt dans les archives de l'Académie :

1° Par M. Ch. Lagrange, de quatre billets cachetés portant les dates suivantes (timbre postal) : 19, 20, 22 et 25 janvier 1908;

2° Par M. Th. De Donder, d'un billet cacheté portant la date du 16 janvier, et contenant neuf théorèmes sur les relations de quatre points et de cinq points.

— M. A. Boutquin envoie la troisième partie de son manuscrit : *Le monde physique. Les astres*, soumis au concours pour le Prix Mailly. — Renvoi aux commissaires nommés dans la séance du 11 janvier : MM. Terby, Lagrange et le Paige.

— Travaux renvoyés à l'examen :

1° *Contribution à l'étude méthodique des oxydases*. Travail de l'Institut Solvay. 2e memoire; par O. Dony-Hénault. — Commissaires : MM. Fredericq et Jorissen;

2° *Contribution à l'étude de l'assimilation du phosphore et de la chaux pendant la vie embryonnaire du poussin*; par E. Carpiaux. — Commissaires : MM. Jorissen, Fredericq et Malaise.

— Hommages d'ouvrages :

1° *Un grave problème. Une industrie humaine datant de l'époque oligocène. Comparaison des outils avec ceux des Tasmaniens actuels*; par A. Rutot;

2° *Mouvement de rotation d'un corps de forme variable*; par Henry Janne;

3° *Géométrie descriptive et géométrie cotée, classes de mathématiques A et B*; par Ernest Lebon.

— Remerciements.

RAPPORTS.

Il est donné lecture des rapports de MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq sur les requêtes de MM. Nolf, Lams, Julin et Lebrun sollicitant la faveur de pouvoir occuper les deux tables de la Station zoologique de Naples. — Renvoi à M. le Ministre des Sciences et des Arts.

Contribution à l'étude méthodique des oxydases; par O. Dony-Hénault.

Rapport de M. Léon Fredericq, premier commissaire.

« Dans un premier travail, inséré dans le *Bulletin* de la Classe des sciences (séance du 7 mai 1907), M. Dony-Hénault avait remis en doute l'existence dans les tissus

animaux d'*oxydases*, c'est-à-dire de ferments capables de réaliser l'oxydation du combustible organique au sein du protoplasme vivant. Il avait fait ressortir l'insuffisance des preuves sur lesquelles repose la notion de l'intervention d'enzymes spéciaux dans la combustion physiologique.

M. Dony-Hénault nous présente la suite de ses intéressantes recherches. Il a soumis à la même critique expérimentale l'action de la *laccase*, ce ferment végétal riche en manganèse qui est censé réaliser l'oxydation du latex dans la formation de la *laque d'Orient*. Il a étudié les conditions d'oxydation de l'hydroquinone par des laccases artificielles banales, obtenues par précipitation de mélanges de colloïdes et de sels. Ces expériences montrent que les principes non enzymatiques présents dans le latex des arbres à laque suffisent à réaliser l'oxydation des polyphénols. Il n'est donc pas nécessaire de faire intervenir ici, avec Bertrand, une fermentation oxydative.

Je n'hésite pas à proposer l'insertion de cet intéressant travail dans le *Bulletin* de la Classe. »

—

Rapport de M. A. Jorissen, deuxième commissaire.

« Le nouveau mémoire que M. Dony-Hénault présente à la Classe n'est pas seulement des plus intéressants au point de vue de la phytochimie. En exposant les nombreuses expériences dont les résultats l'ont amené à formuler une interprétation nouvelle des phénomènes d'oxydation attribués à l'intervention de la *laccase*, l'auteur a ajouté une série d'observations importantes à nos con-

naissances actuelles sur les ferments non organisés. Je me joins donc bien volontiers au savant premier commissaire pour proposer l'impression du travail de M. Dony-Hénault dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

—

Détermination du poids moléculaire de l'oxyde uraneux; par W. Oechsner de Coninck.

Rapport de M. W. Spring.

« L'auteur a complété les déterminations du poids moléculaire de l'oxyde uraneux qu'il a entreprises depuis quelques mois; il fait connaître les résultats obtenus en évitant la décomposition du chlorure d'uranyle par l'humidité de l'air. Ces résultats concordent bien entre eux et conduisent à la valeur moyenne de 270.26.

J'ai l'honneur de proposer l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

—

Sur l'âge des dépôts connus sous les noms de sable de Moll, d'argile de la Campine, de cailloux de quartz blanc, d'argile d'Andenne et de sable à facies marin, noté OM *dans la légende de la Carte géologique au 40,000e*; par A. Rutot. — Remerciements à l'auteur et impression dans les *Mémoires* in-4°.

—

De la volatilité dans les séries de « méthylation » des dérivés méthyliques $H_3C.X$; par Louis Henry, membre de l'Académie.

Les dérivés *méthyliques* $H_3C.X$ sont les plus simples parmi les composés carbonés fonctionnels, et leurs dérivés de *méthylation* successive

Mono-méthylés . . $H_3C.CH_2.X$ ou éthyliques,

Bi-méthylés . . . $\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH.X$ ou isopropyliques,

Tri-méthylés. . . $\left.\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \\ H_3C \end{matrix}\right\rangle C.X$ ou pseudo-butyliques

sont aussi les plus simples parmi les composés *polycarbonés;* ils en représentent divers types fondamentaux.

Il m'a paru qu'il serait intéressant d'en faire l'étude comparative au point de vue de la *volatilité*, en tenant compte tout à la fois de la nature des *radicaux* ou *groupements fonctionnels* X qu'ils renferment et du *degré de méthylation* auquel ils correspondent. Je jugeais cette étude propre à fournir des renseignements sur la nature moléculaire de ces composés méthyliques et la relation de celle-ci avec la nature des groupements fonctionnels X, X′, XX″, etc., des composés méthyliques primitifs.

On pourra s'assurer au cours de cette note qu'il en est effectivement ainsi.

Le *méthane*, H_4C, hydrocarbure fondamental, est le plus riche en hydrogène des hydrocarbures, et l'hydrogène est l'élément le plus volatil - Éb. - 253° et le moins lourd de toute la série des corps simples; c'est l'élément gazeux *par excellence* et la matière dans son plus grand état de ténuité.

Il s'ensuit que le *méthane* H_4C, Éb. - 164°, est la combinaison carbonée la plus volatile. Tout composé *monosubstitué* H_3C . X ou tout composé méthylique est, par conséquent, moins volatil que le méthane lui-même, pour le double motif que son poids moléculaire est plus considérable et qu'il renferme, à la place de l'atome H, un élément ou groupement moins volatil.

Cette proposition a la valeur d'un principe fondamental.

Toutes choses égales d'ailleurs, et notamment l'équivalence fonctionnelle des radicaux substituants ou fonctionnels X, l'élévation que détermine dans le point d'ébullition du méthane leur substitution à H est d'autant plus considérable que leur poids est lui-même plus considérable. Ainsi en est-il notamment des éthers haloïdes méthyliques H_3C . X. (Cl, Br, I.)

H_3C . H	P. M. 16.0	Éb. − 164°	Éb. absolu.
H_3C . Cl	50.5	− 23°	+ 141°
H_3C . Br	95.0	+ 6°	+ 170°
H_3C . I	142.0	+ 42°	+ 206°

Mis en regard de ceux qui représentent les poids moléculaires de ces divers composés, ces chiffres 141°, 170° et 206°, qui représentent l'élévation du point d'ébul-

lition du méthane primitif, H_4C, à la suite de la substitution halogénée, suffisent à démontrer que, si la question de la diminution de la *volatilité* est une question *gravimétrique*, elle ne l'est pas exclusivement et que la nature des éléments ou des radicaux fonctionnels y intervient aussi pour quelque chose.

On peut même d'ailleurs observer que des radicaux comparables, X et X', déterminent parfois dans la volatilité du méthane, par leur substitution à de l'hydrogène, des modifications extraordinaires, en apparence contradictoires et en discordance avec la différence de leurs poids respectifs.

Ainsi en est-il des radicaux - OH et - SH. Malgré le peu d'élévation de son poids, - OH = 17, l'*hydroxyle* détermine des combinaisons notablement moins volatiles que son correspondant sulfuré, l'*hydrosulfuryle* - SH, 33.

$H_3C - OH$	P. M. 32	Éb.	+ 66°
$H_3C - SH$	48		+ 6°

Je choisirai comme type de dérivé méthylique le chlorure de *méthyle* $H_3C . Cl$ Éb. - 23° et sa série de méthylation comme série type de composés poly-carbonés.

P. M. 50.5	$H_3C - Cl$	Éb.	- 23°		
				+ 34°	
64.5	$H_3C - CH_2 . Cl$	Éb.	11°		
				25°	
78.5	$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH . Cl$	Éb.	36°		
				16°	
92.5	$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \\ H_3C \end{matrix} > C . Cl$	Éb.	52°		

Les poids moléculaires vont en s'élevant, d'où, par une conséquence naturelle, une diminution graduelle de volatilité et une élévation progressive dans le point d'ébullition.

Les poids moléculaires constituent une progression arithmétique, chaque terme différant de son précédent par 14; mais cette addition constante, 14, représente une augmentation dans le poids moléculaire d'autant plus faible que celui-ci est plus considérable; de là tout naturellement des élévations dans les points d'ébullition successivement plus faibles, mais différant sensiblement de la même manière l'une de l'autre.

Éb.	− 23°		+ 11°		+ 36°		+ 52°
		34°		25°		16°
Différence :			9°		9°	

Cette régularité est bien digne de remarque.

On admet dans les hydrocarbures $C_n H_{2n+2}$ *liquides*, le même *état moléculaire* que dans les gaz; leur coefficient d'*association* est *nul*. Ce sont des composés *mono-* moléculaires.

Des déterminations fournies par des méthodes diverses et par divers observateurs, on peut admettre qu'il en est de même dans les éthers *haloïdes* simples $C_n H_{2n+1} . X$ et notamment dans les *éthers chlorhydriques* $C_n H_{2n+1} . Cl$; ou tout au moins, qu'à l'état liquide, ces corps sont très faiblement *associés*. Les effets de la méthylation successive du chlorure de méthyle $H_3C\text{-}Cl$ se présentent donc ici dans leur maximum de simplicité, ils se réduisent principalement à une simple question *gravimétrique*.

Des relations d'une tout autre nature se constatent dans la série de *méthylation* de l'alcool *méthylique* H_3C-OH, et c'est elle que je choisirai pour représenter le *second type* des séries de ces dérivés.

P. M.	32	$H_3C(OH)$	Éb. 66°	
	46	$H_3C-CH_2(OH)$	78°	+ 12°
	60	$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH(OH)$	82°	4°
	74	$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C- \\ H_3C \end{matrix} > C(OH)$	82°	± 0°

Diverses observations sont à faire quant à cette série. C'est d'abord que pour des majorations de poids moléculaires identiques à celles de la série précédente — 14 —, l'addition de CH_2 détermine des effets, sur la volatilité, fort différents des précédents, à savoir d'ordre fort inférieur et sensiblement nuls pour la troisième et dernière substitution méthylique.

S'il s'était agi d'une simple question *gravimétrique*, ces différences auraient dû être plus considérables que dans le groupe précédent, vu la différence des poids moléculaires des composés initiaux CH_3-Cl et CH_3-OH.

$H_3C.Cl$	P. M.	50.5
H_3C-OH		32.0

La nature du groupement substituant *hydroxyle* - OH doit être prise en considération. Si l'on se rappelle que ce groupement est un fragment de la molécule de l'eau,

il devient aisé de déterminer à quelle circonstance est due la différence dans le mode de variation de la volatilité dans les deux séries de ces combinaisons.

La formule H-O-H ne représente *moléculairement* l'eau qu'à l'état de vapeur, de désagrégation physique totale. A l'état *liquide*, l'eau est un composé fortement *associé* (*) et elle doit cet état au caractère positif si marqué de l'hydrogène, par lequel cet élément se range à côté des métaux proprement dits. Physiquement, l'eau est assimilable, dans une certaine mesure, aux « oxydes métalliques » qui ne nous sont connus que sous des formes fortement « associées » ou, comme on dit ordinairement, de « polymères ».

Le groupement *méthyle* H_3C - tire de la présence de l'hydrogène qu'il renferme, H_3 sur 15 ou 20 % de sa masse, son caractère *positif;* il l'est toutefois moins que l'hydrogène lui-même auquel il est *quantitativement* équivalent. De là dans l'*eau méthylée* H_3C - OH, c'est-à-dire l'alcool méthylique, un coefficient d'association physique moindre que dans l'eau elle-même. Le travail de désagrégation physique nécessité pour rompre l'association constituée par l'eau méthylée H_3C - OH est donc plus faible que celui nécessité par l'eau elle-même, et l'effort de chaleur moins intense; c'est-à-dire que, malgré la différence des masses mobilisées en fin de compte à l'état de vapeur, H - OH et H_3C - OH, l'alcool méthylique est plus volatil que l'eau elle-même : H - OH, Éb. 100°; H_3C . OH, Éb. 66°.

(*) Voir ma note : *Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique,* Année 1905, p. 377.

A mesure que l'hydrogène du radical *méthyle* H_3C - est successivement remplacé par le radical *méthyle* lui-même, le radical hydrocarboné associé à l'hydroxyle - OH devient de moins en moins riche en hydrogène, surtout atomiquement.

	Poids.	%
H_3C-	15°	20
H_3C-CH_2-	29°	17.24
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH-$	43°	16.27
$\left.\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \\ H_3C \end{matrix}\right\rangle C-$	57°	15.78
H_3C-	15°	20
H_2C-	14°	14.28
$HC<$	13°	7.69
$-\overset{\vert}{\underset{\vert}{C}}-$	12°	0

Le coefficient d'association diminue en même temps que la molécule simple, considérée dans sa vapeur, augmente de poids, deux circonstances qui agissent en sens contraire quant à l'effort de chaleur nécessaire pour amener une désagrégation moléculaire totale, mobiliser la molécule à l'état de vapeur, et de là s'expliquent d'eux-mêmes les chiffres 78°, 82° et 82° qui représentent respectivement les poids d'ébullition, sous la pression

ordinaire, des *alcools méthyliques mono-*, *bi-* et *tri-méthylé* (*).

Quoique constituant une molécule fortement associée, la molécule de l'alcool méthylique ou de l'eau *mono-méthylée*

$$H - O - H \qquad H . O . CH_3$$

l'est moins que la molécule de l'eau elle-même, et de là l'abaissement du point d'ébullition de l'eau à la suite de la substitution de $- CH_3$ à H.

H – OH	HO . CH_3
Éb. 100°	Éb. 66°

Différence : 34°

(*) Alcools.	Coefficient d'association.
$H_3C - (OH)$	3.43 Ramsay.
	3.33 Carrara et Ferrari.
	3.17 Longinescu.
	3.28 Vaubel.
$CH_3 - CH_2 - (OH)$	2.74 Ramsay.
	2.74 Vaubel.
	2.11 Longinescu.
$\left.\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\right\rangle CH . (OH)$	2.33 Vaubel.
	2.86 Ramsay.
$\left.\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\right\rangle C . (OH)$	1.934 Carrara et Ferrari.

La substitution du même radical $-CH_3$ à H dans l'hydroxyle - OH de l'alcool méthylique, en entraînant la disparition totale de l'hydrogène de la molécule H . O . H primitive, détermine une simplification moléculaire plus grande encore et, par conséquent, à la suite de la seconde substitution de CH_3, un abaissement de point d'ébullition plus considérable encore que le premier, malgré l'augmentation du poids moléculaire.

H . O . H	P. M. 18	Éb. 100°		
				- 34°
H . O . CH_3	32	66°		
				89°
CH_3 . O . CH_3	46	- 23°		

Mais la *méthylation* successive du radical H_3C - de l'éther méthylique $H_3C - OCH_3$ détermine dans la volatilité du produit primitif une modification du même ordre que dans le chlorure de méthyle H_3C - Cl.

$H_3C - (OCH_3)$	P. M. 46	Éb. - 23°	
			+ 34°
$H_3C - CH_2 - (OCH_3)$	60	+ 11°	
			21°
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - (OCH_3)$	74	+ 32°	
			+ 22°
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C - \\ H_3C \end{matrix} > C - (OCH_3)$	88	+ 54°	

Le groupement - SH est en une certaine façon équivalent à - OH. Toutefois, l'état moléculaire de H . SH est totalement différent de l'état moléculaire de l'eau H . OH. H . SH peut être regardé comme un type de composé *mono-moléculaire* ou du moins très faiblement associé;

aussi la méthylation détermine-t-elle des effets absolument contraires dans H . SH, dans l'eau H . OH et dans leurs dérivés méthylés.

Méthylation de H . SH.

H . SH	P. M. 34	Éb. − 65°		69°
CH_3 . SH	48	+ 6°		+ 31°
CH_3 . S . CH_3	62	+ 37°		

Méthylation dans CH_3 *de* H_3C . SH.

H_3C − SH	P. M. 48	Éb. + 6°	30°
H_3C − CH_2 − SH	62	+ 36°	20°
H_3C / H_2C > CH − SH	76	+ 56°	10°
H_3C / H_3C — > C . SH / H_3C		66°	

La méthylation du mercaptan méthylique H_3C - SH détermine dans la volatilité des effets analogues à ceux qu'elle détermine dans le chlorure de méthyle CH_3 . Cl.

H − Cl	Éb. − 83°	+ 60°
CH_3 . Cl	− 23°	
H . SH	Éb. − 63°	+ 69°
CH_3 . SH	+ 6°	

Au type *chlorure* de méthyle $H_3C - Cl$ se rattachent :

a) Les séries de méthylation de *bromure* $H_3C . Br$ et *iodure* $H_3C - I$ de méthyle.

	Bromures.		Iodures.	
$H_3C - X$	Éb. + 5°	34°	Éb. 43°	29°
$H_3C - CH_2X$	39°	20°	72°	17°
$(H_3C)_2CHX$	59°	13°	89°	10°
$(H_3C)_3CX$	72°		99°	

Les différences déterminées par la méthylation successive du groupement primitif $H_3C -$ étaient respectivement pour les éthers chlorhydriques 34°, 25° et 16°. On remarquera que ces différences vont en diminuant, du moins pour la seconde et la troisième, à mesure que les poids moléculaires vont en augmentant.

b) Les séries de méthylation des éthers simples, $H_3C - (O\ CH_3)$ que j'ai déjà mentionné plus haut, éthylique, propylique, etc.

	Dérivés $- OC_2H_5$		Dérivés $O - C_3H_7n$	
$H_3C - OC_nH_{2n+1}$	Éb. 11°	24°	Éb. 39°	25°
$H_3C - CH_2 - O -$	35°	19°	64°	15°
$(H_3C)_2 - CH - O -$	54°	18°	79°	16°
$(H_3C)_3 - C -$	72°		95°	

Mêmes remarques que précédemment. On observera que, de même que dans les dérivés hydroxylés, les diffé-

rences sont sensiblement les mêmes pour la seconde et la troisième méthylation.

c) Les éthers des acides gras et notamment les acétates $-O.CO-CH_3$.

$CH_3-O.Ac$	Éb.	57°	20°
CH_3-CH_2-O-		77°	11°
$(CH_3)_2-CH-O-$		88°	8°
$(CH_3)_3-C-O-$		96°	

d) Les éthers *nitreux* (*).

$H_3C-O-NO$	Éb.	−12°	+ 29°
H_3C-CH_2-O-		17°	+ 22°
$(H_3C)_2CH-O$		39°	+ 23°
$(H_3C)_3C-O$		62°	

(*) La série de méthylation du nitro-méthane H_3C-NO_2 paraît occuper une place à part. Il est regrettable que le point d'ébullition du nitro-isopropane $(CH_3)_2CH.NO_2$ ne soit pas déterminé avec plus de précision et de certitude.

H_3C-NO_2	Éb.	102°
H_3C-CH_2-		114°
$(H_3C)_2-CH-$		115°-118°
$(H_3C)-C-$		126°

On peut rattacher aux dérivés méthyliques proprement dits H_3C . X deux groupes de composés bi-carbonés :

a) L'*éthane* $H_3C - CH_3$ ou le méthylure de méthyle;

b) L'*acétonitrile* $H_3C - CN$ ou le *cyanure de méthyle.*

La série de *méthylation* de l'éthane dans un des groupements $- CH_3$ exclusivement, se rattache, quant à la volatilité relative, au type du *chlorure de méthyle* $H_3C - Cl$.

$H_3C - (CH_3)$	Éb. $-90°$	$+45°$
$H_3C - CH_2 - (CH_3)$	$-45°$	$+35°$
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} CH - CH_3$	$-10°5$ (*)	$+19°$
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \\ H_3C \end{matrix} > C - CH_3$	$+9°$	

On sait que les paraffines, à l'état liquide, sont moléculairement assimilables aux gaz proprement dits.

Des relations d'une autre nature s'observent dans la série de méthylation de l'*acétonitrile* $H_3C - CN$.

$H_3C - CN$	Éb. $82°$	$16°$
$H_3C - CH_2 - CN$	$98°$	$10°$
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - CN$	$107°$-$108°$	$\pm 0°$
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \\ H_3C \end{matrix} > C - CN$	$105°$-$106°$	

(*) Détermination de M. Paul Lebeau. Communication particulière.

On observe ici des rapports de volatilité du même genre que dans la série des dérivés hydroxylés renfermant le groupement H_2C - OH, et pour la même raison.

Le méthane azoté HC ≡ N ou l'acide cyanhydrique est comme le *méthane mono-hydroxylé* H_3C - OH ou l'alcool méthylique un composé *grandement associé* à l'état liquide.

	Coefficient d'association.
H_3C . OH	3.17
HCN	6.0
	(Longinescu)

La disparition de l'hydrogène fixé sur - CN ou de l'hydrogène de - CH_3 et son remplacement par - CH_3 lui-même déterminent une simplification moléculaire et la diminution du « coefficient d'association moléculaire ».

CH_3 – CN	3.17
CH_3 – CH_2 - CN	2.33
	(Longinescu)

Le poids des groupements poly-moléculaires à désagréger diminue donc à mesure que, par suite de la méthylation successive, le poids des molécules elles-mêmes augmente, et de là vient que le point d'ébullition de $(CH_3)_3C$ - CN peut être sensiblement le même que celui de $(CH_3)_2CH$ - CN.

La disparition totale de l'hydrogène dans l'acétonitrile H_3C - CN et son remplacement par N déterminent aussi

un abaissement dans le coefficient d' « association moléculaire »

$H_3C - CN$	3.17	
$NC - CN$	2	(Longinescu)
$NC - CN$	1.11	(Vaubel)

et de là les rapports de volatilité « extraordinaires » que l'on constate entre l'*éthane* $H_3C - CH_3$ et ses dérivés successifs de substitution azotée.

$H_3C - CH_3$	Éb. $-90°$
$H_3C - CN$	$+82°$
$NC - CN$	Gaz Éb. $-20°$

Si l'on tient compte de ce fait que les combinaisons chlorées du carbone ne sont pas ou faiblement associées à l'état liquide

CCl_4	1.00	Ramsay, Eötvös, Traube
	1.47	et Vaubel,

on s'explique que les dérivés chlorés de l'*alcool éthylique* et de l'*acétonitrile*, de même que les dérivés de la méthylation successive de ces corps dans $- CH_3$, manifestent des rapports étranges dans leur volatilité relative, surtout dans les deux derniers termes.

Alcools chlorés.

$H_3C - CH_2(OH)$	Éb. 78°	
		+ 52°
$ClCH_2 - CH_2(OH)$	130°	
		+ 16°
$Cl_2CH - CH_2(OH)$	146°	
		+ 6°
$Cl_3C - CH_2(OH)$	152°	

Nitriles chlorés.

$H_3C - CN$	Éb. 82°	
		+ 42°
$ClCH_2 - CN$	124°	
		− 12°
$Cl_2CH - CN$	112°	
		− 28°
$Cl_3C - CN$	84°	

Pour donner à ce fait toute sa valeur, il est utile de rappeler comment s'élèvent les points d'ébullition dans la série de chloruration d'un des groupements - CH_3, de l'éthane et du chlorure d'éthyle.

Éthane $CH_3 - CH_3$.			Chlorure d'éthyle CH_3-CH_2Cl.		
CH_3-CH_3	Éb. −90°		CH_3-CH_2Cl	Éb. +12°	
		+102°			72°
CH_2Cl-CH_3	+12°		CH_2Cl-CH_2Cl	84°	
		48°			30°
$CHCl_2-CH_3$	60°		$CHCl_2-CH_2Cl$	114°	
		15°			21°
CCl_3-CH_3	75°		CCl_3-CH_2Cl	135°	

—

Action des courants alternatifs de haute fréquence sur la germination; par H. Micheels et P. De Heen.

Au point de vue de la physiologie humaine, les courants alternatifs, qui varient suivant la loi sinusoïdale, présentent des particularités curieuses. Lorsqu'ils ne montrent qu'une faible alternativité, ils n'affectent guère le système nerveux. Pour un certain accroissement des fréquences, ils deviennent dangereux; puis, à partir d'un nombre plus élevé de périodes, ils regagnent leur innocuité. C'est ainsi que l'on peut, sans danger, soumettre le corps humain à l'action du courant de Tesla, présentant des millions de fréquences par seconde et capable d'allumer une lampe à incandescence ordinaire. On a tenté d'expliquer ce fait. On a supposé que ces courants de haute fréquence ne traversaient pas le corps humain ou, du moins, ne le traversaient pas avec toute leur intensité, mais qu'ils le contournaient complètement ou partiellement. Cette interprétation a été combattue par Nernst et par d'Arsonval. D'après De Heen, cette manifestation serait due à l'oscillation électrique ou longitudinale et non à l'oscillation électro-magnétique ou transversale.

Nernst (1) a cherché à établir une relation entre le nombre de fréquences d'un courant alternatif et son

---

(1) *Nachrichten von d. Königl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen. Math.-physik.* Kl., 1899, Heft I, p. 104, et *Zeitschr. für Elektrochemie*, 1904, p. 664.

action physiologique. Par diverses considérations théoriques et aussi en s'appuyant sur les recherches d'Ostwald concernant les propriétés électriques des membranes semi-perméables (1), Nernst a proposé la formule $J = \sqrt{N.\ C}$, dans laquelle J représente l'intensité du courant alternatif, N le nombre de fréquences dans l'unité de temps et C une constante. Elle se traduit par cette loi très simple : L'intensité d'un courant alternatif produisant un effet physiologique déterminé est proportionnelle à la racine carrée du nombre des fréquences.

Dans un travail récent, E. Reiss (2) a vérifié cette loi par des mesures précises. Il avait étudié, dans ce but, l'action excitatrice que produisent les courants alternatifs dans des nerfs moteurs de grenouilles et des nerfs sensitifs humains (extrémités digitales de l'opérateur), ainsi que l'excitation directe de muscles de grenouilles curarisées et de plantes (Sensitives). La formule de Nernst, vérifiée pour les tissus animaux, est probablement applicable aussi aux tissus végétaux. E. Reiss a pu dire avec raison que si la formule de Nernst est exacte, elle doit être vraie pour tout tissu vivant, mais la démonstration pour les Sensitives n'est pas complète.

Il nous faut ajouter que certains auteurs n'admettaient pas l'exactitude de la loi de Nernst et que d'autres for-

---

(1) W. Ostwald, *Elektrische Eigenschaften halbdurchlässiger Scheidewände* (Zeitschrift für physikalische Chemie, Bd 6, p. 71, 1890.)

(2) E. Reiss. *Die elektrische Reizung mit Wechselströmen.* (Archiv für die gesammte Physiologie, vol. 107, p. 578, 1907.) Voir aussi *Versuche zum Gesetz der Wirkung des Wechselstromes auf organisierte Gewebe.* (Zeitschrift für Elektrochemie, 1907. n° 30, p. 474.)

mules avaient été proposées. C'est dire l'importance du travail de E. Reiss.

Dans les recherches que nous avons entreprises concernant l'action des courants alternatifs de haute fréquence sur la germination, et dont nous présentons ici les premiers résultats, nous ne nous sommes pas préoccupés de la mesure des fréquences.

Nous avons fait usage d'un dispositif fort analogue à celui dont s'est servi Gustave Le Bon (1) pour montrer le passage, à travers des obstacles matériels, des éléments provenant de la dématérialisation de la matière.

Une grande bobine d'induction était reliée à la prise de courant de la ville (de Liége) par un interrupteur à mercure, mû au moyen d'une petite dynamo qui marchait, chaque jour, de neuf heures du matin à six heures du soir. Les pôles de cette bobine étaient mis en communication avec les armatures internes de deux grandes bouteilles de Leyde, et ces armatures portaient deux tiges en laiton, à boules, entre lesquelles se faisait la décharge. Les armatures externes étaient rattachées, par un fil de cuivre, à un petit solénoïde en cuivre et celui-ci à un autre, plus grand, à fil d'acier.

Les matériaux d'études (graines de Pois et de Froment) étaient déposés sur un tamis à larges mailles reposant sur une solution nutritive contenue dans un vase de Berlin.

Au-dessus des graines se trouvait un disque d'aluminium; au fond des vases, une lame de platine. Dans un

---

(1) G. Le Bon, *L'évolution de la matière*. Paris, Flammarion, p. 374.

vase, le disque d'aluminium était relié au grand solénoïde, tandis que la lame de platine était reliée à la terre. Un autre vase servait de témoin; son disque d'aluminium et sa lame de platine restaient libres.

Transcrivons deux protocoles d'expériences.

Expérience A.

Matériaux d'études : *Froment.*

Durée de l'expérience : Du 25 juin au 6 juillet 1907.

Les grains ont été trempés au préalable dans l'eau distillée pendant vingt-quatre heures.

	Graines soumises au courant	Graines non soumises au courant
	—	—
Nombre de germination (%)	70	80
Longueur moyenne de la première feuille (en millim.)	145	130
Longueur moyenne des racines (en millim.)	115	50

L'influence favorisante est surtout marquée par le développement des racines.

Expérience B.

Matériaux d'études : *Pois.*

Durée de l'expérience : Du 29 avril au 23 mai 1907.

Les graines ont été trempées au préalable dans l'eau distillée pendant vingt-quatre heures.

	Graines soumises au courant	Graines non soumises au courant
Nombre de germination (%) . . .	100	100
Longueur moyenne des hypocotyles (en millim.)	33	30
Longueur moyenne de la racine principale (en millim.).	116	84

Pour les Pois, les racines sont encore manifestement plus grandes dans les germinations soumises au courant. Dans le liquide de culture, il s'est produit, sous l'influence du courant, une clarification que l'on ne constate pas dans le vase témoin. Dans celui-ci, on observe des moisissures et des phénomènes de putréfaction.

Nous devons conclure ici aussi à l'action favorisante du courant de haute fréquence.

Pierre Lesage (1) a étudié tout récemment les modifications que peuvent subir, dans un solénoïde parcouru par des courants de haute fréquence, la germination des spores de *Penicillium* et la croissance du tube mycélien qui en dérive. Dans le champ, la germination et la croissance étaient accélérées, mais une vérification attentive aurait montré que ce résultat était dû à un léger échauffement du fil du solénoïde.

Dans les expériences que nous avons effectuées, cette cause d'erreur, par suite du dispositif employé, ne pouvait se présenter. Il nous faut donc attribuer l'action favorisante que nous avons constatée au seul courant alternatif.

Institut de physique de l'Université de Liége.

---

(1) P. Lesage, *Action du champ magnétique de haute fréquence sur le Penicillium*. (Comptes rendus, 16 décembre 1907.)

Assemblages sphériques; par G. Cesàro, membre de l'Académie, professeur à l'Université de Liége.

« *En juxtaposant un* GRAND NOMBRE *de petites sphères* » *égales peut-on obtenir un ensemble à aspect sphérique?* »

Cette intéressante question m'a été posée par mon savant collègue et ami, M. Dwelshauvers-Dery, professeur émérite à l'Université de Liége.

Le problème peut être envisagé de plusieurs manières.

* * *

a) Sans nous inquiéter de l'arrangement interne de l'assemblage, considérons la couche de petites sphères par laquelle il se termine; d'après l'énoncé de la question, chaque petite sphère y doit être tangente à celles qui l'entourent et, en outre, la couche doit avoir pour enveloppe extérieure une sphère, qui est celle donnant la forme sphérique à l'assemblage. De sorte que la question est ramenée (*) à celle-ci :

« *Peut-on construire une couche de petites sphères égales,* » *de rayon* a, *répondant aux conditions suivantes* :

» 1° *Chaque petite sphère est tangente à toutes celles qui* » *l'entourent dans la couche;*

(*) Dans le cas d'une réponse affirmative à cette première question, il faudra encore s'occuper de la possibilité du remplissage du vide interne en suivant les prescriptions de l'énoncé.

» 2° *La couche a pour enveloppe externe une surface* » *sphérique idéale de rayon* R? »

Pour essayer de réaliser l'assemblage, imaginons que la sphère idéale de rayon R soit remplacée par une sphère réelle, vide, que nous allons essayer de tapisser de petites sphères de rayon a, en obéissant à la première condition énoncée ci-dessus.

A cet effet (fig. 1), plaçons en A_0 une petite sphère de centre C_0, puis essayons de placer tout autour d'elle une suite de petites sphères, tangentes à celle-ci, au contact de

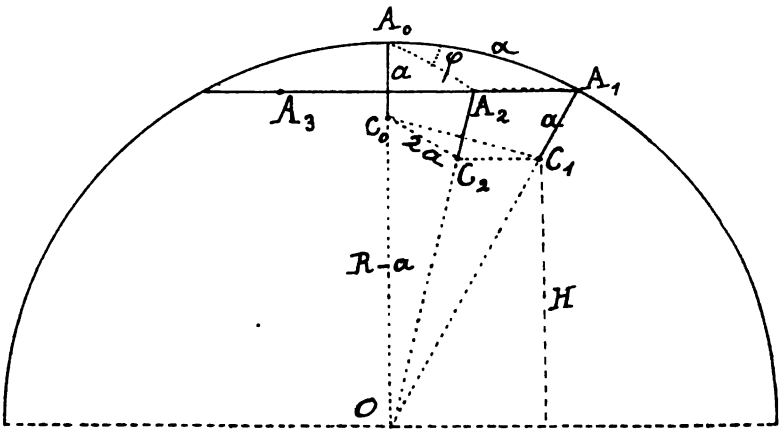


Fig. 1.

la sphère R et se touchant successivement deux à deux entre elles. Soient A_1, A_2, A_3... les points de contact de ces différentes sphères avec l'enveloppe, points qui sont donc situés sur un parallèle de pôle A_0 et dont nous désignons l'intervalle par α; C_1, C_2, C_3... étant leurs

centres, le triangle $C_0 C_1 C_2$ sera équilatéral et aura pour côté $2a$.

Cherchons quelles sont, pour une certaine valeur de a, les valeurs de R qui permettent de réussir cette opération : pour qu'elle soit possible, *il faut que l'angle* φ *du triangle* $A_2 A_0 A_1$ *soit de la forme* $\frac{2\pi}{n}$, n *étant un entier;* dans ce cas seulement, on pourra placer n petites sphères autour de la sphère centrale. Le calcul de l'angle φ revient à celui du dièdre de l'arête culminante d'une pyramide régulière de côté $R - a$ et ayant pour base un triangle équilatéral de côté $2a$. On a d'abord

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{R - a},$$

puis

$$2\cos\varphi = 1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{a^2}{R(R - 2a)},$$

ou, en posant

$$\cos\varphi = y, \qquad \frac{R}{a} = x,$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x(x-2)}. \tag{1}$$

La figure 2 représente la branche utile (*) de la courbe

(*) Une seconde branche, symétrique par rapport à la droite $x = 1$, a pour asymptotes $x = 0$ et $x = 2$ et présente un minimum en $(x = 1, y = 1)$; les valeurs de y sont donc > 1 et correspondent à des valeurs de φ imaginaires.

représentée par l'équation (1). On voit que y est compris

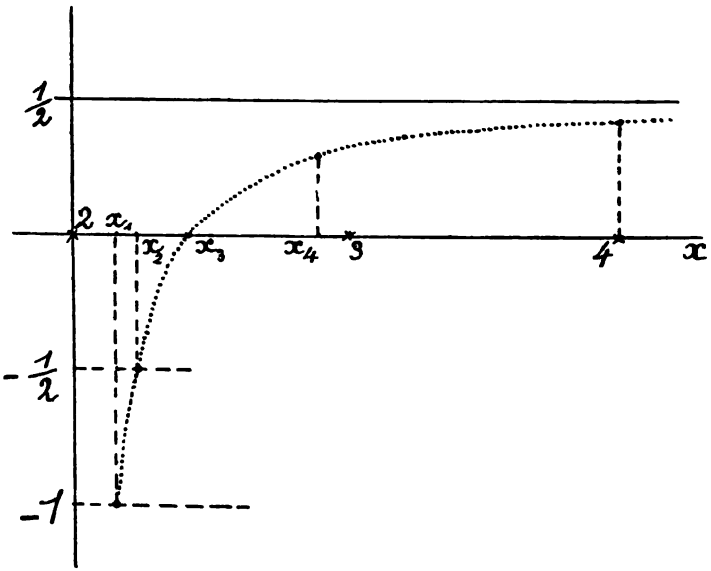


Fig. 2.

entre -1 et $1/2$, cette dernière valeur correspondant à $x = \infty$; or, de

$$-1 \leqq \cos\varphi \leqq \tfrac{1}{2},$$

on déduit

$$\frac{2\pi}{2} \geqq \frac{2\pi}{n} \geqq \frac{2\pi}{6},$$

ou

$$n = 2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ ou } 6.$$

La plus grande valeur finie de x, correspondante à $n = 5$, $\varphi = 72°$, déduite de la formule

$$x = 1 + \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - 2 \cos \varphi}},$$

est

$$x_1 = 2{,}9021\,;$$

et l'on voit qu'entre $R = 2{,}9021\,a$ et $R = \infty$, il n'y a pas de solutions, de sorte qu'en excluant le cas extrême $R = \infty$ correspondant à une enveloppe plane (une petite sphère entourée par six autres), on peut dire que *non seulement il n'existe pas d'assemblage sphérique dont le rayon est très grand par rapport à celui des sphères qui le composent, mais que l'assemblage le plus volumineux n'a pas même un rayon triple de celui de la sphère élémentaire.* Les seules solutions qui puissent donner naissance à des couches sphériques sont donc :

n	φ	$x = \frac{R}{a}$	α
2	180°	$1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 2{,}1547.$	120°
3	120°	$1 + \frac{\sqrt{6}}{2} = 2{,}2247.$	$\cos \alpha = -\frac{1}{3}.$
4	90°	$1 + \sqrt{2} = 2{,}4142.$	90°
5	72°	$1 + 2 \cos 18° = 2{,}9021.$	$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$
6	60°	∞	0°

*
* *

Avant d'examiner si les constructions données par les solutions ci-dessus peuvent se continuer tout autour de manière à tapisser complètement la sphère R, observons que l'on peut se faire une idée très nette de la variation du nombre de petites sphères tangentes avec le rayon de l'enveloppe, en opérant comme il suit :

Plaçons sur une table une feuille métallique plane, à laquelle, en relevant les bords, nous pourrons donner une forme sphérique de plus en plus accentuée. Déposons sur la feuille une petite sphère puis, tout autour, *six* petites sphères tangentes entre elles et à la première; les points de contact des six sphères avec la sphère centrale se trouveront sur le grand cercle horizontal de celle-ci, en y occupant les sommets d'un hexagone régulier inscrit. Ce cas correspond à $R = \infty$. Relevons à présent tout autour les bords de la feuille de manière à faire diminuer lentement R; les sphères latérales montent sur la sphère centrale et, depuis $R = \infty$ jusqu'à $R = 2{,}9021a$, l'arrangement devient impossible, *six* sphères étant de trop et *cinq* en trop petit nombre pour se grouper autour du cercle des contacts qui monte parallèlement à lui-même tout en diminuant de grandeur; ce n'est qu'au moment ou R atteint la valeur $2{,}9021a$ que l'arrangement devient possible pour *cinq* sphères qui touchent la sphère centrale suivant un certain parallèle sur lequel les contacts occupent les sommets d'un pentagone régulier y inscrit. En continuant à relever les bords de la feuille les sphères latérales montent toujours et, tant que R n'a pas atteint $2{,}41a$, il y aura trop de cinq sphères et trop peu de quatre pour entourer la sphère centrale; au moment où $R = 2{,}41a$ l'arrangement devient possible

pour *quatre* sphères. Jusqu'à $R = 2,22a$ nouvelle impossibilité, mais pour cette valeur *trois* sphères latérales deviennent possibles. Après une nouvelle impossibilité, on obtient *deux* sphères latérales pour $R = 2,15a$ et, enfin, lorsque $R = 2a$, le parallèle des contacts se réduit à un point, et l'on obtient *une* seule sphère placée d'aplomb sur la sphère centrale.

Il est à observer que la dernière solution ne nous a pas été donnée par le calcul, parce que pour l'obtention de la formule nous avons supposé implicitement qu'il y avait au moins deux sphères latérales.

* * *

Construction des couches sphériques possibles. — En laissant de côté le cas de l'enveloppe plane, considérons les quatre solutions consignées dans le tableau de la page 91.

1° $n = 2$, $\varphi = 180°$, $R = 2,1547a$, $\alpha = 120°$.

On obtient (fig. 3) une sorte de trèfle formé par trois

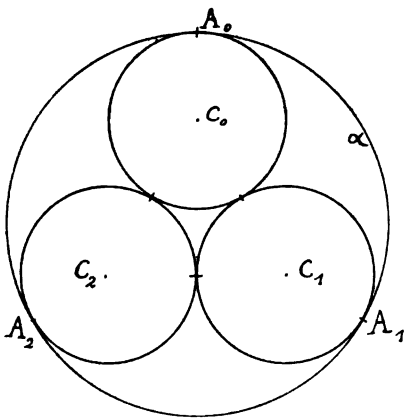


FIG. 3.

sphères dont les centres C_0, C_1, C_2 sont situés dans un plan méridien de la sphère enveloppe.

2° $n = 3$, $\varphi = 120°$, $R = 2{,}2247a$, $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

On obtient (fig. 4) quatre sphères formant une pile tétraédrique régulière. Les projections des six contacts

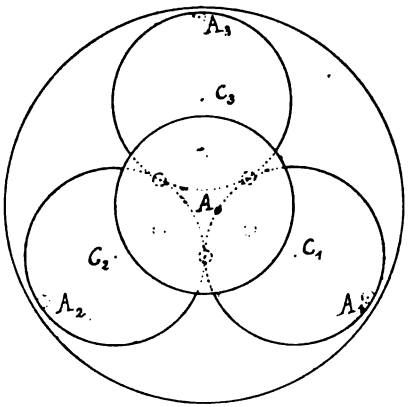


FIG. 4.

mutuels de ces quatre sphères sur le grand cercle de pôle A_0 forment un hexagone régulier; le contact A_1 d'une petite sphère avec l'enveloppe s'obtient en observant (fig. 1) que la projection de OA_1 sur le plan dont il s'agit est R sin α.

3° $n = 4$, $\varphi = 90°$, $R = 2{,}4142a$, $\alpha = 90°$.

On obtient (fig. 5) cinq sphères; les contacts A_1, A_2, A_3, A_4 sont les sommets d'un carré inscrit dans le grand

cercle de la sphère enveloppe qui a pour pôle A_0. On voit immédiatement qu'en plaçant une sixième sphère dans le creux inférieur formé par l'assemblage $C_1C_2C_3C_4$, la couche se trouve complétée et la sphère R entière-

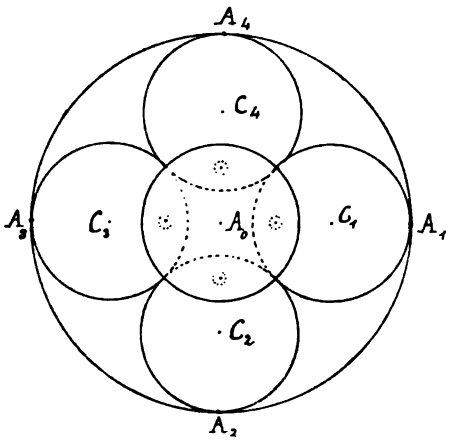


FIG. 5.

ment tapissée par six sphères dont les contacts sont les sommets de l'octaèdre régulier inscrit.

4° $n = 5$, $\varphi = 72°$, $R = 2{,}9021a$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Une sphère entourée de cinq autres (fig. 6) dont les centres dessinent un pentagone régulier $C_1C_2C_3C_4C_5$, de côté $2a$, se projetant en vraie grandeur sur le plan du dessin, sur lequel nous supposons placée la base de l'hémisphère enveloppe de pôle A_0.

Dans ce qui précède, la couche sphérique, déjà complète (*) dans les cas $n = 2$, $n = 3$, s'est complétée immédiatement par l'addition d'une petite sphère dans le cas $n = 4$; dans le cas actuel il faut encore chercher si, en continuant à ajouter des sphères autour des cinq déjà placées, il est possible de tapisser complètement la sphère enveloppe (**).

Il est facile de voir que l'ensemble des cinq sphères dépasse un peu en dessous la base de l'hémisphère A_0, car (fig. 1) la hauteur de C_1 au-dessus de cette base est

$$H = (R - a)\cos\alpha = \frac{2a\cos 18^\circ}{\sqrt{5}} = 0{,}85065a,$$

de sorte que le plan horizontal qui touche ces sphères vers le bas est en dessous de la base de l'hémisphère d'environ $0{,}15a$.

Effectuons la même construction dans l'autre hémisphère pris à part : une sphère au fond, cinq tout autour; je dis qu'en plaçant les deux hémisphères au contact par leurs bases, *après avoir tourné l'un des pentagones des cinq centres de 36° par rapport à l'autre*, les sphères qui débordent dans l'un des hémisphères viennent se mettre dans les creux formés par les sphères de l'autre, en position de tangence par rapport aux deux sphères entre lesquelles

---

(*) Voir *note* I à la fin.

(**) Plusieurs démonstrations *approximatives* se présentent à l'esprit, entre autres celle-ci : La surface du triangle $A_0\ A_1\ A_2$, pour $\varphi = 72^\circ$, est la vingtième partie de la sphère; ces vingt triangles peuvent se juxtaposer les uns aux autres, leurs angles de 36° permettant de les grouper cinq par cinq autour d'un même point; etc.

elles se placent, de sorte que par la jonction des deux hémisphères on obtient un emboîtement parfait et la sphère enveloppe se trouve tapissée par *douze* petites sphères. Il suffit de démontrer pour cela que le centre d'une des cinq sphères de l'hémisphère inférieur, par exemple celui qui se projette en γ_3, sera, au moment où

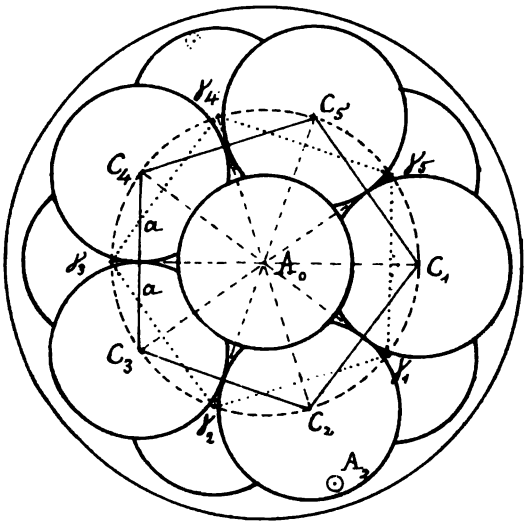


FIG. 6.

les deux hémisphères se joignent par leurs bases, à une distance $2a$ des centres C_3 et C_4 des sphères de l'hémisphère supérieur. En effet, les hauteurs des points C_3 et γ_3 au-dessus de la base commune des hémisphères sont respectivement

$$(R - a)\cos\alpha, \qquad -(R - a)\cos\alpha,$$

de sorte que la distance δ des centres des deux sphères que nous considérons, en observant que

$$C_3\gamma_3 = \frac{a}{\cos 18^\circ},$$

est donnée par

$$\delta^2 = \overline{C_3\gamma_3}^2 + 4(R - a)^2 \cos^2\alpha,$$

$$\delta = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 18^\circ} + \frac{16a^2 \cos^2 18^\circ}{5}} = 2a.$$

* * *

Il reste à chercher si les quatre couches sphériques que nous avons obtenues peuvent être transformées en assemblages plus complets par l'addition d'autres couches *intérieures*. Si l'on considère la sphère qui, placée dans la cavité intérieure de l'un de ces assemblages, est tangente à toutes les sphères de la couche (enveloppe interne), son rayon est

$$r = R - 2a = a\left(-1 + \frac{2 \sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - 2\cos\varphi}}\right); \qquad (2)$$

d'après le tableau de la page 91, on obtient pour les quatre assemblages :

$n =$	2	3	4	5
$r =$	$0{,}155a$	$0{,}225a$	$0{,}414a$	$0{,}902a$.

On voit que la sphère que l'on peut insérer dans le vide central est toujours plus petite que la sphère élémentaire de l'assemblage.

On en conclut que *les quatre assemblages sphériques possibles sont tous formés d'une seule couche.*

*
* *

Seconde méthode. — Voici une seconde manière de résoudre la question posée comme en **a**) (page 87).

Joignons deux à deux les centres des petites sphères formant la couche sphérique; nous obtenons une suite de triangles équilatéraux de côté $2a$, dont l'ensemble forme un polyèdre régulier inscrit dans la sphère des centres; or, les seuls polyèdres réguliers à faces triangulaires possibles sont le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre, donc il n'y a que trois (*) genres de couches sphériques possibles.

Le rayon de la sphère circonscrite à un polyèdre régulier ayant n faces triangulaires de côté $2a$ étant

$$R_1 = 2a \frac{\sin \frac{n+4}{6n} \pi}{\sqrt{1 - 2 \cos \frac{n+4}{3n} \pi}},$$

(*) On ne retrouve pas ici le premier assemblage, parce que l'on suppose implicitement que le réseau triangulaire se compose de plus d'un triangle et, partant, qu'il s'agit de quatre sphères au moins.

le rayon de la sphère circonscrite à la couche sphérique sera

$$R = a\left(1 + \frac{2\sin\frac{n+4}{6n}\pi}{\sqrt{1 - 2\cos\frac{n+4}{3n}\pi}}\right).$$

Or, cette formule, appliquée aux trois assemblages, donne :

Tétraèdre, $n = 4$; $R = a\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 2{,}2247a$,

Octaèdre, $n = 8$; $R = a\left(1 + \sqrt{2}\right) = 2{,}4142a$,

Icosaèdre, $n = 20$; $R = a\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right) = 2{,}9021a$.

Donc : *Une couche de petites sphères égales ayant pour enveloppe une sphère dont le rayon serait triple, ou plus que triple, de celui de la sphère élémentaire, est impossible.*

b.

On peut se poser la question des assemblages sphériques autrement : *Je dispose quatre petites sphères de rayon* a *au contact l'une de l'autre de manière à former une pile triangulaire régulière ; dans les quatre creux externes de ce premier assemblage je place quatre petites sphères ; j'ai un nouvel assemblage de huit sphères présentant douze creux, que je comble de même. Puis-je, en continuant, obte-*

nir un ensemble formé d'un très grand nombre de sphères élémentaires ?

Réponse : Un tel assemblage est irréalisable, parce que l'opération devient très rapidement impossible.

En effet, cette opération revient à la suivante : On considère une multitude de tétraèdres réguliers de côté $2a$; sur chaque face d'un tétraèdre central on place un autre tétraèdre avec une face en coïncidence; on obtient quatre nouveaux tétraèdres sur lesquels on opère de même. Or, si l'on considère les tétraèdres qui se suivent autour d'une arête du tétraèdre central, pour que l'opération soit possible il faut que l'on parvienne à un tétraèdre ayant une face en coïncidence avec la seconde face du tétraèdre central passant par l'arête considérée; mais ceci est impossible, car l'angle du tétraèdre régulier étant de $70^{\circ}32'$, il y a trop peu de cinq et trop de six tétraèdres pour combler l'espace.

c.

Enfin, on s'imagine quelquefois un assemblage sphérique de sphères égales de la manière suivante :

Autour d'une petite sphère, et en contact avec elle, je place tangentiellement une série de sphères se touchant successivement entre elles; sur cette couche je place, dans les creux, de nouvelles sphères, et ainsi de suite.

Déjà la première opération est impossible : autour d'une sphère de rayon a, on ne peut placer tangentiellement entre elles des sphères de rayon a; voici deux façons de le prouver :

1° *Dans tous les assemblages sphériques possibles il n'y a jamais une sphère* a *au centre.* (Voir p. 98.)

2° En joignant deux à deux les centres des sphères formant la première couche, on obtiendrait un polyèdre régulier à faces triangulaires de côté $2a$ inscrit dans une sphère de rayon $2a$; or, on a vu (*) que ce rayon doit être plus petit que le côté du polyèdre. Donc, etc.

*
* *

Milieu homogène. — D'ordinaire un tel milieu est ainsi compris : *c'est un système de points tels que la distance δ de deux points voisins est la même n'importe où et suivant n'importe quelle direction.*

Un tel système est impossible. Car, si d'un point quelconque A du système, ainsi que de tous les points qui l'avoisinent tout autour, pris comme centres, on décrivait des sphères de rayon $\frac{\delta}{2}$, on obtiendrait un système de sphères égales dont l'une centrale, de centre A, et les autres tangentes à celle-ci et se touchant successivement entre elles. Ce qui est absurde.

*
* *

Note I. — On pourrait être tenté d'essayer d'enrichir les couches sphériques que nous avons obtenues, en plaçant de nouvelles petites sphères a dans leurs creux *externes;* il est clair que l'on ne peut aboutir à rien, car ces couches ainsi enrichies nous auraient été données par le procédé analytique suivi. D'ailleurs, on *vérifie* facilement que la petite sphère que l'on peut placer dans l'un

(*) $R_1 = R - a$ varie de $1{,}225\,a$ à $1{,}902\,a$. (Voir page 100.)

de ces creux, tangentiellement à la sphère enveloppe, a un rayon plus petit que a : en effet, ce rayon a pour expression

$$\rho = \frac{2aR}{3R - a + \sqrt{3(3R^2 - a^2 - 6aR)}},$$

ou

$$\frac{a}{\rho} = 2 + \sin\varphi\sqrt{3} - \cos\varphi - \left(\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{3}\right)\sqrt{1 - 2\cos\varphi},$$

et, pour les différents assemblages,

$$n = 2, \quad \varphi = 180^\circ, \quad \rho = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}7887a$$

$$n = 3, \quad \varphi = 120^\circ, \quad \rho = \frac{a}{10}\left(\sqrt{6} + 4\right) = 0{,}6449a$$

$$n = 4, \quad \varphi = 90^\circ, \quad \rho = a\frac{\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{6} - 1}{2} = 0{,}5555a \ (*)$$

$$n = 5, \quad \varphi = 72^\circ, \quad \rho = \frac{4a}{6 + (2\cos 18^\circ - 1)(2\sqrt{3} - 3 + \sqrt{5})} = 0{,}47417a$$

$$n = 6, \quad \varphi = 60^\circ, \quad \rho = \frac{a}{3}.$$

* * *

Note II. — On peut avoir à envisager le cas où des

(*) C'est là un résultat numérique remarquable : l'irrationnelle $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{6} - 1}{2}$ a pour valeur $\frac{5}{9}$ à moins d'un dixmillième près.

sphères de même rayon doivent être placées au contact extérieur d'une sphère donnée : « *Étant donné une sphère de rayon* r, *on place extérieurement, à son contact et se touchant successivement deux à deux entre elles, des sphères de rayon* a. *Quelles sont les valeurs de* a *pour lesquelles cette opération peut réussir?* »

On pourrait suivre la même marche qu'en **a**) ; mais on obtient immédiatement les solutions possibles en observant que r est le rayon de la sphère inscrite à l'assemblage des sphères a ; les seuls cas possibles sont donc ceux obtenus précédemment, et la valeur de a se tire de la formule (2) de la page 98 :

$$a = r\sqrt{1 - 2\cos\varphi}\left(2\sin\frac{\varphi}{2} + \sqrt{1 - 2\cos\varphi}\right);$$

et, pour les quatre assemblages possibles,

$$\varphi = 180^\circ, \qquad a = r\left(3 + 2\sqrt{3}\right) = 6{,}4641r,$$

$$\varphi = 120^\circ, \qquad a = r\left(2 + \sqrt{6}\right) = 4{,}4495r,$$

$$\varphi = 90^\circ, \qquad a = r\left(1 + \sqrt{2}\right) = 2{,}4142r,$$

$$\varphi = 72^\circ, \qquad a = 4r\sin^2 18^\circ(1 + 2\cos 18^\circ) = 1{,}1085r.$$

Ces assemblages sont représentés par les figures 3, 4, 5 et 6, dans lesquelles il faut s'imaginer tracée la sphère inscrite, qui est la sphère donnée de rayon r.

—

Contribution à l'étude méthodique des oxydases (deuxième mémoire); par O. Dony-Hénault.

Dans un mémoire récent, fait en collaboration avec Mlle J. Van Duuren, et intitulé : *Contribution à l'étude méthodique des oxydases dans les tissus animaux* (*), nous avons montré par une étude consciencieuse des méthodes et des expériences de nos devanciers que l'existence dans les tissus animaux d'une oxydase active vis-à-vis de l'aldéhyde salicylique n'était rien moins que prouvée et « qu'il n'est pas probable que les phénomènes d'oxydation de l'aldéhyde salicylique se rattachent au mécanisme fondamental de l'oxydation cellulaire (**) ». La présence en quantité infime dans les extraits d'organe d'une substance oxydante peut produire la transformation de l'aldéhyde en acide salicylique, telle que la révèle l'expérience. Dès lors, l'hypothèse d'une oxydase devient superflue pour expliquer cette transformation.

Nous avions aussi qualifié de *fictifs* les *tests* d'oxydation employés par nos devanciers. Depuis lors, des expériences de Battelli et Mlle Stern (***) sont venues apporter à notre thèse une confirmation très nette; ces auteurs ont, en

---

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), p. 537, 1907.

(**) Page 634, *loc. cit.*

(***) Battelli et Stern, *Comptes rendus de la Société de biologie*, 23 février, 15 et 19 mars 1907, et O. Dony-Hénault et Mlle Van Duuren, *Archives internationales de physiologie*, 15 juin 1907.

effet, observé, et leurs observations ont fait l'objet d'une démonstration publique au Congrès international d'Heidelberg (août 1907), que l'aldéhyde salicylique affaiblit énormément l'activité respiratoire des tissus broyés mis en suspension dans l'eau. Dès lors, le *test* de Schmiedeberg est bien fictif.

Au surplus, le Prof. Heffter, dans un récent mémoire (*), a démontré que beaucoup de réductions provoquées par les tissus et attribuées à des *réductases* (dégagement de H_2S aux dépens du soufre par le *philothion*) peuvent être dues à la présence dans les tissus de substances pourvues d'une fonction *mercaptan*. Cet auteur formule donc quant aux *diastases réductrices* une conclusion analogue à celle que nous avons émise quant aux *diastases oxydantes*.

L'existence de diastases oxydantes et réductrices *dans les tissus animaux*, admise trop facilement au rang des notions classiques, ne peut donc plus être considérée comme démontrée aujourd'hui, sans qu'on puisse pour cela nier catégoriquement leur existence.

Dans le présent mémoire, nous avons étudié avec soin les phénomènes d'oxydation attribués à une *diastase végétale*, à savoir la *laccase*, décrite et isolée par G. Bertrand et que l'on peut considérer comme la diastase végétale la mieux étudiée jusqu'ici. Dans notre mémoire cité plus haut, nous nous étions contentés de faire ressortir, pour la laccase aussi, la nature fictive de ses substratums d'activité. « L'activité des diastases oxydantes n'a pu être étudiée jusqu'ici au laboratoire que

---

(*) *Medizinisch-Naturwissenschaftliches Archiv*, Bd I, Heft I, 15 Juli 1907. *Die reduzierenden Bestandteile der Zellen*, von A. Heffter (Marburg).

vis-à-vis de substratums fictifs. Il en est ainsi pour la laccase et la tyrosinase, oxydases typiques pourtant. »

Aujourd'hui nous pouvons aller plus loin. *Le présent mémoire démontrera, nous l'espérons, l'inexistence réelle de la laccase en tant que diastase et indiquera la constitution essentielle de ce prétendu ferment.* Nous ne sommes plus forcé par la nature du sujet de nous contenter d'expériences négatives, car *nous avons fait la synthèse expérimentale de la laccase* et produit de toutes pièces une laccase artificielle typique. En même temps nous espérons jeter quelque lumière sur le mécanisme de certaines oxydations.

La Laccase de G. Bertrand. — *Ses propriétés. Sa nature.*

On sait que l'existence de ce ferment oxydant avait été pour la première fois affirmée par le Japonais Hikkorokuro Yoshida, qui étudia la formation de la laque japonaise. Cette laque est faite avec le suc laiteux du *Rhus vernicifera* qu'on étale à la surface des objets; Hikkorokuro attribuait son noircissement et son durcissement à l'intervention d'une diastase oxydante du latex. Gabriel Bertrand l'isola le premier du latex des arbres à laque du Tonkin et du Japon, sous forme d'un corps blanc, soluble dans l'eau, et capable de provoquer des oxydations, qu'il baptisa du nom de *laccase* pour marquer à la fois son origine et sa nature diastasique; Bertrand se servit pour cela de la précipitation alcoolique répétée du latex qui fournit le précipité de laccase.

La laccase colore en bleu la teinture de gaïac, sans

l'intervention du peroxyde d'hydrogène; au contact de l'air, elle transforme l'hydroquinone dissoute dans l'eau en quinone et chinhydrone, celle-ci cristallisant en paillettes mordorées caractéristiques; elle transforme aussi le pyrogallol en aiguilles rouges de purpurogalline et, enfin, le gaïacol en cristaux pourpres de tétragaïacoquinone. L'oxydation de ces dérivés phénoliques s'accompagne de changements de coloration caractéristiques des liquides et la rapidité avec laquelle ces couleurs se succèdent renseigne déjà l'observateur sur l'activité de l'oxydase. On obtient, en outre, une mesure plus exacte de cette activité en déterminant la quantité d'oxygène absorbé et éventuellement (dans le cas du pyrogallol) la quantité d'anhydride carbonique dégagé par la solution du polyphénol. Dans les dernières années, Bertrand semble avoir accordé la préférence au gaïacol comme test d'activité de la laccase. Il se contente d'observer si la solution de gaïacol se colore vite en rouge et fournit rapidement des cristaux de tétragaïacoquinone. Nous verrons que ce procédé peut conduire à des erreurs importantes.

Quant à la composition moyenne de la laccase, elle est représentée par Bertrand de la manière suivante :

Humidité	7.4 %
Gomme	86.77
Azote.	0.41
Cendres (riches en Mn) . . .	5.58

« La quantité d'azote indiquée ci-dessus correspond à 2.5 % de substances albuminoïdes et, si l'on admet comme pour les autres ferments solubles que la *laccase vraie* possède la composition élémentaire de ces sub-

stances, on voit que 0gr1 du produit ci-dessus contient au plus 0gr0025 de laccase, à supposer qu'il n'y ait pas d'autres matières azotées. »

On le voit, c'est bien parce que les « diastases » antérieurement connues contiennent de l'azote que Bertrand « admet » à la fois que la laccase est une substance azotée et une « diastase » azotée oxydante.

Mais plus tard, revenant à l'existence du manganèse dont il avait démontré la présence dans la cendre de laccase, il observe que certains sels de manganèse sont capables de provoquer l'oxydation de l'hydroquinone avec formation de chinhydrone, et celle du pyrogallol avec formation de purpurogalline. Il dresse une échelle d'activité des divers sels manganeux d'après la quantité d'oxygène qu'absorbe une solution de 1 gramme d'hydroquinone dans 100 centimètres cubes d'eau, en présence de doses équiatomiques des divers sels correspondant à 0gr1 Mn, en 24 heures :

TABLEAU I.

Azotate Mn	1cc5	Formiate Mn. . . .	7cc4	Salicylate Mn . . .	16cc3
Sulfate Mn.	1cc6	Benzoate Mn. . . .	15cc3	Lactate Mn	17cc6
Chlorure Mn. . . .	1cc8	Acétate Mn.	15cc7	Gluconate Mn . . .	21cc6
				Succinate Mn. . . .	22cc4

La condition d'une action marquée du sel manganeux est donc qu'il soit constitué d'un acide très faible et que « sa base puisse être considérée à la fois comme libre, pour qu'elle puisse s'oxyder à l'air comme du protoxyde de manganèse, comme combinée, pour que la forme stable

du sel en présence de l'hydroquinone soit le sel de protoxyde (*) ».

Le manganèse devient ainsi pour Bertrand l'élément actif et convoyeur de l'oxygène dans la laccase, mais il donne, conformément à ses prémisses, un support de nature protéique à cet élément minéral. Enfin et récemment, il semble qu'il hésite à affirmer la nature protéique du radical auquel le Mn est combiné dans la laccase (**).

Ainsi, ayant obtenu par précipitation alcoolique un précipité activant les oxydations, Bertrand attribue avec justesse l'oxydation à un élément du précipité masqué dans l'ensemble et qu'il appelle la « laccase vraie », mais quand il découvre que les sels de manganèse seraient capables de jouer seuls le rôle oxydant du précipité, l'idée ne lui vient pas que le manganèse a pu être accidentellement incorporé au précipité lors de sa formation; il préfère, sous l'impulsion de l'idée régnante (celle du ferment albuminoïde), décréter la liaison préétablie et nécessaire du manganèse avec un « radical » protéique (ou non protéique peut-être, suivant la version récente de Bertrand).

Dans la suite de ses mémoires, Bertrand ne cesse de considérer le précipité de laccase comme une substance assez simple dont le manganèse et le radical auquel il est combiné, méritent seuls d'être pris en considération pour expliquer la capacité oxydante. Son dernier mémoire sur la « sensibilité de la laccase » aux acides est suggestif à

(*) Duclaux, *Microbiologie*, t. II, p. 580.

(**) G. Bertrand, *Recherches sur l'influence paralysante des acides sur la laccase* (Annales Pasteur, t. XXI, septembre 1907.)

ce point de vue, et nous montrerons plus loin que cette manière de considérer la laccase a égaré complètement ses recherches.

Malgré l'analyse rudimentaire de la laccase reproduite plus haut et qui suffit à faire ressortir la nature complexe du précipité appelé laccase, Bertrand ne cesse de considérer la « laccase vraie comme une diastase de formule *Mn* R », formule dans laquelle R figure un radical d'acide très faible de nature protéique ou non.

Et pourtant tout ce que nous savons aujourd'hui sur les propriétés des colloïdes et « l'adsorption » en particulier nous permet de croire que des sels de manganèse primitivement indépendants dans le latex ont pu être entraînés dans la précipitation alcoolique, par les colloïdes présents (gommes, matières protéiques, etc.). Dans cette hypothèse, étant donnée la prédominance de la gomme, le manganèse aurait été de préférence absorbé et entraîné par elle plutôt que par la très faible quantité de matières protéiques. Le raisonnement infirme ici l'hypothèse première de Bertrand sur la nature albuminoïde de la laccase, et l'expérience va montrer l'exactitude de notre raisonnement.

Entraînement des sels manganeux par les colloïdes.

Ayant additionné 1 gramme de formiate manganeux à 300 centimètres cubes de sérum sanguin centrifugé et ayant traité ce liquide comme Bertrand a traité le suc de l'arbre à laque, nous avons obtenu par la précipitation

alcoolique double, une petite quantité de précipité qui fournissait, quoique faiblement, les trois caractères « typiques » de la laccase vis-à-vis du gaïac, de l'hydroquinone et du pyrogallol. C'était donc, si l'on peut dire, une laccase de synthèse; elle contenait du manganèse entraîné évidemment, l'adsorption agissant au préalable, par les albuminoïdes précipités.

Cette expérience préliminaire nous encouragea à tenter la préparation de laccases plus semblables à celle de Bertrand, par leur activité et la nature de leur substratum colloïdal; nous étudiâmes d'abord la manière dont se comportent des sels divers de manganèse et aussi d'autres sels, mis en présence de gomme arabique, lorsqu'on précipite celle-ci par l'alcool. On a divisé en portions égales une solution de gomme arabique (50 grammes dans 500 centimètres cubes d'eau, filtrée sur laine de verre). Chaque portion additionnée d'une dose donnée d'un sel choisi de Mn ou de K a été précipitée par l'alcool; le précipité filtré et lavé à l'alcool dilué, puis pressé et séché, a été incinéré; on a recherché et dosé dans la cendre le manganèse sous forme de Mn^3O^4 par précipitation à l'aide de H^2O^2 et calcination; on a dosé le chlorure de potassium, additionné aux solutions gommeuses sous forme de K^2StCl^6.

Les solutions de gomme témoins ne floculent pas par l'alcool et donnent un lait infiltrable; nous les faisions floculer par une légère addition de chlorure ammonique; celui-ci se volatilisant à l'incinération, nous obtenions la cendre témoin sans altération. Le tableau ci-contre résumera les résultats.

TABLEAU II.

NUMÉRO de la portion.	VOLUME de solution gommeuse (à 50 grammes dans 500) précipitée.	ADDITIONNE avant la précipitation.	POIDS de gomme précipitée.	POIDS de la cendre et teneur en cendres du précipité.	CARACTÈRES de la cendre.	TENEUR en manganèse du précipité (en Mn^3O^4) ou en KCl et poids de Mn^3O^4 ou K^2PtCl^6.
1	50 cent. cubes.	Témoin O.	Pour le témoin, voir plus loin l'analyse de la gomme pure.			
2	Id.	0gr1 lactate manganeux Merck.	2gr79	0gr059 | 2.11 %	Brun-rouge, donne chlore avec HCl.	0,015 Mn^3O^4 | 0.54 %
3	Id.	0gr3 lactate id.	2,8	0,085 | 3.05 %	Brun verdâtre, donne par HCl, chlore et résidu carboné.	0,0248 id. | 0.88 %
4	Id.	0gr1 KCl	2,49	0,09 | 3.61 %	Blanche.	0,061 K^2PtCl^6 | 0.71 %
5	Id.	0gr1 KCl 0gr1 lactate Mn.	2,32	0,059 | 2.5 %	Brun-noir, dégage chlore avec HCl.	0,009 Mn^3O^4 | 0.41 % KCl (accident).
6	Id.	Témoin comme en 1.	Témoin comme en 1.	Témoin comme en 1.		
7	Id.	0gr3 KCl	2gr62	0gr092 | 3.52 %	Gris sale.	0,115 K^2PtCl^6 | 1.34 %
8	Id.	0gr1 formiate. Mn Merck.	3,35	0,058 | 1.7 %	Brun noirâtre, chlore par HCl.	0,022 Mn^3O^4 | 0.65 %
9	Id.	0gr3 formiate Mn.	2,43	0,05 | 2.05 %	Brun-vert volumineux, chlore par HCl.	0,025 id. | 1.03 %
10	Id.	0gr1 formiate Mn 0gr1 KCl	2,01	0,09 | 4.4 %	Blanche volumineuse teintée de brun, chlore par HCl.	0,016 Mn^3O^4 | 0.82 % 0.065 K^2PtCl^6 | 1.00 KCl

1° *Quel que soit le sel choisi pour l'additionner à la solution gommeuse, ce sel apparaît donc dans le précipité de gomme engendré par l'alcool, et on voit qu'une dose, même faible, de sel existant avant la précipitation, suffit à engendrer une teneur notable en sel du précipité*, ce qui est conforme du reste à ce que l'on sait de l'absorption des colloïdes; 2° *La teneur en sels du précipité grandit quand la teneur du liquide avant la précipitation grandit, mais il n'y a pas toujours proportionnalité simple* entre la concentration du liquide et la teneur en sel du précipité; cette *dernière croît moins vite que la première;* 3° *Enfin quand il y a plusieurs sels* «adsorbables», *ils le sont indépendamment l'un de l'autre comme le montrent les essais 5 et 10 du tableau.* Il ne faut pas perdre de vue que les conditions mêmes des essais sont de nature à engendrer quelque irrégularité dans les résultats; la difficulté de sécher les précipités, la résistance qu'oppose à la combustion des éléments carbonés une teneur élevée en Mn^3O^4, l'irrégularité dans l'addition de l'alcool sont de nature à faire varier un peu les résultats. Les variations sont du reste insuffisantes pour enlever la moindre rigueur à la conclusion la plus importante formulée sous le titre 1°.

On pourrait objecter toutefois que les analyses ci-dessus ont été obtenues après un seul traitement par l'alcool; le tableau suivant montrera que si l'on redissout le précipité alcoolique dans l'eau et le reprécipite, la teneur en manganèse subsiste.

TABLEAU III.

Précipitation double d'une solution de gomme arabique (50 grammes dans 500 centimètres cubes d'eau) en présence de formiate manganeux.

Première précipitation.

SOLUTION EMPLOYÉE.	ADDITION.	PRÉCIPITATION.	POIDS de précipité.	OBSERVATIONS.
A) 90 c. c. de solution.	Témoin. $0^{gr}3$ de NH^4Cl.	On ajoute 200 grammes d'alcool; on lave cinq fois les ↓ avec de l'alcool à 70°. On exprime dans un linge serré.	$9^{gr}2$	$2^{gr}766$ de A donne $0^{gr}053$ cendre blanche ou 1.93 °/₀; cendre effervescente avec $HCl(CaCO^3)$. On dose Ca par oxalate; il correspond à 1.5 °/₀ ou 80 °/₀ du poids de cendre.
B) 90 c. c. de solution.	$0^{gr}1$ de formiate manganeux.		$8^{gr}7$	$2^{gr}399$ ↓ donne cendre noire brune $0^{gr}086$ ou 3.58 °/₀, contient $0^{gr}042$ Mn^3O^4 ou 0.49 °/₀ Mn^3O^4 du précipité.
C) 90 c. c. de solution.	$0^{gr}3$ de formiate manganeux.		$8^{gr}7$	$2^{gr}763$ ↓ donne cendre noire brune $0^{gr}1295$ ou 4.7 °/₀, contient $0^{gr}0282$ Mn^3O^4 ou 1.02 °/₀ du précipité.

Deuxième précipitation.

On reprend 6 grammes de C; on dissout en deux fois :

1° dans 60 c. c., la plus grande partie, on ajoute 250 gr. d'alcool. (C^1);

2° dans 50 c. c., le reste, on ajoute 250 gr. d'alcool. (C^2).

Il se forme un lait ne floculant pas; après trois jours, on ajoute une trace NH^4Cl, floculation instantanée.

On obtient après traitement :

2gr78 de C^1. Cendres brunes 0gr05 ou 2.1 °/o.

Teneur en Mn^3O^4 du ↓ 0gr031 Mn^3O^4 ou 1.11 °/o.

1gr593 de C^2. Cendres brunes 0gr033 ou 2.07 °/o.

Teneur en Mn^3O^4 du ↓ 0gr0186 Mn^3O^4 ou 1.16 °/o.

Malgré la faible teneur en Mn du liquide de redissolution, qu'indique l'absence de floculation spontanée, on voit que la teneur en manganèse n'est pas plus faible dans le précipité de deuxième jet que dans le premier. Voici un autre essai pratiqué de manière analogue et dont nous indiquerons seulement les données numériques (voir tableau IV ci-après).

L'ensemble des expériences précédentes permet de conclure que la méthode de précipitation alcoolique répétée appliquée au latex de l'arbre à laque par Bertrand ne pouvait lui fournir qu'un précipité essentiellement complexe où chaque élément, préexistant dans le latex, doit figurer en quelque quantité; la laccase brute représente donc, au point de vue chimique et si l'on peut ainsi parler, la *figure composite* de toutes les substances

TABLEAU IV.

SOLUTION EMPLOYÉE.	ADDITION.	PRÉCIPITATION.	POIDS de précipité.	OBSERVATIONS.
50 c. c. solution gomme.	1 gramme de formiate Mn dans 10 c. c. d'eau.	On ↓ par 180 grammes d'alcool et on redissout le ↓, sans l'analyser, dans 25 c. c. d'eau. On ajoute 120 gr. d'alcool.	3gr25 ↓	1gr473 ↓ donne cendre petite et brune; 0gr0425 ou 2.9 °/o cendres; 0gr033 Mn^3O^4 ou 2.24 °/o.
50 c. c. solution gomme.	0gr5 de formiate Mn dans 10 c. c. d'eau.		3gr20 ↓	1gr497 ↓ donne cendre petite et brune; 0gr0418 ou 2.8 °/o cendres; 0gr030 Mn^3O^4 ou 2 °/o.

chimiques du latex. Remarquons en passant qu'on peut en dire autant de toutes les diastases. On ne peut évidemment en déduire leur inexistence globale, mais on peut en conclure que l'on ne saurait trop chercher à connaître *les réactions catalytiques que peuvent exercer l'un sur l'autre les divers éléments de ces complexes.* Cela n'a guère été fait jusqu'ici; on verra pourtant plus loin la nécessité d'une telle étude. En particulier, en ce qui touche le manganèse et la laccase, Bertrand a négligé totalement d'examiner quelle pouvait être l'action de ses voisins chimiques sur le manganèse de la laccase. Au point de vue physiologique, cette recherche s'imposait pourtant, puisque c'est *dans le latex* et en présence de tous ces facteurs inconnus qu'était appelée à agir *in vivo* la prétendue diastase.

C'est en vain que nous avons prié M. Bertrand de faire avec nous une analyse complète du latex ou de mettre une certaine quantité de ce produit à notre disposition pour faire cette analyse.

Préparation de laccase artificielle peu active.

Essais qualitatifs.

Nous avons déjà dit que l'addition à du sérum sanguin d'un peu de formiate de manganèse et l'addition ultérieure d'alcool nous avaient fourni un précipité jouissant des propriétés de la laccase, mais à un faible degré. De même, en faisant des solutions de gomme arabique ou de dextrine à 5 ou 10 °/₀ additionnées de quantités

variables de divers sels de manganèse, solutions que nous précipitions par l'alcool, suivant les indications de Bertrand relatives à l'obtention de la laccase, nous avons constaté que les précipités contenaient évidemment tous du manganèse en quantités variables (ils exerçaient une action accélératrice réelle sur l'oxydation de l'hydroquinone et du pyrogallol ; les réactions obtenues au gaïac étaient pourtant très peu appréciables). Ces précipités, obtenus avec des solutions de 0,1 à 2 °/₀ de formiate ou lactate manganèse, contenaient de 0,1 à 2,2 °/₀ de Mn^3O^4 par rapport au poids du précipité.

Cela suffisait à démontrer que *l'existence d'une combinaison de manganèse et d'éléments protéiques préexistant dans le latex de l'arbre à laque n'est nullement nécessaire pour que le traitement alcoolique puisse en précipiter un mélange de colloïdes porteurs de manganèse.*

Mais il fallait rechercher pourquoi l'activité des laccases artificielles demeurait, dans toutes nos préparations, fort inférieure à celle de la laccase de Bertrand ; en particulier, il fallait produire des laccases fournissant, outre une absorption d'oxygène notable par les polyphénols, les produits caractéristiques : chinhydrone, purpurogalline ou tétragaïacoquinone. Dans ce but, nous avons systématiquement étudié, tout d'abord, les conditions fondamentales de l'oxydation des polyphénols par les sels de manganèse, conditions qui n'ont pas été précisées jusqu'ici ; nous nous sommes efforcé de réunir, sur ce problème, des données quantitatives.

Étude quantitative de l'oxydation des polyphénols en présence de sels manganeux.

Méthode employée.

Après quelques tâtonnements, nous nous sommes adressé à l'hydroquinone, qui nous paraissait se prêter à cette étude mieux que les autres tests de Bertrand.

Pour mesurer l'intensité de l'oxydation, on enferme un volume donné de solution à peu près saturée d'hydroquinone dans un petit ballon de 200 centimètres cubes, composé de deux parties se raccordant par un rodage parfait : *a*) le ballon avec une partie de son col ; *b*) l'autre portion du col surmonté d'un robinet à l'émeri et d'un tube capillaire recourbé à angle droit vers le bas.

La partie *a* et la partie *b* s'emboitent par un rodage et on peut au besoin faire le vide à la trompe par le capillaire relié au robinet. Au contraire, on peut aussi, en disjoignant sous l'eau les deux parties du ballon, faire passer directement par déplacement le gaz du ballon dans les éprouvettes de mesures gazométriques.

Au début, les liquides étaient stérilisés dans le ballon, évacué à la trompe, par un séjour de vingt minutes à 105° à l'autoclave, suivant l'indication de Bertrand. Dans la suite, nous avons supprimé la stérilisation qui présente des inconvénients et est tout à fait superflue.

Après stérilisation et refroidissement éventuels, on laisse rentrer l'air dans le ballon évacué ; on introduit en même temps par succion le sel manganeux dissous

dont on veut étudier l'activité. On plonge le ballon dans un bain à température donnée (le bain est garni d'eau distillée); puis on ouvre un instant le robinet pour mettre en équilibre avec l'atmosphère le contenu gazeux; on referme; le gaz du ballon est donc au début à la pression barométrique du moment et à la température du bain t°. Le ballon enveloppé dans un filet protecteur est alors agité mécaniquement pendant un temps donné. A la fin de l'essai, on l'immerge de nouveau à la température t°. Puis on plonge le capillaire dans un godet plein d'eau et taré; soit p la tare du godet plein; on ouvre le robinet et l'eau pénètre dans le ballon; la tare du godet devient p'.

Le ballon enveloppé dans un filet protecteur est alors agité mécaniquement pendant un temps donné. A la fin de l'essai, on l'immerge de nouveau à la température t°.

$p'' = p - p'$ exprime en grammes le nombre de centimètres cubes absorbés par le ballon, c'est-à-dire l'oxygène consommé pendant l'oxydation. Dans le cas de l'hydroquinone, il n'y a point de CO^2 émis en quantité appréciable, comme on le voit par les exemples suivants :

On a dosé d'une part gazométriquement l'oxygène présent dans le ballon après l'oxydation : c'est la teneur % en oxygène trouvée; d'autre part on a calculé, d'après la capacité du ballon, le volume du liquide introduit, le volume d'air primitif et l'eau absorbée, la quantité d'oxygène qui devrait y exister : c'est la teneur en oxygène calculée. S'il y avait émission notable de CO^2, pendant l'oxydation, ces deux valeurs ne pourraient se correspondre ; or on voit qu'elles coïncident sensiblement.

TABLEAU V.

	Teneur °/₀ en O trouvée.	Teneur °/₀ en O calculée.
1)	15.6	15.1
2)	19 8	19.9
3)	18.5	18.4
4)	12.85	13.0
5)	16.00	16.3

Grâce à cette concordance, l'intensité de l'absorption se trouve très simplement mesurée par une pesée. Voyons quelles sont, d'après cette méthode, les conditions fondamentales de l'oxydation de l'hydroquinone.

Influence de la concentration de l'hydroquinone.

Le tableau suivant montre que l'intensité de l'oxydation dépend essentiellement de la concentration de l'hydroquinone et croît avec cette dernière. Pour plus de sûreté, nous avons employé comparativement deux hydroquinones de provenances diverses : l'une de l'*Aktiengesellschaft für Anilinfabrikation*, que nous désignerons par Hyd. Berlin; l'autre provenant d'une maison bruxelloise, Hyd. Bruxelles.

TABLEAU VI.

Numéros.	SOLUTION EMPLOYÉE et concentration.	QUANTITÉ de sel manganeux.	OXYGÈNE absorbé en c. c.	OBSERVATIONS.	
1	50 c. c. contenant 2gr5 Hyd. Brux.	0 *témoin.*	3cc3	Coloration rougeâtre faible.	
2	50 c. c id. 1gr25 id.	5 c. c. formiate Merck à 1 °/o.	9,9	Liquide brun-rouge sans chinhydrone.	8cc85 − 3,3 = 5cc55 contraction réelle.
3	50 c. c. id. 1gr25 id.		7,8		
4	50 c. c. id. 2gr5 id.		12,7		Moyenne : 12.4 − 3.3 = 9.1 id.
5	50 c. c. id. 2gr5 id.	Id.	12,1	Chinhydrone.	
6	50 c. c. id. 2gr5 id.	Ajouté avant stérilisation.	11,6		

N. B. — 1 à 6, stérilisation à 105°.
Durée de l'essai = 17 h. 30 m.
Le formiate a été ajouté après stérilisation sauf en 6.

CONCLUSION : Le rapport des concentrations est de 1 : 2;
Le rapport des absorptions d'oxygène est de 5,55 : 9,1 ou 1 : 1,64.

TABLEAU VI (*suite*). — *Hydroquinone Berlin.*

Numéros.	SOLUTION EMPLOYÉE et concentration.	QUANTITÉ de sel manganeux.	OXYGÈNE absorbé en c. c.	OBSERVATIONS.		
1	50 c. c. content^{t} 2^{gr}5 Hyd. Berlin.	0 témoin.	3^{cc}2	Un peu rouge.		
2	50 c. c. id. 1^{gr}25 id.	7 c. c. formiate Mn à 1 °/₀.	7,7	Brun.	Pas de chlorhydrate cristallisé.	7.6 7.6 -3.2 4.4 absorpt. réelle.
3	50 c. c. id. 1^{gr}25 id.	Id.	7,5			
5	50 c. c. id. 0^{gr}625 id.	Id.	5,8	Brun clair.		5.8 -3.2 2.6 id.
6	50 c. c. id. 2^{gr}5 id.	Id.	10,7	Brun foncé.		10.45 10.45 3 2 7.23 id.
7	50 c. c. id. 2^{gr}5 id.	Id.	10,2			

N. B. — Stérilisation à 105° pendant 30 minutes.
Température : 18°5. — Durée = 22 heures.
Le formiate a été ajouté après la stérilisation.

CONCLUSION : Rapport des concentrations de l'hydroquinone, 1 : 2 : 4.
Rapport des absorptions d'oxygène correspondantes, 1 : 1.68 : 2.70.

L'absorption d'oxygène par l'hydroquinone croît donc moins vite que les concentrations d'hydroquinone correspondantes. Au surplus, *on remarque qu'il existe une différence notable entre le taux d'oxydation et l'apparition de paillettes caractéristiques de chinhydrone.* Il existe entre deux hydroquinones de provenance différente, une différence réelle à ce point de vue ; dans l'essai 2 ci-dessus, l'hyd. Berlin a donné une absorption notable quoique plus faible que l'hyd. Bruxelles, mais la première n'a pas formé de paillettes visibles, tandis que la seconde en a donné en abondance. Nous aurons l'occasion d'observer souvent la non-apparition de chinhydrone solide sous l'influence de facteurs trop peu apparents pour être saisis. Ceci suffit à prouver que la mesure de l'activité oxydante, d'après la formation des cristaux minuscules de tétragaïacoquinone, est tout à fait irrationnelle. M. Bertrand a substitué à tort cette méthode d'observation à celle qu'il avait adoptée auparavant.

Autre comparaison des deux hydroquinones Berlin (n° 1) et Bruxelles (n° 2). En solution à 5 °/₀, 1 est presque incolore, 2 est rosé.

Le tableau VII montre encore une fois la différence d'oxydabilité de deux hydroquinones de provenance diverse et l'irrégularité de la formation des paillettes malgré l'égale intensité d'absorption (ballons 6 et 7); cette fois c'est l'hyd. Bruxelles qui n'a point fourni de paillettes.

TABLEAU VII.

Numéros.	SOLUTION.	QUANTITÉ.	ABSORPTION d'oxygène après 21 heures.	COLORATION du liquide.
1	50 c. c. sol. 1, diluée de 1 : 2.	*Témoin.*	1cc67	Rose pâle.
2	50 c. c. sol. 1.	8 c. c. formiate Merck à 1 °/o.	12,91	Brun, chinhyd. abondante.
3	50 c. c. sol. 1.	8 c. c. formiate Merck à 1 °/o.	12,19	
5	50 c. c. sol. 2, diluée de 1 à 2.	0 *témoin.*	1,87	Rose foncé.
6	50 c. c. sol. 2.	8 c. c. formiate.	10,8	Brun, sans chinhyd.
7	50 c. c. sol. 2.	8 c. c. formiate.	10,4	Brun, avec chinhyd.

Observations. — Stérilisation à 105°, pendant 15 minutes. Après la stérilisation, 1, 2 et 3 sont moins colorés que 5, 6 et 7. — Le formiate a été ajouté ici après stérilisation.

Influence de la nature et de la concentration du sel de manganèse.

TABLEAU VIII.

Solution A : 15 grammes hyd. Berlin dans 325 centimètres cubes d'eau ; on filtre. Solution à peu près incolore.

Numéros.	SOLUTION.	QUANTITÉ.	ABSORPTION d'oxygène après 24 heures.		COLORATION du liquide.
7	50 c. c. A.	0 Mn témoin.	1cc30		Un peu rougeâtre.
6	Id.	7 c. c. formiate Merck à 1 °/o	12,9	Moy. 10,9	Brun foncé, paillettes abondantes.
5	Id.		7,9		Brun foncé, paillettes très peu abondantes.
3	Id.	7 c c. sulfate Merck à 1 °/o.	5,6	Moy. 5,1	Paillettes en quantité appréciable.
2	Id.		4,6		Pas de paillettes.
1	50 c. c. de A dilué de 1 : 2.	7 c. c. formiate à 1 °/o.	7,6		

Observations. — Durée de l'essai : 43 h. 30 m.

Le rapport fourni par les ballons 6 et 5, moyenne 10cc9, et le ballon 1, où la concentration en hydroquinone est abaissée de moitié, montre encore que la concentration variant de 1 : 2, l'absorption varie comme 1 : 1,52.

Outre l'irrégularité de la formation de la chinhydrone, ce tableau montre que *le sulfate est beaucoup moins actif que le formiate à dose quasi équivalente*, car le poids moléculaire de $MnSO^4 = 151$ et de $Mn(CHO^2)^2 = 145$. Cela est conforme au tableau de Bertrand reproduit page 109 (tableau I). *En revanche, on voit que l'activité du sulfate est dans notre expérience certainement et de beaucoup supérieure à celle du sulfate employé par Bertrand.*

Ce désaccord se reproduisit dans la suite : ainsi notre succinate manganeux de Merck se montra fort peu actif, tandis que le succinate employé par Bertrand avait montré une activité très grande et supérieure à celle des autres sels employés par lui. Nous verrons plus loin l'explication de ces désaccords.

TABLEAU IX.

A = Solution filtrée de 15 grammes Hyd. Berlin dans 300 centimètres cubes d'eau. *B* = Solution de formiate manganeux Merck à 1 %.

			Absorption en c. c. de l'oxygène.	
1	50 c. c. A.	5 c. c. B.	10,9	a donné des paillettes.
2	50 c. c. A.		10,7	N'a pas donné des paillettes.
3	Id.	5 c. c. B étendu de 1 : 2.	8,3	a donné des paillettes.
5	Id.		8,6	N'a pas donné des paillettes.
6	Id.	5 c. c. B étendu de 1 à 4.	8,5	
7	Id.		Perdu.	

Observations. — B a été ajouté après stérilisation.
Durée de l'essai : 26 heures.

TABLEAU X.

Influence du temps.

Solution A : 10 grammes hyd. Berlin dans 210 centimètres cubes d'eau; on filtre. *Solution S* de formiate manganeux Merck à 2 %.

			Après une marche de :	L'absorption de l'oxygène est :	Absorption par heure moyenne.
4	50 c. c. A.	5 c. c. de S.	18 heures.	15cc7	0cc87
9	Id.	Id.	43 heures.	15cc1	0cc35
10	Id.	Id.	44 heures.	On laisse rentrer de l'oxygène pur.	0cc28

Observation. — Après 22 heures d'agitation nouvelle, il n'y a plus que 6cc28 d'oxygène absorbé.

Le tableau IX montre que *lorsque la concentration en sel actif de manganèse augmente dans les rapports de 1 : 2 : 4, l'absorption de l'oxygène est respectivement de 8cc5, 8cc5 et 10cc8. Il n'y a donc aucune proportionnalité simple entre ce facteur et l'intensité de l'oxydation*, aux doses employées, dans le tableau IX.

En opérant à d'autres concentrations, on trouve évidemment un rapport différent; ce rapport est du reste masqué dans les essais de longue durée; le tableau X montre en effet que *la vitesse d'oxydation ralentit rapi-*

dement à mesure qu'on s'éloigne du moment initial de la réaction; c'est dans les premières heures que l'absorption d'oxygène est la plus intense parce que *l'oxydation de l'hydroquinone sous l'influence des sels manganeux est un phénomène limité*, comme nous allons le voir, circonstance que les mémoires de Bertrand ont négligé de mettre en lumière.

Non-continuité de l'oxydation.

On a dissous dans 250 centimètres cubes d'eau 10 grammes hyd. Bruxelles et 1 gramme de formiate manganeux. On secoue cette solution dans un flacon d'un litre en présence de 750 centimètres cubes d'air; après une heure, il y a eu formation de chinhydrone et formation de paillettes. On les sépare par filtration; il y en a 0gr39.

Le filtrat remis à nouveau sur l'agitateur pendant dix heures ne forme qu'une quantité inappréciable de chinhydrone; si on y ajoute 1 gramme de formiate manganeux, la chinhydrone n'apparaît pas même après dix heures. Il en est de même quand on ajoute avec 80 centimètres cubes d'eau, 4 grammes d'hydroquinone fraîche, et aussi quand on remplace 150 centimètres cubes du liquide par 150 centimètres cubes d'eau fraîche. Ce n'est donc pas la saturation du liquide en chinhydrone qui entrave la formation ultérieure de ce corps.

Le tableau suivant montre encore que la formation de la chinhydrone est toujours limitée ainsi que l'absorption.

TABLEAU XI.

Solution A : 15 grammes hyd. Berlin dans 320 centimètres cubes d'eau; on filtre.

1	50 c. c. A	0, témoin.	Après 22 h.	0cc02		
2	50 c. c. A	Id.	Après 72 h.	0,11		
3	Id.	5 c. c. formiate Mn à 2 °/o.	Après 22 h.	12,6	Moy. 14	Chinhydrone abondante.
4	Id.	Id.		15,4		
5	Id.	Id.	Après 48 h.	15,5	Moy 15,8	
6	Id.	Id.		16,1		

Observations. — En 22 heures, il y a eu par conséquent 14 centimètres cubes d'oxygène absorbé, et en 48 heures 15cc8 seulement. Pendant les 26 dernières heures, l'oxydation a donc été presque nulle. — 5 et 6 filtrés après 48 heures sont stérilisés à nouveau et agités à nouveau; on n'observe pas de paillettes nouvelles et une faible absorption d'oxygène se produit : soit 5cc8 pour 5 et 5cc8 pour 6. Nous verrons plus loin qu'elle peut être due à la stérilisation.

En résumé, on peut dire que *dans l'oxydation de l'hydroquinone en présence des sels hydrolysés de manganèse, la concentration du polyphénol joue un rôle essentiel; l'oxydation tend à être proportionnelle à la concentration du substratum oxydable, mais la proportionnalité simple ne se vérifie pas. La concentration du sel manganeux croît beaucoup plus vite que l'oxydation correspondante*, au moins à certaines dilutions. *L'activité des sels manganeux paraît influencée par leur mode de préparation ; de plus, l'oxydation* d'une solution d'hydroquinone en présence de manganèse *est un phénomène limité*; l'oxydation, très rapide pendant les premières heures, s'arrête rapidement.

Enfin, *il n'existe aucun rapport strict entre l'intensité de l'oxydation et l'apparition des paillettes caractéristiques de chinhydrone*, contrairement aux indications de Bertrand. Il en résulte que la méthode qui consiste à diagnostiquer l'activité d'une laccase par la formation des cristaux de tétragaïacoquinone (qui est un phénomène de même ordre au point de vue chimique), comporte une cause d'erreur fondamentale.

Nous allons, au contraire, indiquer un catalyseur de l'hydroquinone dont l'action n'est pas limitée : à savoir le noir animal.

Oxydation de l'hydroquinone en présence de noir animal.

En cherchant à obtenir des solutions d'hydroquinone absolument incolores, nous avons été tout à coup frappé de voir se former au contact du noir animal placé sur un filtre une couche abondante de chinhydrone. En y regardant de plus près, nous trouvâmes que le noir animal employé était alcalin et nous recherchâmes si l'alcali ne jouait aucun rôle dans cette action en purgeant le noir de tout alcali par lavages à l'eau chaude poursuivis pendant plusieurs jours.

Si on ajoute du charbon pulvérisé à une solution d'hydroquinone et qu'on agite celle-ci activement, on voit se former une quantité considérable de chinhydrone; en même temps l'oxygène disponible dans le flacon est absorbé et l'atmosphère de ce dernier peut être ainsi entièrement dépouillée d'oxygène. Un essai parallèle en présence d'une petite dose d'alcali montre que ce dernier n'est pas nécessaire à la réaction.

TABLEAU XII.

Solution A : 12 grammes hyd. Berlin dans 120 centimètres cubes d'eau ; on filtre.

1	40 c. c. A + 0cc2 NaOH à 1,9 % + 2 gr. noir en poudre.	Après 18 h.	30cc6 oxygène absorbé.	30cc2 oxygène disponible.
2	40 c. c. A + 0cc1 NaOH à 1,9 % + 2 gr. noir en poudre		35cc0 oxygène absorbé.	34cc6 oxygène disponible.

Solution A : 12 grammes hyd. Berlin dans 220 centimètres cubes d'eau ; on filtre.

1	40 c. c. A + 0cc1 NaOH à 1.9 %		0 gr. noir animal.		Après 4 h. 30 m. seulement.	1cc,5 oxygène
2	40 c. c. A + 0	id.	2 gr.	id.		24cc5 id.
3	40 c. c. A + 0cc1	id.	2 gr.	id.		22cc9 id.
4	40 c. c. A + 0cc1	id.	2 gr.	id.		24cc7 id.

Observation. — L'essai 1 montre la part de l'alcali seul.

Ce tableau montre nettement que l'intensité de l'oxydation par le noir animal est de beaucoup supérieure à celle que peut provoquer un sel manganeux quelconque. Si on admet que le noir animal agit dans ce cas par sa faculté d'occlusion en favorisant le contact moléculaire de l'oxygène et de l'hydroquinone, on doit conclure que la formation de chinhydrone avec oxydation de l'hydroquinone est un processus qui ne demande qu'à s'accomplir et qui reste en suspens par l'existence d'une « résistance chimique » (*chemische Widerstand* de Nernst), de la même manière que l'hydrogène et l'oxygène qui ne se combinent pas spontanément à température ordinaire peuvent le faire en présence du platine.

Ainsi l'hydroquinone est une substance *autoxydable*, ce que divers travaux avaient déjà montré (*). Aussi trouve-t-on toujours une oxydation mesurable dans les ballons d'hydroquinone témoins ; et cette oxydation est toujours plus forte après stérilisation qu'avant, sans doute parce que les substances minérales, l'alcali notamment, enlevées au verre par le liquide bouillant facilitent cette oxydation ou peut-être aussi parce que la chaleur fait subir aux molécules d'hydroquinone une dislocation qui les rend plus labiles. Aussi avons-nous supprimé la stérilisation dans nos expériences consécutives.

Mais si l'hydroquinone et ses homologues phénoliques sont des substances *autoxydables*, les expériences de Bertrand et la prétendue laccase perdent tout intérêt physiologique réel, puisque ce que nous cherchons à savoir, c'est comment des substances *non-autoxydables* brûlent dans l'organisme à température peu élevée ; pour expliquer la combustion lente des autres, il n'est pas besoin d'*oxydases !*

Dans la pensée d'étudier cette autoxydabilité de l'hydroquinone, nous avons recherché l'action de doses faibles d'alcali sur ce polyphénol. Les travaux de Manchot (**) et l'étude des développateurs photographiques ont du reste appris depuis longtemps que les corps aromatiques à fonction phénolique s'autoxydent mieux en présence d'alcali.

(*) Manchot, *Ueber die freiwillige Autoxydation*. Göttingen, 1899. (Habilitationsschrift.)

(**) Manchot, *loc. cit.*

Action de doses faibles d'alcali sur l'oxydation de l'hydroquinone.

A première vue, il existe entre l'oxydation de l'hydroquinone ou du pyrogallol sous l'influence d'alcali libre et sous l'influence des sels manganeux une différence marquée. Les phénomènes de coloration diffèrent et de plus *l'alcali ne fournit pas les produits caractéristiques de l'oxydation par le manganèse : chinhydrone et purpurogalline*. Aussi Bertrand n'a-t-il pas songé à attribuer à l'alcali un rôle dans l'oxydation produite par la laccase et par les sels manganeux.

Nous allons montrer que cette différence disparaît quand on étudie l'action de doses très faibles d'alcali et que Bertrand aurait pu songer à leur accorder une part d'intervention dans les phénomènes étudiés par lui.

TABLEAU XIII.

Solution A : hyd. Berlin, 15 grammes dans 320 centimètres cubes d'eau. *Solution B :* $5^{gr}84$ Na^2CO^3 anhydre dans 100 centimètres cubes.

	50 A.	Témoin.	$1^{cc}74$ d'oxyg. absorbé		Après 21 heures.
2	50 c. A.		26,5	id.	Après 1 —
3	id.	+ 5 c. c. B.	26,4	id.	Après 17 —
5	id.		30,4	id.	Après 21 —
	id.	1 c. c. B + 4 c. c. eau.	30,5	id.	Après 18 —
	id.	1 c. c. B + 4 c. c. eau.	27,6	id.	Après 18 —

Observations. — La concentration en Na^2CO^3 est $^1/_{10}$ n en 2, 3 et 5, $^1/_{50}$ n en 6 et 7. — Les ballons 2, 3, 5 montrent après 1 minute déjà un contenu rouge foncé; en 6 et 7, on observe la même chose après 5 minutes. Puis tous les ballons, sauf le témoin, sont devenus brun noirâtre et opaques En 5, 6, 7, tout l'O disponible a été consommé. — En 7, il s'est formé passagèrement de la chinhydrone qui a disparu sous l'action de l'alcali.

TABLEAU XIII (deuxième partie).

Solution A : 15 grammes d'hyd. Berlin dans 320 centimètres cubes d'eau. *B* : 0gr584 Na^2CO^3 dans 100 centimètres cubes d'eau.

			Concentration en Na^2CO^3.	Absorption d'oxygène en c. c.	
1	50 c. c. A.	5 c. c. B.	$^1/_{100}$ n. Na^2CO^3.	18cc5	Après 2 heures.
2	50 c. c. A.			?	Après 4 —
3	50 c. c. A.	5 c. c. B, dilué de 1 à 10 vol.	$^1/_{1000}$ n. Na^2CO^3.	2,4	Après 3 —
5	50 c. c. A.			4,55	Après 23 —
6	50 c. c. A.	5 c. c. B, dilué de 1 à 100 vol.	$^1/_{10000}$ n. Na^2CO^3.	1,2	Après 23 —
7	50 c. c. A.			3,3	Après 23 —

Observations. — En 1 et 2, il s'est formé un peu de chinhydrone. — La coloration rougeâtre en 6 et 7 indique une oxydation faible.

On a remis en marche les ballons 1, 2, 3, additionnés d'autant d'eau distillée qu'il y avait eu d'O absorbé dans l'essai ci-dessus.

En 21 heures, 1 a, dans ces conditions, absorbé 3,2 d'oxygène.
En 19 heures, 2 — — — 3,9 —
En 20 heures, 3 — — — 1,6 —

On voit que pour une concentration faible d'alcali, le phénomène d'absorption devient limité dans le temps comme cela s'est présenté pour les sels manganeux.

Au surplus, on voit encore que *les concentrations les plus minimes d'alcali suffisent pour accélérer*, de manière mesurable, l'oxydation de l'hydroquinone et *celle-ci peut alors s'accompagner d'une formation de chinhydrone* analogue à celle que provoquent les sels manganeux. L'action de l'alcali se fait encore sentir sur l'hydroquinone lorsqu'elle est insuffisante à impressionner les indicateurs ordinaires. Une solution $^1/_{100}$ n de Na^2CO^3 bleuit encore très faiblement le papier rouge de tournesol, mais une solution $^1/_{1000}$ n ne bleuit plus le papier rouge de tournesol ; c'est la concentration correspondant à 3 et 5 dans le tableau XIII (deuxième partie), où l'on voit encore qu'une concentration $^1/_{10000}$ n en Na^2CO^3 impressionne l'hydroquinone, alors qu'elle ne rosit même pas la phénolphtaléine et n'est sensible qu'au réactif éminemment délicat de Förster (mélange de vert de malachite et de lacmoïde).

Ces résultats nous amenèrent à nous demander *s'il ne pourrait exister dans la laccase de Bertrand des sels hydrolysés de sodium ou de potassium* capables d'agir sur l'hydroquinone et les autres polyphénols à côté des sels manganeux ; guidé par l'expérience des faits catalytiques, nous nous décidâmes à étudier l'action simultanée des sels manganeux et d'une alcalinité faible sur l'hydroquinone.

Oxydation de l'hydroquinone en présence de sels manganeux et d'une faible alcalinité.

Les tableaux qui suivent nous renseignent à cet égard et dénoncent un phénomène important de *couplage chimique* entre le manganèse et les ions hydroxyliques.

TABLEAU XIV.

Solution A : 15 grammes hyd. Berlin dans 320 centimètres cubes d'eau. — *B :* 0gr0584 Na^2CO^3 dans 100 centimètres cubes d'eau. — *C :* Sol. formiate manganeux (Merck) contenant 0gr026 par 5 centimètres cubes.

I.

		Oxygène absorbé en 5 heures.		
1	50 c. c. A + 0 témoin.	0cc68	Incolore.	
2	Id. + 5 c. C	4,74	Brun-rouge	sans chinhydrone.
3	Id. + 5 c. B	5,0	Brun-rouge	sans chinhydrone.
5	Id. + 5 B + 5 C	14,5	Chinhydrone très abondante.	
6	Id. + 5 eau + 5 C	4,1	Brun-rouge clair	sans chinhydrone.
7	Id. + 5 eau + 5 B	3,85	Brun-rouge clair	sans chinhydrone.

Observations. — Température : 14°7.

En 3, 5 et 7, l'alcalinité calculée en Na^2CO^3 est de 0,00292 Na^2CO^3 pour 55 c. c. ou $^1/_{1000}$ n.

La solution 5 contenant l'hydroquinone n'est alcaline ni au tournesol ni à la phénolphtaléine, mais bien au Förster.

La différence entre 2 et 3, d'une part, et 6 et 7, d'autre part, est due à la concentration différente de l'hydroquinone. En 2 et 3, l'hydroquinone occupe le volume 55; en 6 et 7, le volume 60.

II.

Solution A : 15 grammes hyd. Berlin dans 320 centimètres cubes d'eau. — *B :* 0gr0584 Na^2CO^3 dans 100 centimètres cubes d'eau. — *C :* 0gr2 formiate manganeux dans 50 centimètres cubes d'eau.

2	50 c. c. A + 5 c. c. H^2O + 5 c. c. C	2cc4 oxygène	Après 5 heures de marche.
3	Id. + 5 c c B + 5 c. c. C	9,4 id.	
4	Id. + 5 c. c H^2O + 5 c. c. B	2,9 id.	
5	Id. + 10 c. c. H^2O témoin (non stérilisé).	0,0 id.	
6	Id. + 3 c. c. H^2O + 2 c. c. B + 5 c. c. C	5,7 id.	
7	Id. + 3 c. c. H^2O + 2 c c. C + 5 c. c. B	6,6 id.	

Observations. — *En 3, il y avait déjà de la chinhydrone après 2 heures ;* en 6 et 7, après 5 heures seulement. — En 2, 4 et 5, il n'y a pas eu de chinhydrone formée.

L'alcalinité est la même que dans l'essai précédent $^1/_{1000}$ n Na^2CO^3.

La concentration en Mn $(CHO^2)_2$ = $^{145}/_2$ = 72,5 pour équivalent. — 0,00033 gramme par c. c., la concentration est $^1/_{220}$ n.

N. B. — Le témoin n'étant pas stérilisé et les autres bien, les chiffres d'absorption pour ces derniers sont un peu élevés. (Voir n° III.)

III.

Mêmes solutions qu'en II.

			Absorption en c. c d'oxygène après 5 heures.
a	40 c. c. A + 0 témoin.	Pas de stérilisation.	0 oxygène chinhydrone.
b	Id. + 5 c. c. H^2O + 5 c. c. B		1,87 id.
c	Id. + 5 c. c. H^2O + 5 c. c. C		1,35 id.
d	Id. + 5 c. c. B + 5 c. c. C		11,15 *chinhyd. abondante.*
e	Id. + 2 c. c. C + 3 c. c. H^2O + 5 B		9,1 chinhyd. abondante.
f	Id. + 5 c. c. C + 3 c. c. H^2O + 2 B		7,3 id.

Observations. — Les concentrations comme en II, mais en multipliant par $^6/_5$, puisque le volume total est ici réduit à 50, soit $^{1,2}/_{1000}$ n Na^2CO^3, et $^1/_{185}$ n $Mn(CHO^2)^2$.

IV.

Solution A : 12gr5 d'hyd. Berlin + 260 centimètres cubes d'eau. — *B :* 0gr0584 Na^2CO^3 dans 100 centimètres cubes d'eau. — *C :* 0gr2 formiate manganeux dans 50 centimètres cubes d'eau.

			Absorption d'oxygène en c. c. après 7 heures.
a	40 c. c. A + 10 c. c. d'eau (témoin).	Paillettes après 5 heures.	0
b	Id. + 5 c. c. d'eau + 5 B		1,7
c	Id. + 5 c. c. d'eau + 5 C		1,80
d	Id. + 5 c. c. B + 5 C	Paillettes après 2 h. 30 m.	14,10
e	Id. + 3 c. c. d'eau + 2 C + 5 B		9,7
f	Id. + 3 c. c. d'eau + 2 B + 5 C		8,8

Observations. — Les concentrations comme en III; en l'absence d'hydroquinone, la solution B diluée dix fois, comme en *b*, *d* et *e*, est neutre au tournesol, rosit très faiblement la phénolphtaléine. — L'hydroquinone affaiblit encore cette alcalinité; en *f*, elle est encore 2,5 fois moindre.

V.

Solution A : 13 grammes d'hyd. Berlin + 260 centimètres cubes d'eau. — *B :* Solution à 0gr0233 Na^2CO^3 pour 100 centimètres cubes d'eau. — *C :* 0gr2 formiate manganeux (Merck) dans 50 centimètres cubes d'eau.

N. B. — La solution B *diluée de 1 : 10 est neutre au tournesol et à la phénolphtaléine, à peine alcaline au Förster.*

Solution D : Solution de NaOH équivalente à la solution *B*; elle contient 0gr0176 NaOH dans 100 centimètres cubes d'eau.

1	40 A + 10 c. c. d'eau (témoin).	2 c. c. d'oxygène.	
2	40 A + 5 B + 5 c. c. d'eau.	3cc35	id.
3	40 A + 5 B + 5 C	9,3	id.
5	40 A + 5 D + 5 c. c. d'eau.	3,8	id.
4	40 A + 5 D + 5 C	10,1	id.
7	40 A + 5 C + 5 c. c. d'eau.	5,1	id.

Observations. — Température 16°8

Après 1 h. 30 m., il y a des paillettes en 3 et 4. Plus tard il s'en forme très peu en 7 à la fin de l'essai qui dure 22 heures.

On a ici la preuve directe qu'une solution de Na^2CO^3 diluée au point d'être presque neutre aux meilleurs indicateurs, n'est pourtant pas entièrement hydrolysée en NaOH et H^2CO^3, sinon l'action devrait être équivalente à celle de la solution D correspondante de NaOH.

Les tableaux ci-dessus comportent plusieurs séries d'expériences, conduisant toutes aux mêmes conclusions; ils montrent à l'évidence plusieurs faits importants.

C'est, tout d'abord, l'extrême sensibilité de la réaction oxydante de l'hydroquinone à la présence de l'alcali libre, c'est-à-dire, dans le langage physico-chimique, à la présence des ions hydroxyliques. *En présence d'une alcalinité à peine décelable* par les indicateurs usuels, *l'hydroquinone perd sa stabilité; c'est ce substratum lui-même qui est sensible à l'ion* OH, *et par antithèse à l'ion* H *et à l'acidité* qui le rend plus stable, comme nous le verrons bientôt.

En outre, *lorsqu'une faible quantité d'ions hydroxyliques viennent superposer leur action à celle d'une quantité donnée de sel manganeux actif, il se produit non point une addition de l'activité de ces deux facteurs oxydants, mais une véritable amplification mutuelle de leur activité.*

Si nous appelons a l'absorption d'oxygène fournie par une dose x d'alcali pris isolément, b l'absorption d'oxygène fournie par une dose y de manganèse, l'addition d'activité des deux facteurs fournirait $a + b$ pour une dose x agissant concurremment à une dose y.

Voyons ce que fournit l'expérience dans les cinq séries du tableau XIV. (Voir tableau XV.)

En même temps que l'augmentation considérable d'absorption, apparaît le produit caractéristique d'oxydation, la chinhydrone. De telle sorte que tout se passe, *lors de la rencontre des ions hydroxyliques en quantité infime avec les sels de manganèse en solution très diluée,* COMME S'IL SE FORMAIT DE LA LACCASE *dans le liquide.*

Le mot de *couplage chimique*, qui a, du reste, été à d'autres propos employé par les physico-chimistes pour exprimer la liaison de deux réactions, semble pouvoir désigner convenablement le phénomène : il se produit, en effet, une amplification de l'effet chimique comme quand l'effort de traction de deux composantes se transforme en un travail de rotation autour d'un point.

Enfin, le tableau XIV fait voir que *dans le couple chimique lui-même*, engendré par les ions $\overline{OH}$ et les molécules manganeuses, *la part prépondérante du travail est laissé aux ions hydroxyliques*. Montrons-le par un seul exemple.

TABLEAU XV.

Numéros.	a Oxygène absorbé par x d'OH.	b Oxygène absorbé par y de Mn.	$a+b$ Oxygène absorbé calculé par addition	$(a+b)^n$ Oxygène absorbé réel.	COEFFICIENT exprimant l'amplification d'activité mutuelle.	*Observations.*
1	3,2	3,4	6,6	13,8	2,08 $(a+b)=13,8$	Ce tableau renseigne les valeurs *corrigées* en tenant compte des absorptions dans les ballons témoins.
2	2,9	2,4	5,3	9,4	1,77	
3	1,87	1,35	3,22	11,15	3,45	
4	1,7	1,8	3,5	14,1	4,05	
5	1,35	3,1	4,45	9,3	2,09	
5′	1,8	3,1	4,9	10,1	2,07	

Dans l'essai 3, par exemple, après avoir déterminé les absorptions d'oxygène correspondant à a, b et $a + b$, on a pris successivement $\frac{a}{2,5} + b$ et $a + \frac{b}{2,5}$, et on trouve pour toutes ces valeurs :

$$a = 1,87 \qquad b = 1,35 \qquad (a + b) \text{ trouvé} = 11,15$$

$$\frac{a}{2,5} + b = 7,3 \qquad \frac{b}{2,5} + a = 9,1$$

d'où

$$\frac{a}{2,5} + b + a + \frac{b}{2,5} = 7,3 + 9,1 = 16,4$$

ou

$$16,4 - 11,1 = \left(\frac{a}{2,5} + b + a + \frac{b}{2,5}\right) - (a + b) = \frac{a}{2,5} + \frac{b}{2,5} = 5,3$$

or,

$$\frac{a}{2,5} + b - \left(\frac{a}{2,5} + \frac{b}{2,5}\right) = 7,3 - 5,3 = 2 = b - \frac{b}{2,5}$$

ou

$$2 \times 2,5 = 2,5\,b - b = 1,5b = 5$$

ou

$$b = 3,35$$

de même

$$\frac{b}{2,5} + a - \left(\frac{a}{2,5} + \frac{b}{2,5}\right) = 9,1 - 5,3 = 3,8 = a - \frac{a}{2,5}$$

ou

$$3,8 \times 2,5 = 2,5a - a = 1,5a = 9,5$$

d'où

$$a = 6,35$$

On trouve donc pour a dans le couple 6.35 et pour b,

3.33; *a* est donc environ deux fois supérieur à *b*. $a + b$ ainsi calculé diffère un peu de 11.1 à cause de la variation résultant du changement de concentration quand *a* devient $\frac{a}{2.5}$ ou quand *b* est réduit à $\frac{b}{2.5}$.

La part des ions $\overline{OH}$ est donc près de deux fois égale à celle des particules manganeuses. Or, il faut encore tenir compte que dans l'expérience la concentration des $\overline{OH}$ et des sels manganeux est différente; la première est 0.0012*n* en admettant, ce qui n'est pas tout à fait exact, l'hydrolyse complète de Na^2CO^3; la deuxième est 0.0054*n*; il y a donc environ 4,5 molécules de formiate manganeux pour deux ions hydroxyliques. Et comme $\overline{OH}$ agit approximativement deux fois plus activement, *on peut en déduire qu'une molécule de formiate manganeux est 4,5 fois moins active dans l'oxydation de l'hydroquinone qu'un ion hydroxylique ou une demi-molécule de* Na^2CO^3. Ce raisonnement vaut pour l'expérience n° 3 du tableau XIV. Le rapport d'activité pourrait s'élever ou s'abaisser à d'autres concentrations. Mais *l'importance accordée par Bertrand au manganèse n'en paraît pas moins menacée.*

Rôle des ions hydroxyliques dans la laccase de Bertrand.

Il suffit, en effet, d'après ce qui précède, de la présence d'une alcalinité même très faible dans le latex, pour que des ions $\overline{OH}$ soient incorporés au précipité de laccase lors du traitement alcoolique et pour que l'activité du manganèse incorporé au précipité soit énormément renforcée.

Si la laccase de Bertrand est, même très faiblement,

chargée d'alcali, sa capacité oxydante spéciale s'explique fort simplement par ce que nous venons de constater. Nous montrerons, en effet, tantôt qu'avec le secours des ions hydroxyliques, nous avons pu préparer des laccases artificielles jouissant de facultés égales à celles de la laccase de l'arbre à laque. Mais *il s'agit de savoir si cette dernière est oui ou non chargée d'alcali en petite quantité.*

M. Bertrand serait mieux à même que personne de nous éclairer sur ce point, puisqu'il possède des quantités notables de laccase et peut s'approvisionner en latex; nous renouvelons donc publiquement la demande que nous lui adressions personnellement il y a quelque six mois. Nous croyons cependant pouvoir dès maintenant répondre déjà affirmativement grâce à l'envoi d'une toute petite quantité de laccase que M. Bertrand a bien voulu nous faire.

1° Un grain de laccase ajouté à 1 centimètre cube d'eau fournit une solution bleuissant nettement le Förster; peut-être une solution plus concentrée agirait-elle même sur la phénolphtaléine?

2° Un grain de laccase exposé à la flamme sur un fil de platine montre du reste une vive coloration du sodium, et il n'y a rien d'étonnant qu'il se trouve parmi les composés sodiques présents, un sel hydrolysé à réaction alcaline [$Na^2 CO^3$, $Na^3 (PO^4)^2$, etc.].

3° Enfin, le récent travail de Bertrand lui-même « sur la sensibilité de la laccase à certains acides (*) » vient apporter une preuve indirecte de l'alcalinité de la laccase.

(*) G. Bertrand, *Recherches sur l'influence paralysante exercée par certains acides sur la laccase.* (Annales de l'Institut Pasteur, t. XXI, septembre 1907.)

Dans ce travail, l'auteur montre que des quantités extrêmement faibles d'acides minéraux ou organiques, capables de faire virer l'hélianthine, suffisent à paralyser complètement ou partiellement l'oxydation du gaïacol en solution aqueuse par la laccase. La solution aqueuse de gaïacol à 2 % additionnée au contact de l'air de quantités infimes de laccase, se colore rapidement en rouge et il s'y dépose, après quelques heures, des cristaux de tétra-gaïacoquinone; en présence d'une acidité très faible, la solution reste incolore.

Bertrand s'exprime comme suit à cet égard : « Mes expériences conduisent à envisager la laccase comme une combinaison métallique facilement hydrolysable, une sorte de sel se dédoublant par l'action de l'eau, d'une part, en un corps organique comparable à un acide faible, de l'autre en oxyde ou plutôt en hydroxyde manganeux

$$R''Mn + 2H^2O = R''H^2 + Mn(OH)^2.$$

« Cette conception laisse prévoir que les acides doivent en général intervenir d'une manière défavorable sur le processus oxydant de la laccase. Il est clair en effet qu'un corps électro-négatif d'énergie supérieure au complexe $R''H^2$ doit déplacer celui-ci et donner en s'emparant du manganèse un système moins facilement hydrolysable, moins apte par conséquent à entrer en jeu dans la série catalytique de réaction. Bien plus, comme l'activité du complexe $R''H^2$ est sans doute très faible, la sensibilité de la laccase aux acides doit être très grande. »

Cette théorie de Bertrand exigerait évidemment, pour être acceptée, que des sels manganeux d'acides faibles (succinate, lactate, borate, etc.) produisissent l'oxydation du gaïacol avec une rapidité variable, comme ils le font notamment pour l'hydroquinone et le pyrogallol, etc.

Or il n'en est rien; ici, Bertrand a négligé de vérifier sa théorie par la base. Des solutions de gaïacol à 2 %, contenant des gaïacols de provenances diverses, additionnées de quantités variées de sels manganeux divers (borate, lactate, etc.) et de quantités, variables aussi, d'alcali, ou exemptes d'alcali, n'ont présenté ni la coloration caractéristique ni à plus forte raison la cristallisation consécutive de tétragaïacoquinone. Or, les mêmes solutions de gaïacol réagissent rapidement sous l'influence de minimes quantités de laccase. Ce n'est donc point le gaïacol qui est en faute, mais la théorie de Bertrand. Nous n'avons pas eu le temps de déterminer jusqu'ici la nature de l'élément présent dans la laccase, qui oxyde le gaïacol en présence d'une alcalinité très faible et peut-être aussi de manganèse; quoique dans une expérience que nous n'avons pu reproduire, un sel ferreux a engendré, en présence d'alcali et de gaïacol, des phénomènes de coloration fort rapprochés de ceux que donne la laccase. Mais il semble qu'il faut admettre que l'alcali concourt, avec un élément de la laccase autre que le manganèse, à engendrer ces phénomènes. *Dès lors, les expériences sur* « la sensibilité de la laccase » aux acides (ne vaudrait-il pas mieux dire « sur la sensibilité du gaïacol » et des polyphénols aux acides?) *montrent, avant tout, la nature complexe de la laccase* et l'erreur de Bertrand que nous avons signalée ci-dessus.

Sensibilité de l'hydroquinone aux acides.

Les expériences suivantes, qui montrent comment l'hydroquinone s'oxyde en solution acide, en présence et en l'absence de sels manganeux, serviront à renforcer les conclusions du paragraphe précédent.

TABLEAU XVI. — *Influence de* H^2SO^4.

Solution A : 11 grammes hydroquinone Berlin + 200 centimètres cubes d'eau ; on filtre.

I.

		Oxygène absorbé.	Acidité.
		—	—
a	40 A + 10 eau, témoin neutre.	0cc1	0
b	40 A + 9.5 eau + 0.5 H^2SO^4 $^1/_{10}$ n témoin acide.	0	$^1/_{1000}$ n
c	40 A + 4.5 eau + 0.5 H^2SO^4 $^1/_{10}$ n + 5 c. c. formiate Merck à 1 °/o.	0,9	$^1/_{1000}$ n
d	40 A + 5 eau + 0 H^2SO^4 $^1/_{10}$ + 5 c. c. formiate Merck à 1 °/o.	5,8 (chinhyd.)	0 (celle du form.)
e	40 A + 4 eau + 1 H^2SO^4 $^1/_{10}$ + 5 c c. formiate Merck à 1 °/o.	0,2	$^1/_{500}$ n

Observations. — Température : 16°8; 19 heures de marche.
Le témoin hydroquinone acide ($^1/_{1000}$ n) n'a donné aucune absorption.

II.

Comparaison de H^2SO^4 *et de* $C^2H^2O^4$.

***Solution* A** : Comme dans l'essai 1.

			Absorption.	Acidité.
a	40 A + 5 c. c. formiate à 1 °/o + 5 H^2SO^4 $^1/_{100}$ n.	22 heures de marche.	3cc5 d'oxyg.	$^1/_{1000}$ n.
b	40 A + 5 c. c formiate à 1 °/o + 2.5 H^2SO^4 $^1/_{100}$ n.	Très peu chinhydrone.	3,7 »	$^1/_{2000}$ n.
c	40 A + 5 c. c. formiate à 1 °/o + 5 $C^2H^2O^4$ $^1/_{100}$ n.		5,0 »	$^1/_{1000}$ n.
d	40 A + 5 c c. formiate à 1 °/o + 2.5 $C^2H^2O^4$ $^1/_{100}$ n.		4,47 »	$^1/_{2000}$ n.
f	40 A + 5 c. c. formiate à 1 °/o + 5 c. c. eau.	Chinhydrone abondante.	7,7 »	0 n.

III.

Comparaison de H^2SO^4 *et* $C^2H^2O^4$ *avec lactate manganeux.*

a	40 A + 5 c.c. lactate 1 °/o + 5c c. H^2SO^4 $^1/_{100}$ n.	Marche : 19 h. 15 m. Température : 17°	o chinhydrone.	1.35
b	40 A + id. + 2cc5 id. + 2cc5 d'eau.			3.0
c	40 A + id. + 5 c.c. id.			3.1
d	40 A + id. + 2,5 id. + 2,5 d'eau.			3.6
e	40 A + id. + 5 d'eau.	Chinhydrone abondante.		6.7

Nous aurons à revenir à la fin de cette étude sur cette question de l'acidité.

Préparation de laccase artificielle active contenant des ions $\overline{OH}$.

Cette opération était facile à mener à bien en tenant compte des faits acquis et exposés dans ce qui précède. Voici quelques exemples qui en montrent la réussite complète en même temps que l'activité notable des précipités obtenus.

a) *Laccase gomme.*

10 grammes gomme arabique pure dissous dans 50 centimètres cubes d'eau; on ajoute 1 gramme formiate manganeux Kahlbaum et $0^{gr}4$ de Na^2CO^3 cristallisé; on filtre sur un tampon de laine de verre, puis on précipite par l'alcool; le précipité filtré, exprimé dans un linge, est redissous dans 30 centimètres cubes d'eau; on filtre à nouveau, reprécipite par l'alcool, exprime, lave à l'alcool et sèche. Rendement $4^{gr}45$ de laccase artificielle.

En solution concentrée, cette laccase rosit la phénolphtaléine. $0^{gr}3$ dissous dans 50 centimètres cubes d'eau donnent une solution neutre à la phénolphtaléine, mais alcaline au Förster. Coloration du gaïac nette.

TABLEAU XVII. — *Activité du précipité.*

Solution A : 12 grammes hydroquinone Berlin dans 120 centimètres cubes d'eau; on filtre.

1	0gr1 laccase + 40 c.c A.	Marche : 18 heures.	7cc55 d'oxygène absorbés.	Moins de chinhydrone.
2	0,3 id. + id.	Température : 15°.	16,5 d'oxygène absorbés.	Chinhydrone abondante.

Après 50′ de marche, des paillettes apparaissaient déjà dans le ballon 2.

L'activité de notre laccase est du même ordre que celle de la laccase de Bertrand.

b) *Laccase-dextrine.*

On prépare ici simultanément deux laccases à alcalinités différentes, ce qui montrera l'influence de l'alcalinité. Dans l'essai B), on emploie comme source de $\overline{OH}$ le sel peu alcalin : acétate sodique.

A) 45 c. c. de solution à 1 °/o de formiate manganeux Merck + 5 grammes dextrine + 0gr2 Na^2CO^3.

B) 45 c. c. de solution à 1 °/o de formiate manganeux Merck + 5 grammes dextrine + 1 gramme acétate sodique.

Traitement par double précipitation comme pour la laccase gomme.

A) donne un précipité colorant nettement le gaïac.

B) donne un précipité colorant imperceptiblement le gaïac.

TABLEAU XVII (Suite). — *Activité comparée de A et B.*

1	40 c. c. sol $x + 0,2$ A.	12cc4 oxygène absorbé.	Chinhydrone abondante.
2	25 c. c. sol. $x + 0,2$ A.	12cc7 id.	
3	40 c. c. sol. $x + 0,2$ B.	2cc3 id.	Chinhydrone malgré faible absorption.
4	25 c. c. sol. $x + 0,2$ B.	1cc2 id.	

Observations. — Température : 18°. — Marche de 22 heures.

La solution x contient 9 grammes d'hydroquinone Berlin dans 170 centimètres cubes d'eau.

Ainsi une concentration en laccase double en 1) de celle qui règne en 2) fournit la même absorption après 22 heures; cela provient de la durée de l'essai. Tout se passe après un temps assez long comme si la valeur de l'absorption dépendait de la quantité totale de laccase, tandis que la concentration influe surtout sur la vitesse. L'essai suivant, effectué avec une laccase (dextrine et amidon) moins active, montre qu'il en est bien ainsi.

TABLEAU XVIII.

Solution A : 21 grammes d'hydroquinone Berlin dans 400 centimètres cubes d'eau; on filtre.

1	40 A + 0gr2 laccase.	Arrêt après 2 h. 30.	2cc6 oxygène.	Moy. 2cc65.
3			2cc7 id.	
8	20 A + 0gr2 laccase.	Arrêt après 2 h. 30.	4cc0 oxygène.	Moy. 4cc1.
9			4cc2 id.	

Observation. — Ici, l'absorption est proportionnelle à la concentration de laccase.

TABLEAU XVIII (*suite*).

4 2	40 A + 0gr2 laccase.	Arrêt après 20 heures.	4cc8 oxygène. 4cc7 id.	Moy. 4cc75.
10 7	20 A + 0gr2 laccase.	Arrêt après 20 heures.	4cc2 oxygène. 4cc7 id.	Moy. 4cc5.

Observation. — Les huit ballons contiennent de la chinhydrone.

Nous avons préparé d'autres laccases actives, avec divers substratums colloïdaux. La gomme arabique a l'avantage de se redissoudre rapidement.

Nous croyons inutile d'encombrer cet exposé de données complémentaires. Ajoutons que le pyrogallol s'oxyde évidemment sous l'action de nos laccases comme sous l'action des laccases de Bertrand, et qu'elles n'agissent pas sur le gaïacol, faute de l'élément étranger qui intervient dans cette oxydation.

Concluons seulement que la laccase de Bertrand n'est pas plus « naturelle » que les nôtres et que l'hypothèse qui en fait une diastase oxydante est ainsi démontrée fausse; la « laccase » de Bertrand est une création artificielle engendrée par la précipitation alcoolique.

Activité oxydante propre au manganèse dans les sels manganeux.

Ayant montré le rôle prépondérant que jouent dans les précipités qualifiés du nom de « laccase », une quantité faible d'ions hydroxyliques, nous nous sommes

demandé s'ils ne pourraient influencer la capacité oxydante des sels manganeux eux-mêmes (dont, pour éviter toute complication, nous avons admis jusqu'ici la pureté). *L'effet que nous avons observé de la part des divers sels manganeux est-il réellement dû aux particules manganeuses?*

Cette question, malgré son caractère paradoxal apparent, n'est pas injustifiée si l'on tient compte de l'impureté éventuelle des produits dénommés purs et de l'énorme activité catalytique des ions hydroxyliques.

Rappelons que l'activité n'a été observée par Bertrand que chez les sels manganeux d'acides faibles et que l'ordre d'activité des sels étudiés par lui s'est trouvé modifié, dès le début, dans nos expériences.

Or, les sels dérivés d'acides faibles sont préparés par l'hydrate manganeux précipité à l'aide d'alcali, et le pouvoir d'adsorption de cet hydrate pour l'alcali (on sait qu'il en est de même pour les hydrates de nickel et de cobalt, par exemple) est très considérable; il est pratiquement impossible d'obtenir par cette voie un hydrate manganeux qui soit absolument exempt d'alcali. Lors de la redissolution par les acides, si l'acide est fort (H^2SO^4, HCl, HNO^3), il se formera un sel neutre aux dépens de l'alcali; si l'acide est faible, il se formera un sel hydrolysable d'alcali qui sera mêlé au sel manganeux cherché et dès lors celui-ci pourra présenter une réaction faiblement alcaline; or, on sait que dans le premier cas il n'y a pas d'activité notable et que dans le second cas seulement la capacité oxydante du sel est réelle d'après Bertrand. Dès lors, l'influence des acides sur l'hydroquinone ou le pyrogallol en présence de sels manganeux

se comprendrait beaucoup plus clairement que dans la théorie de Bertrand.

Les expériences suivantes montreront l'exactitude de nos déductions :

1° Une présomption forte en leur faveur est donnée par l'examen des sels manganeux dits purissimes (Kahlbaum ou Merck) au fil de platine incandescent; ils développent en général *très fortement* la coloration du sodium;

2° En s'adressant à des sels dits purissimes d'origines diverses, on peut également constater qu'à dose équivalente, un sel de même nom, venant de deux sources différentes, peut exercer une action très variable, ce qui s'explique très bien par la dose d'impuretés actives présentes dans chaque sel.

Dans l'ordre décroissant d'activité des solutions équivalentes, on peut ranger, par exemple, les sels comme suit :

(m) succinate manganeux Kahlbaum, (m') formiate Kahlbaum, (m'') formiate Merck, (m''') succinate Merck (*très peu actif*).

Or, si l'on examine à l'aide d'indicateurs colorés ces quatre sels, on s'aperçoit que les trois premiers sont nettement alcalins au réactif de Förster, le dernier seul, qui est inactif ou presque, est acide au même réactif.

On trouve par exemple : $0^{gr}2$ formiate Merck ont une alcalinité qui nécessite $4^{cc}1$ H^2SO^4 $^1/_{100}$ n; $0^{gr}2$ formiate Kahlbaum ont une alcalinité qui nécessite $5^{cc}0$ H^2SO^4 $^1/_{100}$ n; $0^{gr}2$ succinate Kahlbaum ont une alcalinité qui nécessite $42^{cc}0$ H^2SO^4 $^1/_{100}$ n; *l'activité croît donc en même temps que l'alcalinité.*

Et pour le succinate Merck, on trouve, au contraire,

une acidité réelle correspondant à 2cc34 de NaOH *n*; il contient donc un grand excès d'acide succinique libre et il est inactif! Voilà une *preuve directe de la faible activite propre des sels manganeux d'acides faibles.*

Le tableau suivant contient des renseignements précis à cet égard; *m*, *m'*, *m''*, *m'''* symbolisent les quatre sels d'activité décroissante cités ci-dessus.

TABLEAU XIX.

I. — *Comparaison de l'activité des deux succinates* m *et* m'''.

a	40 c. c. sol. hydroquinone	+ 0gr1 *m*.	27cc2 d'oxygène.
b	Id.	+ 0gr1 *m* + 1 gr. HCOONa.	18cc96 id.
c	Id.	+ 0gr1 *m'''*.	1cc86 id.
d	Id.	+ 0gr1 *m'''* + 1 gr. HCOONa.	3cc36 id.

Observations. — 17 h. 45 m. de marche.

En 1 heure, chinhydrone abondante en *a*. En *b*, *c*, *d*, pas de chinhydrone.

II. — *Comparaison de deux formiates* m' *et* m''.

a	40 c. c. sol. hydroquinone	+ 8 c. c, *m''*	14cc8 d'oxygène.
b	Id.	+ 8 c. c. *m''* + 1 gr. HCOONa.	13cc4 id.
c	Id.	+ 8 c. c. *m'*	15cc2 id.
d	Id.	+ 8 c. c. *m'* + 1 gr. HCOONa.	13cc1 id.

Observations. — Marche de 22 heures.

En *a*, chinhydrone très abondante; en *b*, chinhydrone peu abondante; en *c*, chinhydrone abondante; en *d*, pas de chinhydrone.

III. — *Comparaison des deux succinates m et m''' et de l'influence qu'exerce sur leur action l'H^2SO^4.*

Solution A : 11 grammes hyd. Berlin, dans 220 centimètres cubes d'eau ; on filtre.

1	40 c. c. A + 10 c. c. succinate à 0.5 °/o Kahlbaum *m* .	18cc9 d'oxygène.
2	40 c. c. A + 10 c. c. succinate à 0.5 °/o Kahlbaum *m* + 1 c. c. H^2SO^4 $^1/_{10}$ n.	4cc8 id.
3	40 c. c. A + 10 c. c. succinate à 0.5 °/o Kahlbaum *m* + 1 c. c. H^2SO^4 $^1/_{10}$ n.	4cc8 id.
4	40 c. c. A + 10 c. c. succinate à 0.5 °/o Merck *m'''* + 0.	1cc2 id.
5	40 c. c. A + 10 c. c. succinate à 0.5 °/o Merck *m'''* + 1 c. c. H^2SO^4 $^1/_{10}$ n.	0cc2 id.

Observations. — En 1, chinhydrone très abondante ; en 2 et 3, chinhydrone peu abondante ; en 4 et 5, pas de chinhydrone.

Outre la vérification de l'ordre décroissant des activités *m*, *m'*, *m''*, *m'''* en relation avec l'alcalinité décroissante des sels manganeux, le tableau XIX fournit encore la preuve de nos assertions par l'influence qu'exercent sur l'activité des deux succinates l'H^2SO^4, d'une part, à dilution très grande, et le formiate de soude, sel très légèrement acide au Förster (acidité correspondant à 3 centimètres cubes NaOH $^1/_{1000}$ *n* pour 0gr2 du sel), sur l'activité des formiates et succinates manganeux.

On voit, en effet, l'H^2SO^4 abaisser l'oxydation provoquée par le succinate Kahlbaum (alcalin) en neutralisant

une partie de ses $\overline{OH}$ et diminuer encore la très faible action due au succinate (acide) de Merck.

Quant à l'action du formiate sodique (très peu acide), elle est également conforme aux prévisions; elle diminue faiblement l'action des deux formiates manganeux (tous deux alcalins) et celle du succinate (alcalin) de Kahlbaum, tandis qu'elle augmente l'activité faible du succinate (acide Merck). Dans le cas des succinates, il intervient un facteur de variation spécial, la modification d'équilibre due à la réaction : succin. Mn + formiate Na $\rightleftarrows$ formiate Mn + succin. Na.

Accessoirement on voit aussi que le formiate sodique empêche la formation de la chinhydrone, sans influencer fortement l'absorption dans le cas des formiates manganeux.

On doit donc conclure qu'*en réalité l'activité propre du manganèse*, que M. Bertrand a déclarée prépondérante, *doit être attribuée, pour une très grande part au moins, à l'action des ions hydroxyliques qui voisinent avec les molécules manganeuses*. La préparation de sel manganeux absolument exempt d'alcali permettrait seule d'établir exactement le taux réel de la capacité oxydante du manganèse seul. Nous nous proposons de tâcher de réaliser cette préparation par l'électrolyse, à l'aide d'une anode de manganèse et d'une solution d'acide faible. Nos expériences sur le couplage chimique de Mn et des $\overline{OH}$ semblent indiquer que cette capacité, quoique faible, existe réellement.

On peut se demander à bon droit si le rôle des impuretés alcalines ne suffit pas à expliquer l'obtention de chinhydrone à l'aide d'acétate de nickel préalablement

chauffé, d'acétate de cérium et de lauthane, ou d'acétate de mercure, réalisée par Job (*) et Dimroth (**).

Conclusions et sommaire des résultats.

Dans le cours du précédent mémoire nous avons à dessein négligé d'examiner l'action de la température sur la laccase, comptant étudier de manière approfondie, non seulement pour la laccase, mais pour d'autres ferments, l'influence de cet agent. Nous croyons qu'on se base trop facilement sur l'annulation d'activité chimique par la chaleur pour affirmer l'origine diastasique de cette activité; nous avons déjà fait ressortir ce point de vue dans notre premier mémoire.

Dans le cas particulier de la laccase, la résistance à la chaleur est très grande : l'activité de la laccase ne disparaît qu'à 100°; le critérium du caractère diastasique fait donc défaut par lui-même. Au surplus, les solutions aqueuses de sels manganeux d'acides faibles se décomposent déjà à 100°; à plus forte raison dans un milieu colloïdal complexe entrevoit-on le mécanisme de l'affaiblissement des capacités oxydantes des prétendues laccases par la chaleur.

Nous nous sommes borné dans ce mémoire à formuler succinctement nos résultats, ne voulant pas abuser de l'hospitalité que nous accordait l'Académie dans ses

---

(*) Job, *Comptes rendus*, t. CXXXVI, p. 45.

(**) Dimroth, *Berichte der deutschen chem. Gesellschaft*, Bd 35; p. 2853.

publications; mais nous comptons montrer dans un mémoire spécial le parti qu'on peut tirer de ces résultats pour l'étude des actions diastasiques. Ces réserves faites, contentons-nous de formuler en terminant le résumé des données expérimentales contenues dans ce mémoire :

1° *Les propriétés générales des colloïdes et les lois de leur floculation suffisent à expliquer l'incorporation d'un sel manganeux (ou d'un autre sel) — préexistant dans une solution — (ou un latex végétal) — à l'état indépendant — à un précipité colloïdal formé par l'alcool dans cette solution.* A ce titre, *la « laccase » de Bertrand est la « figure composite » chimique de tous les éléments du latex; parmi ceux-ci il en est qui peuvent exercer sur l'oxydation par le manganèse une influence catalytique notable; l'ion hydroxylique figure au premier rang parmi eux;*

2° *L'alcalinité faible peut produire des phénomènes d'oxydation en tout comparables à ceux que provoquent les sels manganeux actifs vis-à-vis de certains polyphénols;*

3° *Quand une dose d'alcali et une dose de sel manganeux, toutes deux très faibles, agissent concurremment vis-à-vis de l'hydroquinone (ou du pyrogallol) en voie d'oxydation, il se produit un véritable couplage chimique de ces deux catalyseurs;*

4° *Ce phénomène permet de former par voie de précipitation alcoolique répétée, dans une solution un peu alcaline de sel manganeux additionnée de gomme ou de dextrine, une laccase artificielle possédant une activité oxydante comparable à celle des laccases de Bertrand; cette laccase bleuit le gaïac comme une oxydase proprement dite;*

5° *La laccase de Bertrand est faiblement alcaline; des doses extrêmement minimes d'acide paralysent son activité*

(Bertrand, 1907); *son activité surprenante est donc attribuable, au moins pour une grande part, à cette alcalinité et au couplage susdit;*

6° *La réaction oxydante du gaïacol (formation de tétragaïacoquinone) n'est pas explicable par l'action des éléments manganeux ou alcalins de la laccase. Un élément présent dans la laccase et négligé par Bertrand intervient dans cette oxydation. C'est peut-être le fer?*

7° *Dans la laccase, les molécules manganeuses agissent avec beaucoup moins d'intensité que les ions hydroxyliques pris à nombre égal;*

8° *L'activité des sels manganeux eux-mêmes, pris à l'état de prétendue pureté, dépend avant toute chose de leur teneur accidentelle en ions hydroxyliques. La hiérarchie oxydante définie par Bertrand pour les sels manganeux n'a aucune existence réelle;*

9° *Le rôle des impuretés explique aussi sans doute la formation de chinhydrone observée à l'aide d'autres sels de mercure, lanthane, nickel, etc., par Job et Dimroth;*

10° *La laccase en tant que diastase oxydante n'existe donc pas;*

11° *L'explication des phénomènes du laquage — durcissement et noircissement du latex des arbres à laque — s'éclaire d'une lumière nouvelle par l'intervention combinée des sels manganeux et des sels alcalins à réaction alcaline présents dans le latex. L'intervention d'une diastase est absolument inutile;*

12° *On a défini approximativement les conditions principales de l'oxydation de l'hydroquinone par les sels manganeux, en ce qui touche la concentration du substratum et du catalyseur, la vitesse d'oxydation, etc. La formation*

de la chinhydrone solide est un phénomène accessoire réglé par des facteurs catalytiques spéciaux ;

13° *Le noir animal lavé à fond forme en abondance et avec une grande rapidité la chinhydrone, quand on l'agite au contact d'une solution d'hydroquinone et d'air ou d'oxygène.*

En terminant ce travail, nous tenons à exprimer à M. le Professeur Héger toute notre gratitude pour les encouragements éclairés et bienveillants qu'il nous prodigue au cours de nos travaux.

Travail de l'Institut Solvay (2e mémoire).

Détermination du poids moléculaire de l'oxyde uraneux (1) ;
par W. Oechsner de Coninck.

J'ai repris mes expériences sur l'oxyde uraneux, et j'ai déterminé à nouveau son poids moléculaire, en partant du chlorure d'uranyle, que j'ai décomposé par un courant d'hydrogène.

Afin d'éviter autant que possible l'action destructive de la vapeur d'eau atmosphérique, j'ai conservé le chlorure d'uranyle dans une atmosphère renfermant un peu de chlore libre, et j'ai fait les pesées dans la nacelle de porcelaine, au moment où l'appareil réducteur était prêt à fonctionner.

---

(1) Institut de chimie. Montpellier.

J'ai effectué dix déterminations; trois d'entre elles me paraissent dignes d'être retenues. Les calculs ont été faits en partant de la proportion

$$\frac{P}{P'} = \frac{341,5}{x}$$

($341,5 = 270,5 + 71 =$ P. M. de UO^2Cl^2)

I.	$P = 0^{gr}523$;	$P' = 0^{gr}414$;	P. M. trouvé $= 270.3$
II.	$P = 0^{gr}576,5$;	$P' = 0^{gr}456$;	P. M. trouvé $= 270.1$
III.	$P = 1^{gr}048$;	$P' = 0^{gr}83$;	P. M. trouvé $= 270.4$

Les autres expériences m'ont donné des nombres supérieurs à 271, dont quelques-uns se rapprochaient même de 272. En résumé, cette nouvelle série d'expériences a donné des résultats plus satisfaisants que la série précédente, dont les résultats ont été communiqués à l'Académie royale dans sa séance de décembre 1907.

Montpellier, le 27 janvier 1908.

OUVRAGES PRÉSENTÉS.

—

Rutot (*A.*). Un grave problème. Une industrie humaine datant de l'époque oligocène. Comparaison des outils avec ceux des Tasmaniens actuels. Bruxelles, 1907; extr. in-8° (46 p.).

Janne (*Henry*). Mouvement de rotation d'un corps de forme variable. Liége, 1908; in-8° (24 p.).

Fontaine (*Th.*). Exposé des théorèmes du Livre Ier de la géométrie dans un ordre nouveau et sans postulatum. Bruxelles, 1907; in-8° (28 p.).

—

Halle. *Kaiserl. Akademie der Naturforscher*. Abhandlungen, 73. 85. 86. und 87. Bände. 1906-1907; 4 vol. in-4°.

Hambourg. *Sternwarte*. Mitteilungen, nr 9. 1907.

Bosna-Seraï. *Gouvernement de Bosnie et d'Herzégovine*. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an den Landesstationen in 1904 und 1905. 1907; in-4°.

—

Balch (*Thomas-Willing*). The proposed international tribunal of arbitration of 1623. Philadelphie, 1907; in-8° (10 p.).

James (*William*). Louis Agassiz : Words spoken at the reception of the American Society of naturalists. Cambridge, 1897; in-8° (12 p.).

BUENOS-AYRES. *Museo nacional*. Anales, tomo VII, 1907. Archivos, vol. XIII.

—

Edridge-Green (*F.-W.*). Observations on hue perception. Londres, 1906; extr. in-8° (6 p. et 4 pl.).

— Observations with Lord Rayleigh's colour-mixing apparatus. Londres, 1906; extr. in-8° (7 p.).

LONDRES. *Solar physics Observatory*. Note on the permanenty of some photovisual lenses; by William Lockyer. 1907; in-8° (11 p. et 3 pl.).

ADELAÏDE. *Royal Society of Australia*. Transactions and proceedings, vol. XXXI. 1907.

GREENWICH. *Royal Observatory*. Observations and results, 1905. In-4°.

LE CAP. *Observatory*. Annals, vol. XII, part 4. 1907; in-4°.

—

Lebon (*Ernest*). Géométrie descriptive et géométrie cotée, conforme aux programmes du 27 juillet 1905 pour l'enseignement secondaire. Classes de mathématiques A et B. Paris; in-8° (VI-180 p.).

— Pour la recherche rapide des facteurs premiers des grands nombres. Paris; extr. in-8° (7 p.).

—

NAPLES. *R. Istituto d'Incoraggiamento*. Atti, vol. LVIII. 1907; in-4°.

MDCCCVI — MCMVI. Ricerche storiche di E. Oreste Mastrojanni. 1907; in-4°.

— Accademia Pontaniana, vol. XXXVII, 1907.

ROME. *Società delle Scienze*. Memorie, tomo XIV, 1907. In-4°.

BOLOGNE. *R. Accademia delle Scienze*. Memorie, tomo II e III. 1905-1906; in-4°.

—

BATAVIA. *Natuurkundige Vereeniging*. Tijdschrift, deel LXVI. 1907.

— *Observatory*. Cloud-observations at Batavia, 1903-1905-1907; in-4°.

— Air-pressure temperature, humidity and wind on days of bright sunshine at Batavia, 1889-1906 (Van Bemmelen). 1907; in-4°.

— List of magnetic disturbances recorded at the Batavia Observatory, 1880-1899 (Van Bemmelen). 1907; in-4°.

—

Commission royale pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg, 1899-1901 : Mission russe. Tome I, Géodésie. 3e section, *A*. Mensuration de la base avec l'appareil de Jäderin. *B*. Réductions aux centres. *C*. Réseau de la base.

4e section, *B*. Détermination des attractions locales sur les points astronomiques du réseau principal des triangles.

5e section. Intensité de la pesanteur. Saint-Pétersbourg, 1904-1905; 5 cahiers in-4°.

—

Cabanyes (*Isidore*). Poliseccion grafica del anguilo. Madrid, 1908; in-8° (13 p., fig.).

San Fernando. *Instituto y Observatorio de Marina*. Almanaque náutico para 1909.

Madrid. *Observatorio*. Anuario, 1908.

Coire. *Naturforschende Gesellschaft*. Jahresbericht, Band 48 und 49. 1906-1907.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — N° 3.

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 7 mars 1908.

M. Julien Fraipont, directeur.

M. le chevalier Edm. Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. J. Deruyts, *vice-directeur;* Éd. Van Beneden, C. Malaise, Ch. Van Bambeke, Alfr. Gilkinet, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, M. Mourlon, P. De Heen, C. le Paige, Léon Fredericq, Neuberg, A. Jorissen, Ch. Francotte, Paul Pelseneer, A. Gravis, Aug. Lameere, G. Cesàro, *membres;* F. Swarts, J. Massart, A. Rutot, V. Willem et Alex. de Hemptinne, *correspondants.*

MM. Henry et Durand écrivent pour motiver leur absence.

M. Deruyts, en prenant pour la première fois, cette année, place au bureau, remercie de l'honneur d'avoir été élu directeur pour l'exercice 1909.

M. Fraipont, devant l'assemblée debout, notifie la perte que la Classe vient de faire en la personne de l'un de ses membres titulaires de la Section des sciences mathématiques et physiques, Albert Lancaster, décédé à Uccle le 4 février dernier, à l'âge de 59 ans.

Il rend un pieux hommage à la mémoire du défunt. Il remercie en même temps M. Mourlon d'avoir bien voulu le remplacer, son état de santé ne lui ayant pas permis de se rendre à Bruxelles pour les funérailles; M. Deruyts, vice-directeur, d'autre part, ajoute-t-il, était encore trop sous le coup d'un deuil récent pour parler en la douloureuse circonstance.

Le discours de M. Mourlon paraîtra au *Bulletin*.

Mme et Mlle Lancaster adressent leurs remerciements pour la lettre de condoléance qui leur a été adressée par M. le Secrétaire perpétuel, au nom de la Classe, dès l'annonce du décès.

M. Lagrange sera prié d'écrire pour l'*Annuaire* la notice nécrologique d'Albert Lancaster.

CORRESPONDANCE.

La Société géologique de Londres remercie la Classe d'avoir délégué M. Mourlon à la célébration de son centenaire. Elle fait hommage, à cette occasion, de l'ou-

vrage : *The history of the Geological Society*, par Horace Woodward.

— L'Université de Glasgow remercie pour le message de sympathie qui lui a été adressé lors du décès de son chancelier Lord Kelvin, qui était le doyen d'ancienneté des associés de la Section des sciences mathématiques et physiques de l'Académie de Belgique.

— Le Comité d'organisation de la quatorzième session du Congrès préhistorique de France annonce que celui-ci tiendra ses réunions du 24 au 30 août 1908.

M. Rutot y représentera la Classe.

— Le Comité d'organisation du quatrième Congrès international des mathématiciens fait savoir que ses réunions auront lieu à Rome du 6 au 17 avril prochain.

Une Adresse lui est votée.

— M. le Ministre des Sciences et des Arts envoie, pour la bibliothèque de l'Académie, un exemplaire des publications suivantes :

La Cellule, recueil de cytologie et d'histologie générale Carnoy et Gilson), tome XXIV, 1er fascicule;

Archives de biologie (Éd. Van Beneden et Ch. Van Bambeke), tome XXIII, 3e fascicule.

— Remerciements.

— Hommages d'ouvrages :

1° *a*) I. *La poterie pendant l'époque troglodytique;* II. *A propos des pseudo-éolithes de Cromer;*

b) *Compte rendu sommaire du Congrès de Monaco, etc.;* par M Rutot;

2° *Notice sur la vie et les travaux de Henri Moissan;* par Paul Lebeau (avec une note de M. Henry qui figure ci-après);

3° *Sur un affleurement fossilifère du Houiller à proximité de la faille eifélienne à Angleur;* par Charles Fraipont fils;

4° *Sur l'origine d'un cailloutis dans les sables* Om *des environs de Sprimont;* par le même;

5° *Atlas des nuages. — Nouvelles recherches sur la température climatologique;* par J. Vincent;

6° *Monographie des Buprestides,* tome II; par Ch. Kerremans;

7° *Cinématique des mécaniciens;* par Louis Wève.

— Remerciements.

— La Classe accepte le dépôt dans les archives de l'Académie :

1° Par M. Ch. Lagrange, de deux plis cachetés, datés du 16 février et du 6 mars;

2° Par A. Daussin (rue Michiels, n° 51, à Jette-Saint-Pierre), d'un pli cacheté portant la date du 4 février.

— Travaux manuscrits à l'examen :

1° *Sur une nouvelle méthode de préparation de quelques éthers simples* (deuxième communication); par Th. Van Hove, ingénieur chimiste à Gand. — Commissaires : MM. Swarts et Henry;

2° *Sur les principes fondamentaux de la mécanique;* par Émile Bertrand, à Forest. — Commissaires : MM. Massau, de la Vallée Poussin et Mansion.

Discours prononcé aux funérailles d'Albert Lancaster, membre de la Classe; par M. Mourlon, membre de l'Académie.

MESSIEURS,

En me confiant la mission de rendre en son nom un dernier hommage à la mémoire de notre regretté confrère Albert Lancaster, l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique a eu surtout en vue les liens d'amitié qui, depuis nombre d'années, existaient entre nous.

Sa fin prématurée laissera parmi nous un vide d'autant plus sensible qu'il était le représentant le plus autorisé de l'une des branches les plus importantes de notre activité scientifique : la météorologie, et que ses rapports avec ses collègues, toujours empreints de la plus grande aménité, lui avaient concilié leurs sympathies unanimes au sein de notre Compagnie, où il entra comme correspondant le 15 décembre 1892, pour en devenir membre titulaire cinq ans après.

Tout en laissant à des voix plus autorisées le soin de retracer sa brillante carrière à l'Observatoire royal, ses missions à l'étranger, ses travaux en collaboration avec son ancien directeur et ami, feu notre illustre confrère Houzeau, je ne puis m'empêcher de rappeler les principales contributions qu'il apporta par ses recherches originales à la sismologie et à l'hydrologie, qui ne sont en réalité que des subdivisions de la science géologique.

Délégué par l'Académie à la Conférence internationale de sismologie qui s'est tenue pour la deuxième fois à Strasbourg du 24 au 28 juillet 1903, et dont on connaît les heureux résultats, son état de santé ne lui permit malheureusement pas d'assister à la troisième Conférence, qui eut lieu à La Haye l'an dernier et à laquelle il était bien certainement appelé à occuper une situation aussi en vue qu'à la précédente.

C'est que depuis un grand nombre d'années notre savant confrère s'était attaché à continuer, pour les tremblements de terre, les travaux insérés à partir de 1843 dans nos publications académiques par un savant distingué de Dijon, Alexis Perrey. Mis en rapport avec ce dernier par le fondateur de notre Observatoire royal, Ad. Quetelet, le célèbre créateur de la physique sociale, il collabora aux derniers travaux du savant français qui le tenait en haute estime. Et c'est ainsi que, pour continuer l'œuvre de ce dernier, il fut amené à consigner avec le plus grand soin dans nos *Bulletins*, ainsi que dans la revue *Ciel et Terre*, dont il était le directeur et l'un des fondateurs, les tremblements de terre qui se propagèrent en Belgique à partir de 1873.

Il publia aussi dans l'*Annuaire météorologique* de 1901 la liste complète, avec d'intéressantes considérations sur la nature et l'origine, des tremblements de terre ressentis en Belgique depuis le IVe siècle et dont la partie antérieure à 1883 avait déjà paru dans la revue *Ciel et Terre* en 1887.

Je rappellerai également que Lancaster a joint ses efforts, dans *Ciel et Terre*, à ceux des membres de la Société belge de géologie, dans leur publication spéciale, en vue de la recherche d'une relation entre les mouvements de l'atmosphère et les coups de grisou, à

l'effet de pouvoir parer dans une certaine mesure aux terribles catastrophes qu'ils engendrent dans nos mines de houille.

Enfin, il me reste à rappeler le précieux appoint qu'il apporta par ses travaux à nos connaissances hydrologiques. On sait, en effet, combien à mesure du développement des études géologiques, il est accordé à l'eau de la pluie une influence de plus en plus prépondérante dans la production des phénomènes naturels qui en font l'objet, et l'on sait aussi combien il est désirable de pouvoir déterminer avec précision la nature et l'importance hydrographique de nos différents bassins.

C'est assez vous dire l'accueil qui fut fait au magnifique ouvrage de Lancaster intitulé : *La pluie en Belgique.* Ce travail avait pour objet de déterminer, à l'aide de 211 stations, dont les observations furent centralisées à l'Observatoire royal, comment et en quelles quantités les pluies tombent sur nos régions. Il était accompagné d'une carte au 400,000e de la distribution géographique des pluies en Belgique, et la Société belge de géologie n'hésita pas, eu égard à son importance, à en assumer, avec de hauts appuis, les frais importants de publication.

Albert Lancaster, dont je ne puis qu'esquisser ici à grands traits quelques épisodes de sa vie scientifique, était né à Mons le 24 mai 1849, et, dès 1866, Adolphe Quetelet, le secrétaire perpétuel de l'Académie, l'adjoignit au chevalier Marchal, qui occupe aujourd'hui ces hautes fonctions, pour l'aider dans les travaux du Secrétariat de notre Compagnie. Et ce n'est qu'en 1875, lorsque Ernest Quetelet remplit l'intérim de la direction de l'Observatoire, que ce savant obtint du Gouvernement d'y détacher Lancaster.

Mais ici je m'arrête, ne voulant point empiéter sur le domaine des savants spécialistes qui vous montreront combien l'ami dont nous déplorons la perte se montra digne, en tous points, des marques d'estime et de confiance qui lui furent témoignées par ses chefs à l'Observatoire et tout particulièrement par celui qui, ayant reconnu les aptitudes spéciales de Lancaster, en fit son collaborateur : j'ai nommé le regretté maître J.-C. Houzeau.

Je termine en rappelant qu'il y a quelques jours à peine, à l'issue de notre dernière séance de la Classe des sciences, nous nous trouvâmes avec quelques confrères retenus d'une façon inaccoutumée, aux côtés de Lancaster, par une amicale causerie qui ne laissa point que de nous impressionner, bien que, de son côté, malgré l'amaigrissement qui lui donnait une autre physionomie, rien ne semblât trahir la moindre appréhension du douloureux événement qui nous réunit en ce moment dans cette chambre mortuaire.

Nous étions loin de nous attendre à ce qu'un aussi prompt dénouement vînt enlever notre ami à l'affection des siens, à la tendresse de sa compagne dévouée et de sa fille. Celles-ci trouveront, je l'espère, quelque consolation dans cette pensée que celui qu'elles pleurent vivra toujours dans l'esprit de ses nombreux amis qui, tout en admirant sa valeur scientifique, ont pu apprécier son caractère intègre, sa nature si droite, son esprit si conciliant, sa physionomie empreinte de bonté et de ménagement pour ceux-là mêmes qui pouvaient se trouver en désaccord avec lui.

C'est dans cet espoir, mon cher Lancaster, qu'au nom de tous tes confrères, je te dis : Adieu ! !

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE.

PAUL LEBEAU, *Notice sur la vie et les travaux de Henri Moissan.*

J'ai l'honneur de présenter à l'Académie, au nom de son auteur, M. Paul Lebeau, un exemplaire de la biographie de M. Henri Moissan, notre célèbre associé.

M. Lebeau eut le privilège enviable d'avoir Moissan pour maître et pour éducateur scientifique; à diverses reprises, il participa à ses travaux et parfois même il eut à les continuer; l'an dernier il fut appelé à le suppléer dans la chaire qu'il occupait à la Sorbonne. Personne n'était donc plus, ni même autant que lui, qualifié pour retracer la carrière et la vie de ce chimiste éminent dont la mort prématurée fut un des grands deuils de la science pendant l'année 1907.

M. Lebeau a mis à s'acquitter de cette tâche délicate un soin pieux qui se révèle à chaque instant dans les pages qu'il a consacrées à son illustre maître. Son œuvre est de celles qu'on lit avec un intérêt sans cesse grandissant, parce que l'on sent que, si une profonde sympathie l'a inspirée, elle est néanmoins fondée sur le respect scrupuleux de la vérité.

Comme le fait justement remarquer l'auteur, il ne faut pas chercher en Moissan un théoricien doctrinal des actions chimiques : ce fut avant tout et surtout un expérimentateur. L'expérience savamment conçue, habilement et artistement exécutée, couronnée de succès forçant l'admiration, telle est bien, dans son caractère fondamental, l'œuvre magistrale de l'heureux auteur du fluor et de tant d'autres corps d'une importance capitale dont il enrichit la chimie minérale. Telle qu'elle est, fermement établie dans sa réalité objective, loin de toute

discussion, cette œuvre assure au nom de Moissan une gloire impérissable dont le temps ne ternira pas l'éclat.

Il n'était pas inutile de mettre en un relief apparent le caractère véritable de l'œuvre du chimiste français, aujourd'hui que dans certains milieux on tend à transformer la chimie et à lui enlever son caractère historique de science naturelle. Sans doute, les phénomènes chimiques, comme tous ceux qui attestent extérieurement l'activité de la matière, sont justiciables du calcul, peuvent et doivent lui être soumis. *Numeri regunt mundum*, a dit le bon sens divinateur de l'antiquité. Mais ce n'est pas une raison pour introduire violemment les mathématiques dans le domaine des actions chimiques et faire de leur étude une certaine manière de science abstraite. Il faudrait ne pas oublier que le calcul n'est qu'un instrument pour extraire des faits ce qu'ils renferment déjà. Mais les faits eux-mêmes sont la source originelle et le fondement de tout progrès dans les sciences de la nature. Et les faits, c'est l'expérience, c'est l'observation, seules ou toutes les deux à la fois, qui les révèlent et les font apercevoir à l'intelligence humaine.

Moissan s'est occupé, et presque exclusivement, de la chimie minérale. C'est là un fait qui méritait aussi d'être relevé dans sa vie scientifique, car il en constitue le second caractère fondamental. Son savant biographe lui en fait un grand mérite et l'en loue fortement. Il a raison et je partage pleinement son sentiment. A l'époque où Moissan commença la série des travaux qu'il poursuivit pendant plus de vingt-cinq ans avec une si louable persévérance, soutenu par des succès presque constants et parfois les plus retentissants, la chimie organique absorbait à elle seule à peu près complètement l'activité des chimistes; à des esprits superficiels et à courte vue, la

chimie minérale proprement dite pouvait même paraître un domaine épuisé et désormais stérile. En présence des moissons plantureuses que la chimie du carbone réservait à ses nombreux adeptes, il fallait plus que de l'originalité, il fallait une certaine hardiesse d'esprit pour s'engager dans une voie autre que celle où le succès se montrait si assuré. Moissan eut cette hardiesse et il en fut généreusement récompensé. Par son exemple, il a puissamment contribué à remettre en faveur les études de la chimie minérale, et on doit le regarder comme un des précurseurs de ce mouvement qui l'entraîne, loin des voies ordinaires de la science classique, vers des régions pleines de mystères que n'éclairent pas toujours les lumières de la certitude expérimentale.

La carrière scientifique de Henri Moissan, comme sa vie tout entière, est de celles qu'il est bon de connaître et de faire connaître, parce que, dans toutes ses phases, dans ses inévitables imperfections mêmes, elle est féconde en salutaires leçons et en judicieux enseignements. Aux difficultés de ses débuts, vaincues par une volonté énergique et grâce à de bienveillantes interventions qui eurent dans la suite à se féliciter hautement, succéda bientôt une période désormais ininterrompue de succès rapides, d'honneurs de tous genres et même de somptueuses récompenses. On doit savoir tout cela, car il serait fâcheux que l'on pût penser que la science ne rapporte jamais à ceux qui la servent fidèlement que des mécomptes et des tribulations. Grâce à Dieu, la vie de Moissan est celle d'un savant qui n'a pas eu à se plaindre de ses contemporains.

Après l'hommage autorisé que lui rendit, il y a quelques semaines, en des termes empreints d'une véritable éloquence, l'éminent Président de l'Académie des sciences

de France (1), M. A. Chauveau, il convenait que la vie de ce grand travailleur fût, pour l'édification de la jeunesse studieuse, exposée avec vérité, dans l'étonnante multiplicité de ses actes, par un savant adonné aussi à la culture des sciences chimiques.

C'est la tâche qu'a remplie, au nom de la Société chimique de France, M. Paul Lebeau, avec un talent que j'aime à constater et un succès auquel je me plais à applaudir aussi. LOUIS HENRY.

PROGRAMME DU CONCOURS POUR 1909.

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

PREMIÈRE QUESTION.

Trouver, en hauteur et en azimut, les expressions des termes principaux des déviations périodiques de la verticale, dans l'hypothèse de la non-coïncidence des centres de gravité de l'écorce et du noyau terrestres. — Prix : 800 francs.

DEUXIÈME QUESTION.

On demande de nouvelles recherches sur le siège de la pression osmotique. — Prix : 600 francs.

TROISIÈME QUESTION.

L'étude de l'éthérification nitrique, au point de vue thermique, des alcools monoatomiques des divers types fondamentaux étant faite au préalable, faire, au même point

---

(1) Dans la séance publique annuelle du 2 décembre 1907, *Comptes rendus*, etc., t. CXLI, p. 961.

de vue, l'étude de cette éthérification pour des glycols de différents genres, simples et mixtes, continus et discontinus, ainsi que pour certains de leurs éthers incomplets. — Prix : 1,000 francs.

QUATRIÈME QUESTION.

On demande une contribution importante à la géométrie infinitésimale de l'espace euclidien réglé, avec le résumé des travaux déjà publiés sur lesquels s'appuient les nouvelles recherches. — Prix : 800 francs.

CINQUIÈME QUESTION.

Résumer les travaux sur les systèmes de coniques dans l'espace et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes. — Prix : 800 francs.

SCIENCES NATURELLES.

PREMIÈRE QUESTION.

On demande de nouvelles recherches sur les transformations qu'éprouvent les matières azotées dans l'organisme animal ou végétal. — Prix : 1,000 francs.

DEUXIÈME QUESTION.

On demande des recherches organogéniques sur l'appareil urinaire de l'Amphioxus. — Prix : 1,000 francs.

TROISIÈME QUESTION.

Étudier au point de vue morphologique et physiologique l'évolution des organes excréteurs chez des invertébrés à néphridies. — Prix : 800 francs.

QUATRIÈME QUESTION.

On demande de nouvelles recherches sur la formation des gamètes, les phénomènes intimes de la fécondation et les premières divisions nucléaires dans les Algues. — Prix : 800 francs.

CINQUIÈME QUESTION.

Décrire les silicates de notre pays, y compris ceux qui entrent dans la composition des roches. — Prix : 800 francs.

SIXIÈME QUESTION.

Description pétrographique et géologique des diverses roches métamorphiques des environs de Bastogne, Remagne, Seviscourt. — Prix : 800 francs.

Les mémoires devront être inédits et écrits lisiblement. Ils pourront être rédigés en français, en flamand ou en latin; ils devront être adressés, franc de port, à M. le Secrétaire perpétuel, au Palais des Académies, avant le 1er août 1909.

—

DISPOSITIONS GÉNÉRALES CONCERNANT LES CONCOURS ANNUELS.

L'Académie exige la plus grande exactitude dans les citations; les auteurs auront soin, par conséquent, d'indiquer les éditions et les pages des ouvrages cités. On n'admettra que des planches manuscrites ou photographiques.

Les auteurs ne mettront point leur nom à leur ouvrage; ils y inscriront seulement une devise, qu'ils reproduiront sur un pli cacheté renfermant leur nom et leur adresse; il est défendu de faire usage d'un pseudonyme. Faute de satisfaire à ces formalités, le prix ne pourra être accordé.

Les mémoires remis après le terme prescrit et ceux dont les auteurs se feront connaître, de quelque manière que ce soit, seront exclus du concours.

L'Académie croit devoir rappeler aux concurrents que les mémoires soumis à son jugement sont et restent déposés dans ses archives. Toutefois, les auteurs peuvent en faire prendre copie, à leurs frais, en s'adressant à cet effet au Secrétaire perpétuel.

RAPPORTS.

La Commission, composée de MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq, chargée de se prononcer sur une requête de M. Havet sollicitant de pouvoir occuper cette année une des tables de la Station zoologique de Naples, estime que cette requête a été produite trop tardivement pour pouvoir être prise actuellement en considération.

M. le Ministre des Sciences et des Arts sera informé que cette demande, qui lui est restituée, pourra venir en rang utile pour l'année 1909.

Sur les involutions du quatrième ordre; par M. Fairon, répétiteur à l'Université de Liége.

Rapport de M. J. Deruyts, premier commissaire.

« La théorie des involutions et des homographies a fait l'objet de nombreux travaux de géomètres appartenant à l'Académie : Brasseur, Folie, M. le Paige et mon regretté frère François Deruyts. L'auteur du mémoire présenté a, lui-même, publié dans nos *Bulletins*, il y a quelques années, une étude relative aux involutions biquadratiques représentées au moyen de la conique. Le travail actuel a pour sujet principal une représentation nouvelle dans l'espace à trois dimensions.

M. Fairon associe à la forme biquadratique f_4 une surface du 4e ordre (Σf_4) qui a pour génératrices les bisécantes de la cubique gauche appartenant à un complexe linéaire en relation avec f_4. Cette surface (Σf_4) permet de retrouver géométriquement les racines de $f_4 = 0$; de plus, la forme et la surface correspondante peuvent être déterminées au moyen d'une certaine droite $A_0 A_4'$. Les fonctions invariantes de f_4 apparaissent dans l'étude de (Σf_4); à l'occasion du hessien, on rencontre deux surfaces réglées adjointes, du 4e ordre, qui présentent des analogies avec (Σf_4).

Cette étude de la forme biquadratique complète en plusieurs points intéressants les recherches de l'auteur publiées récemment par la Société des sciences de Liége.

Au moyen des résultats qu'il obtient, M. Fairon aborde la représentation des trois involutions biquadratiques par l'intermédiaire des surfaces réglées du 4e ordre. Il

emploie successivement les deux définitions de ces involutions soit par l'équation symbolique

$$\Sigma \vartheta_k (a K_x)^4 \equiv 0,$$

soit par un système d'équations symboliques analogues à

$$a_x a_y a_z a_f \equiv 0.$$

M. Fairon indique la construction des quaternes dont on donne des éléments en nombre suffisant. Il considère, d'autre part, les quaternes remarquables, les éléments multiples et les éléments neutres. Ces divers sujets font l'objet d'une grande partie du manuscrit qu'il serait difficile d'analyser plus en détail. Je proposerai volontiers d'adresser des remerciements à l'auteur et de voter l'impression de son travail dans le recueil des *Mémoires* in-8°. »

M. J. Neuberg, second commissaire, se rallie à ces conclusions qui sont adoptées par la Classe.

Contribution à l'étude de l'assimilation du phosphore et de la chaux pendant la vie embryonnaire du poussin; par E. Carpiaux.

Rapport de M. Léon Fredericq, premier commissaire.

« L'auteur a fait pour l'œuf de poule examiné aux différentes phases de la période d'incubation, des déterminations quantitatives de chaux, d'acide phosphorique total et d'acide phosphorique organique (c'est-à-dire acide phosphorique contenu dans l'extrait éthéré = P de

la lécithine). Il constate au cours du développement une augmentation de la proportion de chaux et d'acide phosphorique minéral et une diminution corrélative de la lécithine.

La conclusion générale c'est que la proportion de phosphate de calcium contenue dans l'œuf de poule augmente d'une façon progressive au cours du développement. L'acide phosphorique est fourni dans l'œuf lui-même par la combustion de la lécithine, la chaux doit venir de la coquille.

Je regrette que l'auteur n'ait pas fait un nombre de dosages un peu plus grand : l'acide phosphorique n'a été déterminé que dans cinq œufs, la chaux dans neuf œufs. L'augmentation de la chaux ne peut s'expliquer, nous dit-il, que parce que l'œuf enlève de la chaux à la coquille. Pourquoi ne pas compléter la démonstration en publiant les résultats des dosages des quantités absolues de chaux contenue dans la coquille ? A la fin de l'incubation il doit y avoir dans la coquille un déficit de chaux correspondant à l'augmentation de chaux constatée dans l'œuf lui-même. L'auteur se borne à nous donner le pourcentage de la coquille en chaux et en acide phosphorique, au début et à la fin de l'incubation, pourcentage qui n'a pas varié.

J'estime le travail intéressant malgré ces lacunes et j'en propose l'impression dans le *Bulletin* de la séance. »

—

Rapport de M. A. Jorissen, deuxième commissaire.

« M. Carpiaux, qui a publié déjà une série d'observations sur la chimie de l'œuf de poule, fait ressortir, dans la note qu'il adresse à l'Académie, l'importance du rôle

physiologique de la lécithine pendant l'incubation. Ses expériences lui suggèrent, en outre, diverses questions dont l'étude présenterait un réel intérêt pour l'industrie avicole, si florissante dans certaines régions de la Belgique.

Au cours des nouvelles recherches qu'il se propose d'entreprendre à cet égard, l'auteur aura, sans doute, l'occasion de compléter les essais qu'il décrit pour ce qui concerne les migrations du calcium. Je me joins au savant premier commissaire pour proposer l'impression de la note de M. Carpiaux dans le *Bulletin* de la séance. »

M. C. Malaise, troisième commissaire, se rallie aux conclusions des deux rapports ci-dessus et la Classe les adopte.

PTILOCRINUS ANTARCTICUS n. sp., *a Crinoid dredged by the Belgian Antarctic Expedition;* by F. A. Bather, British Museum (Natural History), London.

Rapport de M. Éd. Van Beneden, premier commissaire.

« La découverte d'une espèce nouvelle a toujours une certaine importance quand elle se rapporte à un groupe du règne animal qui n'est plus représenté, dans la nature actuelle, que par un nombre limité de formes.

M. F.-A. Bather a reconnu, dans le matériel recueilli par l'Expédition antarctique belge, une espèce nouvelle de Crinoïde : il la rapporte au genre *Ptilocrinus* de Clark, connu seulement par une espèce unique du Pacifique Nord, *Ptilocrinus pinnatus* de Clark.

La nouvelle espèce n'est pas seulement intéressante au point de vue géographique; elle permettra peut-être

de décider à quel groupe de Crinoïdes, à quelle famille et à quel ordre il faut rapporter le genre *Ptilocrinus*, ce que le matériel à la disposition de Clark n'a pas permis de décider.

En faisant sa communication à l'Académie, M. Bather n'a d'autre but que de prendre date. Son travail in extenso paraîtra ultérieurement.

Je propose à la Classe de décider l'impression au *Bulletin* de cette note et la reproduction de la figure qui accompagne le texte. »

MM. Van Bambeke et Plateau déclarent se rallier à cette proposition, laquelle est adoptée par la Classe.

—

Sur quelques propriétés physiques du butane et de l'isobutane; par Paul Lebeau.

Rapport de M. Louis Henry, premier commissaire.

« C'est à partir de l'étage C_4 que l'on rencontre dans le groupe aliphatique des composés à chaîne carbonée ramifiée; les problèmes si variés et si importants de l'*isomérie* se posent donc pour la première fois dans toute leur amplitude, mais aussi de la manière la plus simple, dans les composés butyliques des divers genres.

Occupé depuis longtemps d'études expérimentales concernant le problème des relations de la volatilité dans les composés carbonés avec leur composition et leur constitution structurale, j'ai souvent regretté que l'on ne connût pas d'une manière certaine, avec précision et exactitude, les points d'ébullition, dans les conditions

ordinaires de pression atmosphérique, des deux variétés sous lesquelles existe le « butane » C_4H_{10}.

M. Paul Lebeau, professeur à l'École supérieure de pharmacie de Paris, ayant, il y a quelque temps, déterminé cette constante physique pour le *propane*, je lui avais demandé de vouloir le faire aussi pour les deux hydrocarbures saturés en C_4.

Le mémoire que j'ai l'honneur de présenter, en son nom, à la Classe, est consacré à faire connaître les expériences qu'il a réalisées à cet effet et leur résultat.

Il a mis en œuvre, pour obtenir ces deux paraffines en C_4, la même réaction que celle qu'il avait déjà utilisée pour le *propane* et qui lui est personnelle, à savoir la réaction des éthers haloïdes sur les dérivés ammoniques des métaux alcalins et alcalino-terreux.

Les différences de volatilité des deux variétés du butane, obtenues l'une et l'autre dans des conditions différentes, sont bien de celles auxquelles il fallait s'attendre : le *butane* normal $H_3C\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_3$ bout à $+0^{\circ}5$ et l'*isobutane* $\left.\begin{matrix}H_3C\\H_3C\end{matrix}\right\rangle CH\text{-}CH_3$ à $-10^{\circ}5$.

Le point critique du premier est à 151° et celui du second à 134° au-dessus de 0°, selon les déterminations de l'auteur.

La lacune qui existait à l'étage C_4, en ce qui concerne la volatilité relative des paraffines, qui sont les hydrocarbures fondamentaux, a donc disparu, et je le constate avec une profonde satisfaction, me proposant d'utiliser prochainement les chiffres déterminés par M. Lebeau.

Je ferai remarquer dès maintenant que la série des dérivés de « méthylation » du *méthane* H_4C, l'hydrocarbone et le composé primordial, est complète, et que l'on

en connaît d'une manière exacte (*) les points d'ébullition.

H_4C	H_4C	Éb.	$-164°$	
				$+74°$
H_6C_2	H_3C-CH_3		$-90°$	
				$+45°$
H_8C_3	$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > -CH_2$		$-45°$	
				$+35°$
$H_{10}C_4$	$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C- \\ H_3C \end{matrix} > -CH$		$-10°$	
				$+19°$
$H_{12}C_5$	$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \\ H_3C \\ H_3C \end{matrix} > C'$		$+9°$	

Ceux-ci vont en s'élevant à mesure que les poids moléculaires de ces hydrocarbures s'élèvent eux-mêmes, mais les différences entre les points d'ébullition de deux termes voisins vont, comme on le voit, en diminuant à mesure que la méthylation devient plus complète; c'est que la différence CH_4, ou 14 en poids, représente, dans la progression arithmétique que constituent les poids moléculaires graduellement croissants, une fraction de moins en moins considérable du poids de la molécule totale. On constate même que les différences ne sont pas proportionnelles aux augmentations centésimales des poids moléculaires. Il y a donc là autre chose qu'une

(*) Sauf toutefois en ce qui concerne l'*éthane* ou le dérivé *monométhylé* H_3C-CH_3; le point d'ébullition le plus bas attribué à cet hydrocarbure est $-85°4$ et le plus haut $-93°$. Je me suis arrêté à $-90°$, qui en est approximativement la moyenne.

question gravimétrique; la disparition progressive de l'hydrogène dans cette série de méthylation est un facteur dont il y a à tenir compte.

	Pm.	H °/₀
CH_4	16	25
C_2H_6	30	20
C_3H_8	44	18.18
C_4H_{10}	58	17.24
C_5H_{12}	72	16.66

Je crois utile de rappeler encore que le pentane dont il est ici question, ou le *méthane tétra-méthylé* $(CH_3)_4C$, se fait remarquer par son aptitude à prendre l'état solide; cristallisé, il fond, en effet, à — 29°, alors que le méthane H_4C est indiqué comme fondant à — 152° et l'éthane à — 171°. On voit par là quelle relation étroite il y a entre l'état physique de ces hydrocarbures, leur composition et leur structure moléculaire.

Ces considérations sommaires suffiront pour montrer le haut intérêt que présentent les déterminations expérimentales de M. Paul Lebeau.

M. Lebeau n'est pas un inconnu pour l'Académie. J'aime à rappeler qu'il y a deux ans elle a couronné son mémoire sur les combinaisons des corps halogènes entre eux. C'est ce qui me fait demander à la Classe de lui adresser des remerciements pour le mémoire qu'il vient de nous envoyer en même temps que d'en décider l'insertion dans le *Bulletin*. »

M. Spring, second commissaire, déclare adhérer à ces conclusions qui sont adoptées par la Classe.

—

Observation relative à l'action du soufre sur le gaz acétylène; par M. Oechsner de Coninck.

Rapport de M. W. Spring.

« Dans cette note, l'auteur confirme l'exactitude d'une observation faite récemment par M. G. Capelle sur la non-production du tiophène dans l'action du soufre sur l'acétylène.

J'ai l'honneur de proposer l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

Quelques réflexions sur le rôle de l'ionisation dans certaines réactions chimiques; par le même.

Rapport de M. W. Spring.

« Dans cette seconde note, l'auteur cherche à expliquer l'action des sels dissous sur les sels insolubles par l'ionisation des premiers; la réaction se produirait parce que l'*anion* du sel dissous se porterait sur l'élément métallique du sel insoluble.

Je propose également l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

—

Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier; par Ch.-J. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain, correspondant de l'Académie.

CHAPITRE PREMIER

Approximation des fonctions par des polynômes.

§ 1. — *Définition du polynôme d'approximation.*

1. Préliminaire. — *Toute fonction continue peut être représentée par une série de polynômes.* Ce théorème fondamental de Weierstrass a reçu depuis un grand nombre de démonstrations. Nous renverrons pour les renseignements bibliographiques aux excellentes *Leçons sur les variables réelles et les développements en séries de polynômes*, par M. E. Borel (*).

Nous allons donner, de ce théorème, une nouvelle

(*) Paris, G. V., 1905.

démonstration, qui nous paraît plus simple et plus directe qu'aucune autre, mais qui aura surtout l'avantage de nous conduire à des résultats complètement neufs sur la représentation des fonctions dérivées.

Le problème de la représentation d'une fonction par une série de polynômes est le même que celui de la représentation indéfiniment approchée par un polynôme P_n, car si P_n tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini, la série

$$P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \cdots$$

converge vers $f(x)$.

C'est le problème de la représentation approchée par un polynôme P_n que nous traiterons, en nous bornant toutefois aux fonctions d'une seule variable x.

2. Nous prendrons notre point de départ dans la formule bien connue

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{1}{k_n},$$

en désignant par k_n le nombre rationnel

$$k_n = \frac{3 \,.\, 5 \ldots (2n+1)}{2 \,.\, 4 \ldots 2n}.$$

Quand n tend vers l'infini, la valeur asymptotique $_n$ se tire des relations

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t dt,$$

qui deviennent, en remplaçant chaque intégrale par sa valeur :

$$\frac{k_n}{2n+1}\frac{\pi}{2} > \frac{1}{k_n} > \frac{k_n}{2n+2}\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$k_n = \sqrt{(2n+1+\theta)\frac{2}{\pi}} \quad (0 < \theta < 1).$$

On remarquera, en particulier, que l'on a

$$k_n < 2\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$$

et que k_n a pour valeur asymptotique $2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

3. Hypothèses sur la fonction à représenter $f(x)$ et définition du polynôme d'approximation P_n. — Soit à représenter la fonction $f(x)$ dans un intervalle (a, b). Nous commencerons par supposer que cet intervalle est intérieur à l'intervalle $(0,1)$, c'est-à-dire que

$$0 < a < b < 1.$$

Cette hypothèse n'apporte aucune restriction essentielle à la théorie, car il suffit de faire une substitution linéaire de variables pour ramener n'importe quel intervalle fini au précédent.

En ce qui concerne la fonction $f(x)$ à représenter, nous admettrons qu'elle est bornée et intégrable dans l'intervalle (a, b) au sens de Riemann. Plus générale-

ment, nous admettrons qu'elle devient infinie en certains points, mais de manière que l'intégrale

$$\int_a^b |\, f(x) \,|\, dx$$

conserve une valeur finie.

Le lecteur, qui connaît les nouvelles théories de l'intégration, verra encore que l'on peut même supposer la fonction *sommable* au sens très général de M. Lebesgue (*), sans qu'il y ait rien à changer à nos raisonnements. Mais cette connaissance n'est pas nécessaire pour la lecture du mémoire.

En dehors de l'intervalle (a, b), nous conviendrons de faire :

$$f(x) = f(a), \quad \text{si} \quad x < a,$$
$$f(x) = f(b), \quad \text{si} \quad x > b.$$

A moins que la fonction ne soit discontinue au point a ou au point b, auquel cas nous poserions :

$$f(x) = 0, \quad \text{si} \quad x < a,$$

ou

$$f(x) = 0, \quad \text{si} \quad x > b,$$

ce qui n'introduit pas de nouvelle discontinuité.

Nous pouvons maintenant définir notre *polynôme*

(*) *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, par H. Lebesgue (Paris, G. V., 1904). Voir surtout le chapitre VII.

d'approximation. Ce sera le polynôme P_n de degré $2n$, défini par l'intégrale très simple (*)

$$P_n = \frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u)[1-(u-x)^2]^n du.$$

En développant cette puissance, on aperçoit immédiatement que P_n est un polynôme en x dont les coefficients sont donnés par des intégrales définies.

Nous allons étudier, dans diverses hypothèses, la limite ou la valeur asymptotique de ce polynôme pour $n = \infty$, ce qui va nous conduire à des conclusions intéressantes. A ce point de vue, il peut être utile de remarquer que l'on peut, sans rien changer à nos conclusions sur les limites, remplacer le polynôme P_n par un autre

$$Q_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1 f(u)[1-(u-x)^2]^n du$$

qui s'en déduit par la substitution à k_n de sa valeur asymptotique (n° 2). Mais nous trouvons avantage à raisonner sur P_n.

(*) Au moment où je termine la rédaction de ce mémoire, je reçois communication d'un article de M. Landau dans les *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* (26 janvier 1908) : *Ueber die Approximation einer stetigen Function durch eine ganze rationale Function*. M. Landau rencontre cette même intégrale et je vois, dans son article, qu'elle a déjà été considérée par Stieltjes dans une lettre à Hermite, du 27 novembre 1891. Je me place à un point de vue beaucoup plus général que M. Landau, et M. Landau n'aborde pas l'étude des dérivées, qui forme la partie neuve de mon travail.

Pour trouver la limite de P_n, il convient de changer la variable d'intégration u en $x + u$, ce qui donne

$$P_n = \frac{k_n}{2} \int_{-x}^{1-x} f(x+u)(1-u^2)^n du.$$

§ 2. — *Convergence du polynôme d'approximation.*

4. Théorème I. — *La valeur asymptotique de* P_n *dépend uniquement de la nature de* $f(x)$ *dans le voisinage immédiat du point* x; *elle est la même que celle de l'expression*

$$\frac{k_n}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)(1-u^2)^n du,$$

quelque petit que soit le nombre positif fixe ε.

En effet, reportons-nous à l'expression de P_n qui termine le paragraphe précédent; P_n n'en diffère que par les deux intégrales

$$\frac{k_n}{2}\left[\int_{\varepsilon}^{1-x} + \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+u)(1-u^2)^n du\right].$$

Mais comme on a (n° 2)

$$\frac{k_n}{2} < \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}, \quad (1-u^2) < e^{-u^2},$$

ces intégrales sont infiniment petites de l'ordre de

$$\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, e^{-\varepsilon^2 n},$$

car, pour la première par exemple, on a

$$\left|\frac{k_n}{2}\int_{\varepsilon}^{1-x} f.(1-u^2)^n\,du\right| < \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,e^{-n\varepsilon^2}\int_{\varepsilon}^{1-x}|f|\,du.$$

On remarquera, de plus, que, si x varie, ces intégrales tendent *uniformément* vers O.

5. Théorème II. — *En tout point de l'intervalle* (a, b) *où* f(x) *est continue, on a, pour* n *infini,*

$$\lim P_n = f(x).$$

Considérons l'expression donnée dans l'énoncé du théorème I et soit μ une valeur moyenne de $f(x)$ entre $x-\varepsilon$ et $x+\varepsilon$; on peut appliquer à cette expression le théorème de la moyenne, d'où

$$\lim P_n = \lim \mu\frac{k_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(1-u^2)^n\,du.$$

On peut sans altérer la limite étendre l'intervalle d'intégration de -1 à $+1$, car les deux portions d'intégrales de -1 à $-\varepsilon$ et de ε à $+1$ ainsi ajoutées sont infiniment petites du même ordre que

$$\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,e^{-n\varepsilon^2},$$

comme dans la démonstration du théorème précédent.

Si l'on observe que (n° 2)

$$\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^n\,du = 2\int_0^1(1-u^2)^n\,du = \frac{2}{k_n},$$

il vient ainsi

$$\lim P_n = \mu.$$

Mais comme ε est aussi petit que l'on veut, μ, qui est une valeur moyenne de $f(x)$ dans l'intervalle $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, ne peut différer de $f(x)$ qui est supposée continue au point x.

6. Théorème III. — *Si* f(x) *est continue dans une portion de l'intervalle* (a, b), P_n *converge uniformément vers* f(x) *dans tout intervalle intérieur à cette portion* (*).

En effet, x variant, les quantités considérées comme infiniment petites dans les deux démonstrations précédentes tendent uniformément vers O, et les valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ tendent uniformément vers $f(x)$ quand ε tend vers O.

En particulier, *si* f(x) *est continue dans l'intervalle* (a, b) *tout entier, la convergence de* P_n *vers* f(x) *sera uniforme dans tout l'intervalle.* On peut, en effet, considérer l'intervalle (a, b) comme intérieur à un autre $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ où $f(x)$ est continue.

7. Théorème IV. — *Si* f(x) *est discontinue mais*

(*) M. Lebesgue a démontré le théorème suivant (*Bulletin des sciences mathématiques*, 1898, p. 280) : *Toute fonction continue dans un intervalle* (a, b), *sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de la variable, est développable dans cet intervalle en série de polynômes absolument et uniformément convergente dans tout intervalle où n'existent pas de points de discontinuité.*

On trouve une seconde démonstration du même théorème, due également à M. Lebesgue, dans les *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, de M. E. Borel, page 95.

bornée au point x, *les plus petite et plus grande limites de* P_n *pour* $n = \infty$ *sont comprises dans l'intervalle des bornes inférieure et supérieure de* f(x) *au point* x.

En effet, on peut reproduire, sur ces plus grande et plus petite limites, la démonstration du théorème II jusqu'à la relation

$$\lim P_n = \mu;$$

et μ, qui est une valeur moyenne de $f(x)$ dans l'intervalle *infiniment petit* $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, ne peut sortir des limites indiquées dans l'énoncé du théorème.

8. Théorème V. — *Si* f(x) *est discontinue au point* x, *mais que* f(x + h) + f(x — h) *tende vers une limite déterminée* $2a_0$ *quand* h *tend vers* O, *on aura*

$$\lim P_n = a_0.$$

On a, en effet, par le théorème I :

$$\lim P_n = \lim \frac{k_n}{2}\left[\int_0^\varepsilon + \int_{-\varepsilon}^0 f(x+u)(1-u^2)^n du\right]$$

$$= \lim \frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon [f(x+u) + f(x-u)](1-u^2)^n du.$$

Exactement comme dans la démonstration du théorème II, on voit que la limite de cette expression sera a_0.

9. Cas particulier. — On dit que x est un *point de discontinuité de première espèce* si $f(x+h)$ et $f(x-h)$ tendent vers les limites déterminées $f(x+0)$ et $f(x-0)$ quand h tend vers O par des valeurs positives.

Donc, *en un point de discontinuité de première espèce, on aura*

$$\lim P_n = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

§ 3. — *Convergence des dérivées première et deuxième.*

10. Préliminaire. — Les théorèmes précédents ne nous ont encore rien appris de bien nouveau et le polynôme P_n ne possède encore sur ceux considérés par d'autres auteurs que l'avantage d'être explicite ou beaucoup plus simple.

Mais si nous passons maintenant à la considération des dérivées, nous allons rencontrer des résultats complètement neufs.

M. Painlevé (*) a montré que, si la fonction continue $f(x)$ a des dérivées *continues*, on peut la représenter par une série de polynômes telle que les séries dérivées convergent uniformément vers les dérivées de $f(x)$ (**).

Nous allons montrer que la considération du polynôme P_n conduit à un résultat plus précis. A cet effet, donnons d'abord une définition.

11. Dérivée première généralisée. Dérivée moyenne. — Nous appelons *dérivée première généralisée* de $f(x)$ au point x la limite pour $h = 0$ du rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

(*) *Comptes rendus*, 7 février 1898.

(**) V. Borel, *Leçons sur les variables reelles...*, p. 66.

Cette limite peut évidemment exister sans que $f'(x)$ existe.

Si $f(x)$ a, au point x, des dérivées à gauche et à droite finies et déterminées

$$f'(x, -0), \qquad f'(x, +0),$$

nous appelons *dérivée moyenne* de $f(x)$ la demi-somme

$$\tfrac{1}{2}[f'(x, -0) + f'(x, +0)].$$

Observons que l'on peut écrire

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right]$$

et que le second membre est la demi-somme des rapports qui définissent les dérivées à gauche et à droite; nous en concluons que :

La dérivée généralisée est égale à la dérivée moyenne en tout point où celle-ci existe.

Quand $f(x)$ n'a pas de dérivées à gauche ou à droite, les plus grande et plus petite limites des deux rapports

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \frac{f(x-h) - f(x)}{-h},$$

sont les quatre *nombres dérivés* de $f(x)$ au point x. La dernière équation montre donc que : *Quand la dérivée généralisée existe, elle est une moyenne entre les quatre nombres dérivés.*

Elle montre aussi que, dans tous les cas, les plus grande et plus petite limites du rapport

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

sont toujours des moyennes entre les quatre nombres dérivés au point x.

12. Dérivation de P_n. — Reprenons la formule initiale

$$P_n = \frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u)\,[1-(u-x)^2]^n du,$$

dans laquelle x désignera un point de l'intervalle (a, b).

Dérivons par rapport à x, ce qui se fait sans difficulté (car on dérive, en fait, un polynôme dont les coefficients seuls sont des intégrales); et observons que la dérivée de

$$[1-(u-x)^2]^n$$

est égale à celle par rapport à u changée de signe; il vient

$$P'_n = -\frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u)\,\frac{d}{du}[1-(u-x)^2]^n du;$$

et, en changeant u en $u+x$,

$$P'_n = -\frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x} f(x+u)\,d(1-u^2)^n.$$

La valeur asymptotique de P'_n pour n infini n'est pas changée si l'on néglige les portions d'intégrales en dehors de l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, car elles sont infiniment petites de l'ordre de

$$-\frac{k_n}{2}\int_\varepsilon^{1-x} |f(x+u)|\,d(1-u^2)^n = nk_n\int_\varepsilon^{1-x} |f|\,(1-u^2)^{n-1}u\,du$$

$$< nk_n e^{-(n-1)\varepsilon^2}\int_\varepsilon^{1-x} |f|\,du$$

car u est < 1 et $1-u^2 < e^{-u^2}$.

Nous pouvons donc écrire (*lim* signifiant *valeur asymptotique*) :

$$\lim P'_n = -\lim \frac{k_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)\,d(1-u^2)^n$$

$$= -\lim \frac{k_n}{2}\int_{0}^{\varepsilon} [f(x+u)-f(x-u)]\,d(1-u^2)^n$$

$$= -\lim k_n \int_{0}^{\varepsilon} \frac{f(x+u)-f(x-u)}{2u}\,u\,d(1-u^2)^n.$$

Désignons par μ une valeur moyenne dans l'intervalle (o, ε) du rapport

$$\frac{f(x+u)-f(x-u)}{2u},$$

et observons que $u\,d\,(1-u^2)^n$ ne change pas de signe; nous aurons, par le théorème de la moyenne,

$$\lim P'_n = -\lim \mu k_n \int_{0}^{\varepsilon} u\,d(1-u^2)^n$$

et, en ajoutant une intégrale dont la limite est nulle pour n infini,

$$\lim P'_n = -\lim \mu k_n \int_{0}^{1} u\,d(1-u^2)^n.$$

Mais on a, en intégrant par parties,

$$-\int_{0}^{1} u\,d(1-u^2)^n = \int_{0}^{1} (1-u^2)^n\,du = \frac{1}{k_n}.$$

Substituons cette valeur, nous trouvons (*lim* pouvant ne désigner qu'une valeur asymptotique)

$$\lim P'_n = \lim \mu.$$

Cette relation subsiste quelque petit que soit ε; supposons donc que la dérivée généralisée existe au point x, le rapport dont μ désigne la valeur moyenne différera aussi peu qu'on veut de cette dérivée généralisée et, par conséquent, la limite de P'_n lui sera égale.

De là le remarquable théorème qui suit :

13. Théorème VI. — *La dérivée première* P'_n *a pour limite :* 1° *la dérivée* $f'(x)$ *en tout point où cette dérivée existe ;* 2° *la dérivée moyenne de* $f(x)$ *en tout point où celle-ci existe ;* 3° *la dérivée généralisée* (n° 11) *de* $f(x)$ *en tout point où celle-ci existe. — Dans tous les cas, la valeur asymptotique de* P'_n *est intermédiaire entre les quatre nombres dérivés de* $f(x)$ *au point* x.

Il est à remarquer que toutes les intégrales négligées comme infiniment petites dans la démonstration précédente, le sont *uniformément* quand x varie dans l'intervalle (a, b). La convergence de P'_n vers sa limite sera donc *uniforme* dans tout intervalle où le rapport

$$\frac{f(x+u) - f(x-u)}{2u}$$

convergera uniformément vers sa limite ; donc, en particulier, *dans tout intervalle intérieur à un autre où* $f'(x)$ *sera continue.*

Toutefois, on n'oubliera pas que nous avons fait (n° 3) $f(x)$ constant hors de l'intervalle (a, b) ; les points a et b sont donc, en général, des points de discontinuité pour

la dérivée, et la convergence cessera d'être uniforme dans leurs environs.

Au besoin, on évitera cet inconvénient par une définition de $f(x)$ hors de (a, b) telle que la dérivée soit continue.

Avant de passer à l'étude des dérivées d'ordre plus élevé de P_n, il convient encore de généraliser la définition des dérivées.

14. Dérivée seconde généralisée. — Nous donnerons, avec M. Lebesgue (*), le nom de dérivée seconde généralisée à la limite (pour $h = 0$) du quotient

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2},$$

quand cette limite est finie et déterminée.

Cette définition suppose $f(x)$ continue au point x. Si $f(x)$ est discontinue au point x, il peut encore arriver que

$$f(x+h)+f(x-h)$$

ait une limite $2a_0$ quand h tend vers 0.

Dans ce cas, nous conviendrons de remplacer $2f(x)$ qui figure au numérateur de la fraction précédente par cette limite $2a_0$.

D'une manière générale, la dérivée seconde généralisée sera donc la limite, si elle existe, du quotient

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2a_0}{h^2}.$$

(*) *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 6. Paris, G. V., 1906.

Ce quotient peut avoir une limite sans que la dérivée seconde ordinaire existe. Mais sa limite sera certainement $f''(x)$, si cette dérivée existe au point x. C'est un cas particulier de la proposition plus générale suivante :

Si la dérivée première f'(x) *a une dérivée première généralisée* a *au point* x, *la dérivée seconde généralisée de* f(x) *sera égale à cette dérivée* a.

On a, en effet, dans ce cas, par définition de la dérivée première généralisée de $f'(x)$:

$$f'(x+h) - f'(x-h) = (a+\varepsilon)2h,$$

où ε tend vers 0 avec h. De plus, $f(x)$ sera continue au point x.

Soit α une constante positive d'une petitesse arbitraire; il suit de la relation précédente que la fonction de h

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - ah^2 \pm \alpha h^2$$

a, pour h positif et suffisamment petit, sa dérivée du signe de $\pm\alpha$. Donc la fonction, s'annulant avec h, sera elle-même du signe de $\pm\alpha$, donc aussi son quotient par h, savoir

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - a \pm \alpha,$$

ce qui entraîne, pour h positif,

$$\lim \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = a,$$

et le raisonnement serait analogue pour h négatif.

15. Dérivée seconde de P_n. — Dérivons deux

fois par rapport à x l'expression de P_n déjà utilisée au début du n° 12; il vient

$$P''_n = \frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u) D_x^2[1-(u-x)^2]^n du.$$

Mais la dérivée par rapport à x est la même que par rapport à u et l'on peut, comme au n° 12, remplacer la variable d'intégration u par $u+x$, ce qui donne

$$P''_n = \frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x} f(x+u)\, D^2(1-u^2)^n du.$$

On peut, sans en changer la limite, négliger les portions de cette intégrale en dehors de l'intervalle $(-\varepsilon, \varepsilon)$. En effet, dans les intégrales négligées, le facteur

$$D^2(1-u^2)^n$$

est un infiniment petit d'ordre au moins égal à celui de

$$n^2(1-\varepsilon^2)^n < n^2 e^{-n\varepsilon^2};$$

et les intégrales négligées sont des infiniment petits de l'ordre de

$$n^2 k_n e^{-n\varepsilon^2} \int |f|\, du.$$

Il vient donc

$$\lim P''_n = \lim \frac{k_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)\, D^2(1-u^2)^n du$$

$$\lim P''_n = \lim \frac{k_n}{2}\int_0^{\varepsilon} [f(x+u)+f(x-u)]\, D^2(1-u^2)^n du.$$

Soit $2a_0$ la limite (supposée existante) de $f(x+u)+f(x-u)$ pour $u=0$.

On peut, sans changer sa limite, remplacer, dans l'intégrale, $f(x+u)+f(x-u)$ par

$$f(x+u)+f(x-u)-2a_0,$$

car cela revient à en retrancher une intégrale qui a pour limite 0. On a, en effet,

$$k_n\int_0^\varepsilon D^2(1-u^2)^n du = k_n[D(1-u^2)^n]_0^\varepsilon = -2nk_n\varepsilon(1-\varepsilon^2)^{n-1};$$

Écrivons donc

$$\lim P''_n = \lim \frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2} u^2 D^2(1-u^2)^n du.$$

Supposons maintenant que la dérivée seconde généralisée existe. Effectuons la dérivation indiquée; nous voyons que la limite de P''_n sera celle de la différence

$$\frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2} 4n(n-1)u^4(1-u^2)^{n-2}du$$

$$-\frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2} 2nu^2(1-u^2)^{n-1}du.$$

Désignons par μ et μ' des valeurs moyennes du rapport

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2}$$

dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$; comme ce rapport multiplie, dans chacune des deux intégrales, un facteur qui ne change pas de signe, nous pouvons appliquer le théorème

de la moyenne, et nous voyons que la limite de P''_n sera celle de

$$\mu \frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon (1-u^2)^{n-2}\, 4n(n-1)u^4 du$$

$$-\mu' \frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon (1-u^2)^{n-1}\, 2nu^2 du.$$

La première intégrale se ramène à la seconde par une intégration par parties et on peut négliger le terme aux limites (nul pour $u = 0$ et infiniment petit pour $u = \varepsilon$, $n = \infty$). On voit ainsi que la limite de P''_n est celle de

$$\frac{3\mu - \mu'}{2} k_n \int_0^\varepsilon (1-u^2)^{n-1}\, 2nu^2 du.$$

D'ailleurs l'intégration peut être étendue de 0 à 1 sans changer la limite; et l'on a, par une nouvelle intégration par parties

$$\int_0^1 (1-u^2)^{n-1}\, 2nu^2 du = \int_0^1 (1-u^2)^n du = \frac{1}{k_n}.$$

En définitive, la limite de P''_n est la même que celle de

$$\frac{3\mu - \mu'}{2}.$$

Mais comme ε peut être supposé infiniment petit, μ et μ' sont infiniment voisins de la dérivée généralisée supposée existante et P''_n a cette dérivée pour limite.

De là le théorème suivant :

16. Théorème VII. — *La dérivée seconde* P''_n *a pour limite la dérivée seconde généralisée de* $f(x)$ *en tout point où cette dérivée existe. En particulier,* P''_n *a pour limite* $f''(x)$ *en tout point où* $f''(x)$ *existe.*

Ce théorème appelle évidemment des remarques analogues à celles faites au n° 13 à l'occasion de la dérivée première.

Remarquons seulement que *la convergence de* P''_n *vers sa limite sera uniforme dans tout intervalle où le rapport*

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2a_0}{h^2}$$

tendra uniformément vers sa limite, donc, en particulier, dans tout intervalle intérieur à un autre où la dérivée seconde $f''(x)$ sera continue.

§ 4. — *Dérivées d'ordre supérieur.*

17. Théorème VIII. — *La dérivée d'ordre* r *quelconque* P^r_n *a pour limite la dérivée du même ordre de* $f(x)$ *en tout point où cette dérivée existe.*

Nous pouvons supposer $r > 2$.

Pour que $f^{(r)}(x)$ existe au point x, il faut que $f^{(r-1)}(x)$ existe et soit bornée dans un intervalle suffisamment petit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$; alors $f^{(r-2)}(x)$ est une fonction continue dans cet intervalle.

Considérons la relation

$$P_n = \frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u)[1-(u-x)^2]^n\,du.$$

Dérivons r fois par rapport à x, il vient

$$P_n^r = \frac{k_n}{2}\int_0^1 f(u)\,D_x^r[1-(u-x)^2]^n\,du.$$

Remplaçons D_x par $-D_u$ et u par $u+x$, il viendra

$$P_n^r = (-1)^r\frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x} f(u+x)\,D^r(1-u^2)^n\,du.$$

On peut, sans changer sa limite pour $n=\infty$, négliger les portions de cette intégrale en dehors de l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, car, dans ces portions d'intégrale, le facteur

$$D^r(1-u^2)^n$$

est un infiniment petit d'ordre au moins égal à celui de

$$n^r(1-\varepsilon^2)^n < n^r e^{-n\varepsilon^2}$$

et, par conséquent, les intégrales négligées sont infiniment petites comme l'expression

$$n^r k_n e^{-n\varepsilon^2}\int |f|\,du.$$

Écrivons donc

$$\lim P_n^r = (-1)^r \lim \frac{k_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\,D^r(1-u^2)^n\,du.$$

Si $f(x)$ a une dérivée d'ordre r, nous pouvons effectuer sans difficulté $r-2$ intégrations par parties consécutives,

car $f(u+x)$ et ses dérivées peuvent être supposées continues jusqu'à l'ordre $r-2$ dans l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Il vient ainsi, les termes aux limites étant tous infiniment petits pour $n=\infty$:

$$\lim P_n = \lim \frac{k_n}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^{r-2}(u+x)\, D^2(1-u^2)^n du.$$

Mais cette expression est tout juste celle dont nous avons cherché la limite au n° 15; elle a pour limite la dérivée seconde généralisée de $f^{r-2}(x)$ si elle existe. Or, cette dérivée existe dans le cas présent et elle est égale à la dérivée $f^r(x)$ supposée existante.

Le théorème est démontré.

18. Dérivées généralisées d'ordre supérieur. — Nous avons donné aux n°s 11 et 14 les définitions des *dérivées première et seconde généralisées*, et l'on aura certainement remarqué que la définition de la dérivée seconde généralisée est complètement indépendante de la considération de la dérivée première.

Il est naturel de se demander s'il est possible d'étendre ces définitions aux ordres supérieurs, de telle sorte que nos deux premières définitions rentrent comme cas particuliers dans une définition générale et que la définition de la dérivée généralisée d'ordre r ne soit pas liée à l'existence des dérivées *ordinaires* d'ordre moindre *dans le voisinage du point* x.

La chose est possible. On peut donner, de la dérivée généralisée d'ordre r, une définition qui suppose seulement l'existence des dérivées *généralisées* d'ordre moindre et de même parité *au seul point* x.

Supposons qu'on puisse écrire

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2} = a_1 h + a_3 \frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$+ a_{2n-1} \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} + (a_{2n+1} + \omega) \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

les coefficients a étant des constantes relativement à h et ω une quantité qui tend vers 0 avec h. Nous dirons que les coefficients a_1, a_3, ... a_{2n+1} sont les *dérivées généralisées successives d'ordre impair de* f(x).

De même, supposons qu'on puisse écrire

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} = a_0 + a_2 \frac{h^2}{2!} + a_4 \frac{h^4}{4!} + \cdots$$
$$+ a_{2n-2} \frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!} + (a_{2n} + \omega) \frac{h^{2n}}{(2n)!}$$

où les a sont des constantes par rapport à h et où ω tend vers 0 avec h. Nous dirons que a_2, a_4, ... a_{2n} sont les *dérivées généralisées successives d'ordre pair de* f(x).

Que ces dérivées généralisées coïncident avec les dérivées ordinaires quand les dérivées ordinaires existent, c'est ce qui résulte immédiatement de la comparaison du théorème IX qui suit avec le théorème VIII qui précède; par contre, l'existence des dérivées généralisées n'est pas liée à celle des dérivées ordinaires.

19. Théorème IX. — *La dérivée d'ordre* r *quelconque* P_n^r *de* P_n *a pour limite quand* n *croît indéfiniment la dérivée généralisée du même ordre de* f(x) *en tout point où cette dérivée généralisée existe.*

Reprenons la formule du n° 17 :

$$\lim P_n^r = (-1)^r \lim \frac{k_n}{2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\, D^r(1-u^2)^n du,$$

formule dont la démonstration subsiste aussi bien dans le cas actuel. Changeons la variable d'intégration u en $-u$ dans l'intervalle de $-\varepsilon$ à 0; il viendra

$$\lim P_n^r = (-1)^r \lim k_n \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u) \pm f(x-u)}{2u} D^r(1-u^2)^n du,$$

le signe ambigu dépendant de la parité de r ($+$ si r est pair, $-$ si r est impair).

Comme la démonstration se fait exactement de la même façon dans les deux cas, nous supposerons, pour fixer les idées, que r soit pair et nous écrirons

$$\lim P_n^r = \lim k_n \int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} D^r(1-u^2)^n du.$$

Faisons, en passant, une remarque essentielle. Si l'on remplace dans cette formule $f(x)$ par une fonction $\varphi(x)$ ayant une dérivée ordinaire de l'ordre r, le théorème VIII s'appliquant, on aura

$$\varphi^{(r)}(x) = \lim k_n \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(x+u) + \varphi(x-u)}{2} D^r(1-u^2)^n du.$$

Ceci bien entendu, supposons que $f(x)$ ait une dérivée

généralisée a_r d'ordre pair (n° 18); on aura, ω tendant vers 0 avec u,

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} = a_0 + a_2\frac{u^2}{2} + \cdots + (a_r+\omega)\frac{u^r}{r!},$$

ou encore

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} = \frac{\varphi(x+u)+\varphi(x-u)}{2} + \omega\frac{u^r}{r!}$$

en désignant par $\varphi(x+u)$ le polynôme

$$\varphi(x+u) = a_0 + a_2\frac{u^2}{2!} + \cdots + a_r\frac{u^r}{r!}.$$

Mais la remarque précédente s'applique à la fonction φ (qui est un polynôme), et l'on voit que

$$\varphi^{(r)}(x) = a_r.$$

On a donc

$$\lim k_n \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(x+u)+\varphi(x-u)}{2} \mathrm{D}^r(1-u^2)^n du = a_r.$$

Par conséquent, la limite de P_n^r ne peut différer de cette dérivée généralisée a_r que par l'expression

$$\lim k_n \int_0^{\varepsilon} \omega\frac{u^r}{r!}\mathrm{D}^r(1-u^2)^n du.$$

20. — La démonstration du théorème IX qui nous occupe est donc ramenée à démontrer que *l'intégrale*

$$k_n \int_0^{\varepsilon} \omega u^r \mathrm{D}^r(1-u^2)^n du$$

est infiniment petite avec ω, *quel que soit* n. Faisons cette démonstration.

La difficulté provient de ce que $D^r(1-u^2)^n$ n'ayant pas un signe invariable, on ne peut pas appliquer le théorème de la moyenne. Nous allons donc décomposer cette dérivée en une somme de termes qui ne changent pas de signe.

A cet effet, je remarque que

$$D^r(1-u^2)^n$$

se décompose en un certain nombre de termes de la forme générale

$$A_{r-s}(1-u^2)^{n-r+s}u^{r-2s},$$

où s parcourt les valeurs entières 0, 1, 2..., qui sont $\leqslant \frac{r}{2}$, et où A_{r-s} est un facteur numérique infiniment grand avec n, mais au plus de l'ordre de la puissance n^{r-s}, ordre marqué par son indice (*).

(*) Il n'y a aucune difficulté à obtenir explicitement ce développement. Posant

$$u^2 = t, \qquad \varphi(t) = (1-t)^n,$$

il est donné par la formule générale :

$$\frac{d^r\varphi(u^2)}{du^r} = (2u)^r\varphi^r(t) + \frac{r(r-1)}{1}(2u)^{r-2}\varphi^{r-1}(t)$$

$$+ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2}(2u)^{r-4}\varphi^{r-2}(t) + \cdots$$

Voir mon *Cours d'analyse*, t. I, p. 78, ex. 8; ou TISSERAND, *Recueil complémentaire d'exercices sur l'analyse infinitésimale*, problème 16 (Paris, G. V., 1896).

Cette propriété se vérifie directement pour les premiers ordres; on peut écrire :

$$D(1-u^2)^n = A_1(1-u^2)^{n-1}u$$
$$D^2(1-u^2)^n = A_2(1-u^2)^{n-2}u^2 + A_1(1-u^2)^{n-1}$$
$$D^3(1-u^2)^n = A_3(1-u^2)^{n-3}u^3 + A_2(1-u^2)^{n-2}u$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La valeur de A_1, A_2, ... change dans chaque équation, l'indice désignant seulement l'ordre de grandeur pour n infini.

Pour établir que la propriété est générale, il suffit de constater que la dérivée du terme général écrit plus haut

$$A_{r-s}(1-u^2)^{n-r+s}u^{r-2s}$$

est encore la somme de deux termes de la même forme générale (l'indice de dérivation r devant seulement augmenter d'une unité).

Or cette dérivée est

$$-2(n-r+s)A_{r-s}(1-u^2)^{n-r+s-1}u^{r-2s+1}$$
$$+\quad(r-2s)\quad A_{r-s}(1-u^2)^{n-r+s}\quad u^{r-2s-1}$$

Le premier terme est de la forme

$$A_{(r+1)-s}(1-u^2)^{n-(r+1)+s}u^{(r+1)-2s}$$

et le second de la forme

$$A_{(r+1)-(s+1)}(1-u^2)^{n-(r+1)+(s+1)}u^{(r+1)-2(s+1)}$$

ce qui justifie donc notre affirmation.

Remplaçons donc dans notre intégrale $D^r(1-u^2)^n$ par son développement. Comme le nombre des termes est indépendant de n, nous sommes ramenés à démontrer que l'intégrale de chaque terme

$$k_n A_{r-s} \int_0^\varepsilon \omega(1-u^2)^{n-r+s} u^{2r-2s} du$$

est infiniment petite avec ω. Mais, comme ω multiplie maintenant une quantité positive, nous pouvons faire sortir ω du signe $\int$ par le théorème de la moyenne; et il suffit de prouver que l'intégrale, débarrassée de ω,

$$k_n A_{r-s} \int_0^\varepsilon (1-u^2)^{n-r+s} u^{2r-2s} du$$

conserve une valeur finie, quel que soit n.

Comme $1-u^2$ est $< e^{-u^2}$, cette intégrale est moindre que

$$k_n A_{r-s} \int_0^\infty e^{-(n-r+s)u^2} u^{2r-2s} du$$

$$= \frac{k_n A_{r-s}}{2} \int_0^\infty e^{-(n-r+s)u} u^{r-s-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{k_n}{\sqrt{n-r+s}} \frac{A_{r-s}}{(n-r+s)^{r-s}} \Gamma(r-s+\tfrac{1}{2}).$$

Comme k_n est de l'ordre de $\sqrt{n}$ et A_{r-s} de l'ordre de n^{r-s}, cette expression est finie, quel que soit n.

Remarque. — La démonstration précédente met encore en lumière que *la convergence de* $P_n^{(r)}$ *vers sa limite sera uniforme, quand* x *varie, dans tout intervalle où* ω *tend uniformément vers* o ; donc, *en particulier, dans tout intervalle intérieur à un autre où la dérivée ordinaire d'ordre* r *est continue.*

§ 5. — *Degré d'approximation obtenu par le polynôme* P_n.

21. Hypothèses à faire sur $f(x)$. — La rapidité plus ou moins grande avec laquelle le polynôme P_n converge vers $f(x)$ quand n augmente, dépend de la nature de la fonction $f(x)$. On ne peut rien dire de plus avec les hypothèses très générales faites jusqu'ici.

Pour arriver à un résultat précis et pouvoir comparer les diverses méthodes d'approximation au point de vue qui nous occupe, il faut faire des hypothèses plus particulières.

Un des cas les plus intéressants et les plus instructifs est celui où l'équation

$$y = f(x)$$

représente une ligne polygonale. Nous allons faire des hypothèses qui comprendront en particulier le cas d'un polygone.

Nous supposerons que la fonction $f(x)$ est continue, qu'elle possède, en chaque point, une dérivée à gauche et une dérivée à droite

$$f'(x, -0), \qquad f'(x, +0),$$

toutes deux bien déterminées mais non nécessairement égales. Nous supposerons ces dérivées bornées dans l'intervalle (a, b) et nous désignerons par M le maximum absolu de $f(x)$, par M′ la borne supérieure absolue de sa dérivée dans l'intervalle (a, b).

Comme nous supposons (n° 3) $f(x)$ constant hors de l'intervalle (a, b), sa dérivée sera nulle hors de cet intervalle et les deux extrémités a et b seront en général des points où les dérivées à gauche et à droite seront différentes.

22. Ordre de l'approximation. — Nous allons montrer que, dans les hypothèses précédentes, l'approximation sera en général de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, c'est-à-dire que la différence

$$f(x) - P_n$$

sera de cet ordre si l'on considère l'ensemble de l'intervalle (a, b).

Revenons à notre formule du n° 3 :

$$P_n = \frac{k_n}{2}\int_{-z}^{1-z} f(x+u)(1-u^2)^n du.$$

On a, par définition de k_n (n° 2),

$$1 = \frac{k_n}{2}\int_{-z}^{1-z} + \frac{k_n}{2}\int_{-1}^{-z} + \frac{k_n}{2}\int_{1-z}^{1} (1-u^2)^n du.$$

Désignons par α la plus petite des deux quantités a et $1 - b$. Quand x appartient à l'intervalle (a, b), on a

$$\int_{1-x}^{1}(1-u^2)^n du < \int_{\alpha}^{1}(1-u^2)^n du = \frac{1}{2}\int_{\alpha^2}^{1}(1-u)^n \frac{du}{\sqrt{u}},$$

$$< \frac{1}{2\alpha}\int_{\alpha^2}^{1}(1-u)^n du = \frac{(1-\alpha^2)^{n+1}}{2(n+1)\alpha},$$

$$< \frac{e^{-(n+1)\alpha^2}}{2(n+1)\alpha};$$

et, de même, cette quantité est une limite de l'intégrale prise entre -1 et $-x$.

Comme $\frac{k_n}{2}$ est $< \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$, on peut donc écrire $(0 < \theta < 1)$:

$$1 = \frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x}(1-u^2)^n du + \theta\frac{e^{-(n+1)\alpha^2}}{\alpha\sqrt{(n+1)\pi}}.$$

Multiplions par $f(x)$, dont la valeur absolue est $< M$, et soustrayons de la formule donnant P_n; il vient :

$$P_n - f(x) = \frac{k_n}{2}\int_{-x}^{1-x}[f(x+u) - f(x)](1-u^2)^n du$$

$$+ \frac{\theta M}{\alpha}\frac{e^{-(n+1)\alpha^2}}{\sqrt{(n+1)\pi}} \qquad (-1 < \theta < 1).$$

Le dernier terme décroît comme une exponentielle quand n augmente.

Le terme précédent peut se décomposer dans les deux termes ci-dessous :

$$\frac{k_n}{4}\int_0^{\alpha}\frac{f(x-u)-f(x)}{u}(1-u^2)^n\,2u\,du$$

$$+\frac{k_n}{4}\int_0^{1-\alpha}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}(1-u^2)^n\,2u\,du.$$

Donc M′ étant la borne supérieure de $|f'(x)|$, ces termes sont moindres en valeur absolue que

$$\frac{k_n}{4}M'\left[\int_0^{\alpha}+\int_0^{1}(1-u^2)^n du\right]=\frac{M'}{2}\frac{k_n}{n+1}<\frac{M'}{2\sqrt{(n+1)\pi}}.$$

En substituant ces limites, il vient, en définitive,

$$|P_n-f(x)|<\frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}\left[\frac{M'}{2}+\frac{M}{\alpha}e^{-(n+1)\alpha^2}\right].$$

Cette inégalité, valable dans tout l'intervalle (a, b), donne la mesure du degré d'approximation obtenu. L'approximation obtenue est donc de l'ordre de $1:\sqrt{n}$.

D'ailleurs elle ne peut pas être d'un ordre plus élevé pour l'ensemble de l'intervalle (a, b), s'il y a des points où les dérivées à droite et à gauche diffèrent.

En effet, les deux termes transformés en dernier lieu

$$\frac{k_n}{4}\int_0^{\alpha}\frac{f(2+u)-f(x)}{u}(1-u^2)^n\,2u\,du$$

$$+\frac{k_n}{4}\int_0^{1-\alpha}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}(1-u^2)^n\,2u\,du$$

sont les deux termes principaux de la différence $P_n - f(x)$ et, en un point où $f'(x, +0)$ et $f'(x, -0)$ diffèrent, on en trouve immédiatement la valeur asymptotique.

En effet, on peut, sans altérer cette valeur, réduire l'intervalle d'intégration à $(0, \varepsilon)$, ε étant infiniment petit, puis faire sortir les rapports

$$\frac{f(x-u)-f(x)}{u}, \qquad \frac{f(x+u)-f(x)}{u}$$

hors du signe $\int$ en se servant du théorème de la moyenne. On peut donc remplacer ces rapports par leurs limites

$$-f'(x, -0), \qquad f'(x, +0)$$

et la valeur asymptotique cherchée est la même que celle de l'expression

$$\left[-\frac{k_n}{4} f'(x, -0) + \frac{k_n}{4} f'(x, +0)\right] \int_0^\varepsilon (1-u^2)^n 2u\,du,$$

c'est-à-dire (l'intégration s'effectuant)

$$k_n \frac{f'(x, +0) - f'(x, -0)}{4(n+1)},$$

et, en remplaçant k_n par sa valeur asymptotique,

$$\frac{f'(x, +0) - f'(x, -0)}{4\sqrt{\pi n}}.$$

Telle est donc la valeur asymptotique de la différence $P_n - f(x)$ en un point où les deux dérivées sont inégales. Elle est bien de l'ordre de $1 : \sqrt{n}$.

23. Comparaison avec la méthode de M. Lebesgue (*). — La méthode de M. Lebesgue pour la représentation de l'ordonnée d'un polygone, trouve son point de départ dans la représentation de l'ordonnée de l'*angle droit* représenté par l'équation

$$y = |x| \quad (^{**}).$$

M. Lebesgue remarque que l'on a, en posant $z = x^2 - 1$,

$$|x| = (1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{4} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^3}{6} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^4}{8} + \cdots$$

Si k_n est défini comme au n° 2, le terme général est

$$\pm \frac{k_n}{(2n-1)(2n+1)} z^n;$$

il est donc de l'ordre de

$$\frac{z^n}{n\sqrt{n}},$$

et la série est *absolument* et *uniformément* convergente dans l'intervalle de -1 à $+1$.

En appelant $P_{(x)}$ la somme des n premiers termes de la série, qui est un polynôme de degré $2n-2$, l'équation

$$y = P(x)$$

représente donc approximativement l'angle droit considéré, au voisinage du sommet.

(*) *Bulletin des sciences mathématiques*, 1898, p. 278.

(**) Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles...*, p. 60.

Cherchons le degré d'approximation au sommet de l'angle, c'est-à-dire pour $x = 0$ ou $z = -1$. Tous les termes négligés sont négatifs, l'erreur est donc de l'ordre de

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

L'approximation est du même ordre que celle fournie par le polynôme P_n.

Cette approximation n'est pas la meilleure. *On peut représenter l'ordonnée d'un polygone avec une erreur de l'ordre de* $\frac{1}{n}$ *seulement par un polynôme de degré* n.

Mais la démonstration de ce théorème se rattache naturellement à un mémoire *Sur l'interpolation* que nous présentons à l'Académie en même temps que cette note, et on la trouvera à la fin de ce mémoire.

CHAPITRE II

Approximation des fonctions par des séries limitées de Fourier.

§ 1. — *Définition des formules d'approximation.*

24. Préliminaire. — Weierstrass a démontré que toute fonction continue ayant la période 2π peut se représenter avec telle approximation que l'on veut par une suite finie de Fourier, ou, ce qui est la même chose, par un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

Dans le tome Ier de son *Cours d'analyse*, M. Picard déduit de l'intégrale de Poisson, que nous considérons plus loin (n° 41), la possibilité de représenter une fonction continue par une série trigonométrique limitée, et c'est même de là qu'il tire sa démonstration du théorème de Weierstrass sur la représentation par une série de polynômes.

M. Lebesgue (*) a montré qu'on peut faire l'inverse, et passer de l'approximation par une suite de polynômes à l'approximation par une suite de Fourier.

Aucun des auteurs précédents ne paraît s'être préoccupé de la représentation approchée des dérivées.

Nous allons traiter la question de la représentation approchée par une série trigonométrique limitée, en nous plaçant à un point de vue nouveau.

Nous allons voir apparaître une analogie tellement étroite entre le problème que nous posons maintenant et celui de la représentation par un polynôme que nous venons de traiter, que cette analogie nous paraît véritablement digne d'attention.

Notre méthode sera donc calquée sur celle du chapitre précédent, et nous allons retrouver les analogues de tous les théorèmes précédemment établis, ce qui nous permettra d'abréger les démonstrations.

L'extension au problème actuel des théorèmes sur la dérivation nous conduira, en outre, à des conclusions intéressantes sur les séries de Fourier.

25. La constante h_n. — C'est celle qui correspond à la constante k_n du chapitre précédent.

(*) *Bulletin des sciences mathématiques*, 1898, p. 285.

Nous considérons cette fois l'intégrale (n entier)

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n} \frac{u}{2} du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u \, du = \frac{1}{h_n}$$

où l'on a

$$h_n = \frac{1}{\pi} \frac{2 \,.\, 4 \ldots 2n}{1 \,.\, 3 \ldots (2n - 1)}.$$

Quand n tend vers l'infini, la valeur asymptotique de h_n se tire des relations

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} u \, du > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u \, du > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} u \, du$$

qui donnent, en remplaçant les intégrales par leurs valeurs,

$$\pi \frac{h_n}{2n} > \frac{1}{2h_n} > \pi \frac{h_n}{2n + 1},$$

d'où ($0 < \theta < 1$)

$$h_n = \sqrt{\frac{2n + \theta}{2\pi}}.$$

La valeur asymptotique de h_n sera donc $\sqrt{\frac{n}{\pi}}$ et l'on aura

$$h_n < \sqrt{\frac{n + 1}{\pi}}.$$

26. Définition de l'intégrale I_n. — Cette intégrale est l'analogue de l'intégrale P_n du chapitre précédent.

Nous nous proposons de représenter une fonction $f(x)$

périodique et de période 2π. Cette fonction sera donc complètement définie par ses valeurs dans l'intervalle

$$(-\pi, \quad +\pi)$$

et nous pouvons nous borner à considérer cet intervalle.

Nous supposerons que la fonction $f(x)$ satisfait aux mêmes conditions que dans le chapitre précédent. Elle est bornée et intégrable au sens de Riemann, ou bien elle peut devenir infinie en un certain nombre de points exceptionnels, mais de manière que l'intégrale

$$\int |f| \, dx$$

conserve une valeur finie.

Plus généralement, on peut admettre que la fonction est *sommable* dans le sens de M. Lebesgue.

Ceci entendu, nous posons

$$I_n = \frac{h_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\cos \frac{u-x}{2}\right]^{2n} du.$$

Cette intégrale possède, comme on va le voir, des propriétés qui la rapprochent de celle de Poisson utilisée par M. Picard et elle peut rendre les mêmes services. Mais tandis que l'intégrale de Poisson se développe en série trigonométrique illimitée (n° 41), celle-ci fournit un développement qui s'arrête de lui-même et donne, par conséquent, la solution du problème que nous nous sommes proposé.

27. Développement de I_n en série limitée de Fourier. — En développement

$$\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n} = \left(e^{\frac{\theta i}{2}} + e^{-\frac{\theta i}{2}}\right)^{2n}$$

par la formule du binôme, et en négligeant la partie imaginaire de chaque terme, on trouve

$$2^{2n}\cos^{2n}\frac{\theta}{2} = \cos n\theta + 2n\cos(n-1)\theta + \frac{2n(2n-1)}{1\,.\,2}\cos(n-2)\theta$$

$$+ \cdots + \frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1\,.\,2\ldots n} + \cdots + \cos n\theta.$$

Nous avons écrit le terme du milieu et ceux à égale distance des extrêmes sont égaux.

Si l'on range les termes dans l'ordre de leur distance au terme du milieu, il vient donc

$$\cos^{2n}\frac{\theta}{2} = g_n\left[\frac{1}{2} + \frac{n}{n+1}\cos\theta + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos 2\theta\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,5}\cos 3\theta + \cdots\right]$$

en désignant par g_n le coefficient numérique

$$g_n = \frac{2}{2^{2n}}\,\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{1\,.\,2\ldots n} = \frac{2}{2^{2n}}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

D'après la formule de Stirling, la valeur asymptotique de g_n pour $n = \infty$ sera

$$\frac{2}{2^{2n}}\,\frac{\sqrt{2\pi\,.\,2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi n}}.$$

Faisons $\theta = u - x$; d'où

$$\cos k\theta = \cos ku\cos kx + \sin ku\sin x$$

et substituons le développement de $\cos^{2n}\frac{\theta}{2}$ dans l'intégrale I_n; il viendra

$$I_n = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

où les coefficients ont pour valeurs :

$$A_0 = \frac{h_n g_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_k &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \frac{h_n g_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku\,du \\ B_k &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \frac{h_n g_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku\,du. \end{aligned} \right.$$

Nous avons ainsi obtenu le développement de I_n en série trigonométrique limitée.

Comme h_n et g_n ont respectivement pour valeurs asymptotiques

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \quad \text{et} \quad \frac{2}{\sqrt{\pi n}},$$

la valeur asymptotique de $\frac{1}{2} h_n g_n$ est $\frac{1}{\pi}$.

On voit donc que quand n tend vers l'infini les coefficients A_k et B_k tendent vers ceux de Fourier.

28. Définition d'une nouvelle suite limitée de Fourier S_n. — Remarquons que l'on ne change rien aux valeurs asymptotiques de I_n et de ses dérivées en

remplaçant dans tous les termes $\left(\frac{h_n q_n}{2}\right)$ par sa valeur asymptotique $\frac{1}{\pi}$.

Cela revient, en effet, à multiplier l_n par un facteur numérique qui tend vers l'unité.

En faisant cela, on obtient le développement

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

dans lequel les coefficients a et b sont ceux de Fourier :

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos kudu, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin kudu.$$

En définitive, notre somme S_n n'est pas autre chose que la somme des $n+1$ premiers termes de la série de Fourier, respectivement multipliés par un facteur numérique qui décroît constamment d'un terme au suivant : de la valeur 1 (pour le premier terme) jusqu'à la valeur 0 (pour celui de rang $n+2$). De plus, chaque facteur tend vers l'unité quand n tend vers l'infini.

En faisant tendre n vers l'infini et en cherchant la limite de S_n, *nous définissons donc un mode particulier de sommation de la série de Fourier* (*).

(*) Sur la sommation des séries de Fourier divergentes, on peut consulter les *Leçons sur les séries trigonométriques* de M. Lebesgue (Paris, G. V., 1906), nos 48 et suivants. Le procédé de sommation de M. Fejér, qui y est étudié, mérite particulièrement l'attention. Celui que nous définissons a, comme le procédé de M. Fejér, l'avantage de passer par l'intermédiaire de suites *finies* de Fourier, mais il est, croyons-nous, beaucoup plus général.

29. Relations entre la somme S_n et la série de Fourier. — *Si la série de Fourier*

$$S = \frac{a_0}{2} + \Sigma(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

est convergente, S_n *a pour limite* S, *quand* n *tend vers l'infini.*

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce théorème, car il est clair qu'il se démontre comme le théorème classique d'Abel sur les séries entières, théorème dont voici l'énoncé :

Si la série

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \cdots$$

est convergente et a pour somme S, *on a aussi, quand* x *tend vers* 1 *en croissant,*

$$\lim_{x=1} (\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k + \cdots) = S.$$

En effet, la démonstration connue du théorème d'Abel repose sur cette seule circonstance que l'on a multiplié respectivement les termes successifs de la série $\Sigma\alpha_k$ par les facteurs x^k qui décroissent d'un terme au suivant et qui tendent chacun vers l'unité quand x tend vers l'unité. — On fait exactement la même chose pour passer de la série de Fourier à la somme S_n, sauf que les facteurs de la transformation deviennent tous nuls à partir d'un certain rang.

Donc S_n tend vers la somme S de la série de Fourier quand cette série converge. Mais, comme on le verra, S_n a une limite dans des cas très généraux où la série de Fourier ne converge pas, ce qui généralise donc dans un sens très étendu la sommation de la série de Fourier.

Mais il y a plus : la relation que nous venons d'étudier entre la somme S_n et la série de Fourier se conserve exactement la même entre les dérivées de S_n et les dérivées du même ordre de la série de Fourier. Donc *partout où les dérivées de la série de Fourier convergent, elles ont nécessairement pour sommes les limites des dérivées correspondantes de* S_n.

Cette relation entre S_n et la série de Fourier est accessoire dans notre étude ; mais elle méritait d'être signalée, car elle ajoute un nouvel intérêt à la recherche des limites de S_n ou, ce qui revient au même, de I_n.

Nous allons donc passer maintenant à la recherche de ces limites.

§ 2. — *Convergence des suites d'approximation* I_n *et* S_n.

30. Remarques préliminaires. — Comme nous l'avons dit précédemment (n° 28), les limites de I_n et de S_n ou, plus généralement, leurs valeurs asymptotiques, sont les mêmes quand n tend vers l'infini. Il nous suffira donc de considérer l'intégrale I_n.

Nous avons dit au n° 26 que nous considérions la fonction $f(x)$ de *période* 2π et que cette fonction était, par conséquent, définie par ses valeurs dans l'intervalle $-\pi$ et $+\pi$. Il suffit donc de faire varier x dans cet intervalle.

Toutefois, pour éviter des longueurs inutiles, nous supposerons dans les démonstrations que x ne sort pas de l'intervalle

$$(-\pi + \varepsilon, \quad \pi - \varepsilon),$$

où ε est un nombre positif, d'ailleurs aussi petit qu'on veut.

Dans cette hypothèse, mettons en regard l'intégrale I_n avec celle P_n de la première partie :

$$I_n = \frac{h_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos^{2n}\left(\frac{u-x}{2}\right)du$$

$$P_n = \frac{k_n}{2}\int_{0}^{1} f(u)[1-(u-x)^2]^n du.$$

Le facteur $\cos^{2n}\left(\frac{u-x}{2}\right)$ de l'intégrale I_n est < 1 dans tout le champ d'intégration, sauf pour la seule valeur $u = x$. On peut donc raisonner sur ce facteur comme nous l'avons fait sur le facteur

$$[1-(u-x)^2]^n$$

de l'intégrale P_n dans les démonstrations de la première partie.

Cependant les théorèmes, établis pour l'intervalle $(-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, subsisteront pour l'intervalle entier $(-\pi, +\pi)$; et les points extrêmes $-\pi$ et $+\pi$ seront complètement assimilables aux autres, à condition d'avoir égard à la périodicité de $f(x)$ et de I_n. Cette extension s'obtient par des raisonnements tout pareils à ceux que l'on fait dans le cas de la série de Fourier et il est inutile de les développer.

Nous allons maintenant donner les analogues des théorèmes de la première partie en donnant le même numéro d'ordre aux théorèmes correspondants. Nous ne recommençons pas la démonstration quand l'extension est immédiate.

31. Théorème I. — *La valeur asymptotique (pour* n *infini) de* I_n *et de* S_n *dépend uniquement de la nature de* f(x) *dans le voisinage immédiat du point* x.

Par le changement de u en $u + x$, il vient

$$I_n = \frac{h_n}{2}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du.$$

La valeur asymptotique de I_n sera la même que celle de

$$\frac{h_n}{2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du,$$

quelque petite que soit la constante ε. On voit, en effet, comme dans la démonstration du théorème analogue (n° 4), que les parties d'intégrales négligées sont infiniment petites comme les expressions

$$h_n \cos^{2n}\frac{\varepsilon}{2}\int |f|\,dx \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{n}\cos^{2n}\frac{\varepsilon}{2}.$$

32. Théorème II. — *En tout point où* f(x) *est continue, on a, pour* n *infini,*

$$\lim S_n = \lim I_n = f(x).$$

33. Théorème III. — *La convergence est uniforme dans tout intervalle où* f(x) *est continue.*

34. Théorème IV. — *En un point de discontinuité de* f(x), *les plus grande et plus petite limites de* I_n *et de* S_n *sont*

comprises dans l'intervalle des bornes supérieure et inférieure de f(x) *au point* x.

35. Théorème V. — *En un point de discontinuité de première espèce, on a*

$$\lim I_n = \lim S_n = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

§ 3. — *Convergence des dérivées.*

36. Théorème VI. — *Les dérivées premières de* I_n *et de* S_n *ont pour limite la dérivée première généralisée* (n° 11) *de* f(x) *en tout point où celle-ci existe. Cette limite sera égale, en particulier, à la dérivée* f'(x) *partout où cette dérivée ordinaire existe.*

En effet, on peut reproduire, point par point, la démonstration du théorème analogue donnée au n° 12 en y remplaçant seulement k_n par h_n, puis en remplaçant

$$[1-(u-x)^2]^n \quad \text{par} \quad \cos^{2n}\frac{u-x}{2},$$

$$d:(1-u^2)^n \quad \text{par} \quad d\cos^{2n}\frac{u}{2}.$$

37. Théorème VII. — *Les dérivées secondes de* I_n *et de* S_n *ont pour limite la dérivée seconde généralisée* (n° 14) *de* f(x) *en tout point où cette dérivée généralisée existe.*

En effet, de même qu'on a trouvé, dans la démonstra-

tion du n° 15, que la valeur asymptotique de P''_n est la même que celle de l'intégrale

$$\frac{k_n}{2}\int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2}u^2D^2(1-u^2)^n du,$$

de même on trouvera, dans le cas actuel, que la valeur asymptotique de I''_n est la même que celle de l'expression

$$\frac{h_n}{2}\int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2}u^2D^2(1-u^2)^n du,$$

l'intégrale

$$\frac{h_n}{2}\int_0^\varepsilon D^2\cos^{2n}\frac{u}{2}du$$

étant infiniment petite.

Si la dérivée seconde généralisée a_2 existe, on a, ω tendant vers 0 avec u,

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)-2a_0}{u^2}=a_2+\omega.$$

La limite de I''_n sera donc celle de la somme

$$a_2\frac{h_n}{2}\int_0^\varepsilon u^2D^2\cos^{2n}\frac{u}{2}du$$

$$+\frac{h_n}{2}\int_0^\varepsilon \omega u^2D^2\cos^{2n}\frac{u}{2}du.$$

Si l'on fait deux intégrations par parties consécutives, en observant que les termes aux limites sont infiniment petits, on voit que la limite du premier terme est celle de

$$a_2 h_n \int_0^{\varepsilon} \cos^{2n} \frac{u}{2}\, du, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_2.$$

Pour établir le théorème, il suffit donc d'établir que le second terme est infiniment petit avec ω, quel que soit n, car ω peut être supposé infiniment petit en même temps que ε.

Comme on peut changer la variable u en $2u$ et remplacer ε par 2ε, nous sommes donc ramenés à établir que

$$h_n \int_0^{\varepsilon} \omega u^2 D^2 \cos^{2n} u\, du$$

est infiniment petit avec ω.

On a

$$D^2 \cos^{2n} u = 2n(2n-1)\cos^{2n-2} u \sin^2 u - 2n \cos^{2n} u.$$

Mais, pour $0 < u < \varepsilon$, on a

$$\sin u < u \qquad \text{et} \qquad \cos u < e^{-\frac{u^2}{2}},$$

car la fonction $e^{\frac{u^2}{2}} \cos u$, qui est égale à 1 pour $u = 0$, est décroissante, sa dérivée

$$e^{\frac{u^2}{2}} \cos u\,[u - \operatorname{tg} u]$$

étant négative. On a donc

$$D^2 \cos^{2n} u = 2n(2n-1)\cos^{2n-2} u \sin^2 u - 2n \cos^{2n} u,$$

$$| D^2 \cos^{2n} u | < 4n^2 e^{-(n-1)u^2} u^2 + 2ne^{-nu^2}.$$

Nous sommes ainsi conduits à démontrer que les deux intégrales

$$h_n n^2 \int_0^{\varepsilon} \omega e^{-(n-1)u^2} u^4 du,$$

$$h_n n \int_0^{\varepsilon} \omega e^{-nu^2} u^2 du,$$

sont infiniment petites avec ω, quel que soit n. Mais cette conclusion apparaît par le changement de u en $\frac{u}{\sqrt{n-1}}$ ou en $\frac{u}{\sqrt{n}}$ qui ramène respectivement ces intégrales aux deux suivantes :

$$\frac{h_n}{\sqrt{n-1}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{n-1}} \omega e^{-u^2} u^4 du,$$

$$\frac{h_n}{\sqrt{n}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{n}} \omega e^{-u^2} u^2 du,$$

h_n étant de l'ordre de $\sqrt{n}$.

38. Théorème VIII. — *Les dérivées d'ordre* k *quelconque de* I_n *ou de* S_n *ont pour limite la dérivée du même ordre de* f(x) *en tout point où cette dérivée existe.*

Ce théorème se démontre comme le théorème analogue du n° 17.

39. Théorème IX. — *Les dérivées d'ordre* r *quelconque de* I_n *et de* S_n *ont pour limite la dérivée généralisée du même ordre de* f(x) (n° 18) *en tout point où cette dérivée généralisée existe.*

De même que la démonstration du théorème analogue sur P_n revient à prouver (n° 19) que l'expression

$$k_n \int_0^\varepsilon \omega u^r D^r (1 - u^2)^n du$$

est infiniment petite avec ω quel que soit n, de même la démonstration du théorème actuel revient à prouver que l'expression

$$h_n \int_0^\varepsilon \omega u^r D^r \cos^{2n} \frac{u}{2} du$$

est infiniment petite avec ω. Pour simplifier, remplaçons u par $2u$ et ε par 2ε, nous devrons prouver la même chose pour l'expression

$$h_n \int_0^\varepsilon \omega u^r D^r \cos^{2n} u du.$$

A cet effet, remarquons que $D^r \cos^{2n} u$ est la somme d'un certain nombre (fonction de r) de termes de la forme générale

$$A_{r-s} \cos^{2n-r+2s} u \sin^{r-2s} u,$$

où s prend les valeurs 0, 1, 2, ... qui ne surpassent pas $\frac{r}{2}$ et où A_{r-s} désigne en général un coefficient numérique infiniment grand avec n, mais *de l'ordre de* n^{r-s}.

Cette propriété se vérifie directement pour le premier ordre, et on prouve qu'elle est générale en observant que la dérivée du terme général écrit ci-dessus est la somme de deux termes analogues, mais où r est changé en $r+1$. Nous avons développé une démonstration toute pareille au n° 20.

Remplaçons donc, dans la dernière intégrale, $D^r \cos^{2n} u$ par ce développement; il suffira de montrer que

$$A_{r-s} h_n \int_0^\varepsilon \omega u^r \cos^{2n-r+2s} u \sin^{r-2s} u du$$

est infiniment petit avec ω.

Mais on peut appliquer le théorème de la moyenne pour faire sortir du signe $\int$ le facteur, infiniment petit avec ω,

$$\omega \cos^{2s-r} u;$$

il suffit donc de montrer que l'intégrale

$$A_{r-s} h_n \int_0^\varepsilon u^r \cos^{2n} u \sin^{r-2s} u du$$

conserve toujours une valeur finie.

Mais on a (n° 37)

$$\cos^{2n} u < e^{-nu^2}, \quad \sin u < u;$$

cette intégrale est donc moindre que

$$A_{r-s} h_n \int_0^\infty u^{r-s} e^{-nu^2} du = \frac{A_{r-s}}{n^{r-s}} \frac{h_n}{\sqrt{n}} \int_0^\infty u^{r-s} e^{-u^2} du;$$

elle est donc finie, car A_{r-s} est de l'ordre de n^{r-s} et h_n de l'ordre de $\sqrt{n}$.

Remarque. — La démonstration met en évidence que *la convergence des dérivées d'ordre* r *de* I_n et S_n *vers leur limite sera uniforme* (x *variant*) *dans tout intervalle où* ω *tendra uniformément vers* 0 *avec* u; *donc, en particulier, dans tout intervalle intérieur à un autre où la dérivée ordinaire d'ordre* k *de* f(x) *sera continue.*

40. Application aux séries de Fourier. — D'après ce qui a été dit au n° 29, si l'on définit la somme d'une série de Fourier par la limite de la somme S_n correspondante, ce procédé de sommation jouit de la propriété remarquable que voici et qui, pensons-nous, n'a pas été encore signalée même pour d'autres procédés.

Étant donnée la série de Fourier d'une fonction f(x), *si l'on dérive successivement cette série au point* x, *la somme d'une série dérivée d'ordre quelconque, somme déterminée par le procédé* (S_n), *sera égale à la dérivée correspondante de* f(x) *au point* x, *si la dérivée existe en ce point. — Plus généralement, la somme de la série dérivée sera égale à la dérivée généralisée de* f(x), *si cette dérivée existe.*

En particulier, si la dérivée d'ordre quelconque d'une série de Fourier converge (dans le sens ordinaire) au point x, elle aura pour somme la dérivée du même ordre de $f(x)$, sous la seule condition que cette dérivée (ordinaire ou généralisée) existe au point x.

La propriété remarquable que nous venons de reconnaître au procédé de sommation (S_n) nous amène naturellement à nous demander si un autre procédé, déjà connu, ne jouirait pas des mêmes propriétés. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi pour le procédé de sommation de Poisson.

§ 4. — *Digression sur la sommation des dérivées des séries de Fourier par le procédé de Poisson.*

41. Intégrale de Poisson. — Conservons toutes nos hypothèses précédentes (n° 26) sur la fonction $f(x)$ et considérons la *série de Fourier de cette fonction*, c'est-à-dire la série formelle

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \Sigma (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

dont les coefficients sont définis au n° 28, laquelle série peut converger ou non au point x.

Pour sommer cette série, Poisson considère la fonction (*)

$$J(r, x) = \tfrac{1}{2} a_0 + \Sigma r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

qui existe pour $0 < r < 1$ dans les hypothèses que nous venons de rappeler; et il convient que la somme de la série de Fourier sera, par définition,

$$\lim_{r=1} J(r, s).$$

Cette limite est d'ailleurs égale à la somme de la série dans le sens ordinaire chaque fois que la série est convergente (Théorème d'Abel, n° 29).

Que la fonction $J(r, x)$ existe sous ces conditions très générales, c'est ce qui résulte immédiatement de ce fait que $J(r, x)$ s'exprime par l'intégrale (bien déterminée dans ce cas), connue sous le nom d'*intégrale de Poisson*,

$$J(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{(1 - r^2) du}{1 - 2r \cos(u - x) + r^2}.$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 18e cahier.

La transformation se fait par la formule bien connue

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = 1 + 2\sum_1^\infty r^n \cos n\theta \quad (*).$$

Donc, pour trouver la somme de la série de Fourier et aussi de ses dérivées d'ordre quelconque par le procédé de Poisson, il faut chercher la limite de J et de ses dérivées par $r = 1$.

C'est un résultat bien connu que J tend vers $f(x)$ aux points où $f(x)$ est continue. C'est pourquoi nous allons passer immédiatement à la considération des dérivées. Nos calculs antérieurs nous tracent d'ailleurs la voie à suivre par arriver au résultat.

42. Transformation préalable de la dérivée de l'intégrale de Poisson. — Dans le cas actuel, le facteur de discontinuité, analogue au facteur $\cos^{2n}\frac{u-x}{2}$ de tout à l'heure, est

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(u - x) + r^2}.$$

Ce facteur est toujours positif si $0 < r < 1$; et, si l'on impose à x la condition de rester compris dans l'intervalle

$$(-\pi + \varepsilon, \quad \pi - \varepsilon)$$

quelque petit que soit ε positif, ce facteur tend vers 0 quand r tend vers l'unité, sauf pour la seule valeur $u = x$ qui le rend infini; et toutes les dérivées de ce facteur possèdent la même propriété.

(*) Voir, par exemple, PICARD, *Traité d'analyse*, t. I, 1re édit., p. 248.

Nous supposerons donc, dans les démonstrations, que x varie dans cet intervalle. Mais, comme nous l'avons déjà remarqué au n° 30 pour I_n, les conclusions s'appliqueront à toutes les valeurs de x, à cause de la périodicité supposée de la fonction $f(x)$.

Il suit de la remarque que nous venons de faire sur le facteur de discontinuité, que la dérivée d'ordre k quelconque (*)

$$J_x^{(k)}(r, x) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, D_x^k \frac{1}{1 - 2r\cos(u - x) + r^2} du$$

aura la même valeur asymptotique (r tendant vers 1) que l'intégrale

$$\frac{1 - r^2}{2\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(u)\, D_x^k \frac{1}{1 - 2r\cos(u - x) + r^2} du.$$

Mais on peut remplacer D_x par $-D_u$, puis la variable x

(*) La dérivation sous le signe ne donne pas lieu à difficulté. En remplaçant dans l'intégrale

$$D_x^k \frac{1}{1 - 2r\cos(u - x) + r^2}$$

par son développement en série *uniformément convergente*

$$2\Sigma D_x^k, r^n \cos n(u - x),$$

et en intégrant terme à terme, on trouve tous les mêmes termes qu'en dérivant k fois l'expression de $J(r, x)$ en série. Toutes les séries sont *uniformément convergentes*.

par $x + u$, ce qui ramène cette intégrale aux suivantes :

$$(-1)^k \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+u)\, D_u^k \frac{1}{1-2r\cos u + r^2}\, du$$

$$(-1)^k \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{0}^{\varepsilon} [f(x+u) \pm f(x-u)]\, D_u^k \frac{1}{1-2r\cos u + r^2}\, du,$$

le signe ambigu dépendant de la parité de k ($+$ si k est pair, $-$ si k est impair).

Pour trouver la limite de cette expression, il convient d'abord d'étudier la dérivée qui s'y trouve.

48. Dérivées du facteur de discontinuité. — Nous aurons à utiliser deux propriétés des dérivées par rapport à u du facteur.

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos u + r^2}.$$

1° *Toutes les dérivées d'ordre impair s'annulent pour* $u = 0$.

On s'aperçoit immédiatement de cette propriété en dérivant (ce qui est permis) le développement de ce facteur, à savoir

$$1 + 2\Sigma r^n \cos nu;$$

les dérivées d'ordre impair ne contiennent que des sinus.

2° La dérivée d'ordre k quelconque de

$$\frac{1}{1-2r\cos u + r^2}$$

se décompose (abstraction faite de coefficients numériques finis quand r tend vers un) en une somme de termes de la forme générale

$$\frac{\sin^{\alpha} u \cos^{\beta} u}{(1 - 2r \cos u + r^2)^{\gamma}}$$

où les exposants sont entiers, α et β nuls ou positifs et $\gamma > 1$, avec la condition

$$2\gamma - \alpha \leqq k + 2.$$

Cette propriété se vérifie immédiatement pour le premier ordre. Pour établir qu'elle est générale, il suffit de la supposer vraie pour le terme général écrit ci-dessus et de montrer qu'elle subsiste (en changeant k en $k + 1$) pour les termes qui s'en déduisent par une dérivation.

Or cette dérivation peut donner trois termes (il y en a moins si α ou β est nul), les exposants devenant respectivement (le cas d'un exposant négatif étant à exclure) :

$\alpha - 1$	$\beta + 1$	γ	pour le premier terme,
$\alpha + 1$	$\beta - 1$	γ	pour le second terme,
$\alpha + 1$	β	$\gamma + 1$	pour le troisième terme.

Donc $2\gamma - \alpha$ est remplacé par l'un des nombres

$$(2\gamma - \alpha) + 1 \qquad (2\gamma - \alpha) - 1 \qquad (2\gamma - \alpha) + 1,$$

si ce nombre augmente, il augmente de 1 comme k et l'inégalité $2\gamma - \alpha \leqq k + 2$ subsiste.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

44. Théorème. — *La dérivée d'ordre* k *quelconque de* J (r, x) *a pour limite, quand* r *tend vers l'unité, la dérivée généralisée de* f(x) *au point* x (n° 18), *sous la seule condition que cette dérivée généralisée existe au point* x.

Supposons, pour fixer les idées, k pair (le raisonnement étant tout pareil pour k impair). Nous avons à chercher la limite de (n° 42)

$$\frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\varepsilon \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\,D_u^k\,\frac{1}{1-2r\cos u+r^2}\,du,$$

sachant que l'on a (ω étant infiniment petit avec u ou ε)

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}=a_0+a_2\frac{u^2}{2}+\cdots+(a_k+\omega)\frac{u_k}{k!}.$$

Pour établir le théorème, il y a donc trois choses à prouver :

1° Si i est un nombre pair comme k, mais $< k$, on a

$$\lim\frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\varepsilon u^i\,D^k\,\frac{1}{1-2r\cos u+r^2}\,du=0;$$

2° Si $i=k$, on a

$$\lim\frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\varepsilon u^k D^k\,\frac{1}{1-2r\cos u+r^2}\,du=1;$$

3° L'intégrale

$$(1-r^2)\int_0^\varepsilon \omega u^i D^k \frac{1}{1-2r\cos u+r^2}\,du$$

est infiniment petite avec ω, quel que soit $r < 1$.

La démonstration du 1° est immédiate. Si i n'est pas nul, on fait i intégrations par parties consécutives en observant que les termes aux limites sont nuls pour $u = 0$ et infiniment petits pour $u = \varepsilon$ (r tendant vers 1). On obtient l'intégrale

$$\int_0^\varepsilon D^{k-i}\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2}\,du = \left[D^{k-i-1}\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2}\right]_0^\varepsilon$$

Cette dérivée d'*ordre impair* $k-i-1$ s'annule pour $u = 0$ (n° 43, 1°) et est infiniment petite à l'autre limite ε quand r tend vers 1. Donc la limite de l'intégrale est nulle.

Pour démontrer le 2°, on fait k intégrations par parties consécutives, ce qui ramène, pour les mêmes raisons, à l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2}\,du = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

qui, comme on le voit directement, a pour limite l'unité quand r tend vers 1.

Reste seulement à démontrer le 3°. A cet effet, remplaçons la dérivée d'ordre k par son développement

indiqué au numéro précédent et laissons de côté le facteur fini $1 + r$ compris dans $1 - r^2$. Il faudra prouver que

$$(1 - r)\int_0^\varepsilon \omega \frac{u^k \sin^\alpha u \cos^\beta u\, du}{(1 - 2r\cos u + r^2)^\gamma} \quad (2\gamma - \alpha \leqslant k + 2)$$

est infiniment petit avec ω.

A cette fin, observons que l'on a

$$1 - 2r\cos u + r^2 = (1 - r)^2 + 4r\sin^2\frac{u}{2}$$

et que le rapport

$$\frac{(1 - r)^2 + 4r\sin^2\frac{u}{2}}{(1 - r)^2 + u^2}$$

a une valeur moyenne entre

$$\left(\frac{1 - r}{1 - r}\right)^2 \quad \text{et} \quad r\frac{4\sin^2\frac{u}{2}}{u^2}.$$

Ce rapport est donc aussi voisin qu'on veut de 1, pourvu que u soit assez petit et r assez voisin de 1.

Il s'ensuit, sans difficulté, que les deux facteurs positifs

$$\frac{u^k \sin^\alpha u + \cos^\beta u}{(1 - 2r\cos u + r^2)^\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{u^{k+\alpha}}{[(1 - r)^2 + u^2]^\gamma}$$

ont un rapport aussi voisin qu'on veut de 1 avec r, quand u est positif et suffisamment petit (donc quand ε est suffisamment petit). Nous pouvons donc substituer le

second facteur au premier dans la démonstration et considérer l'intégrale

$$(1-r)\int_0^\varepsilon \omega \frac{u^{k+\alpha}d\alpha}{[(1-r)^2+u^2]^\gamma},$$

où

$$k+\alpha \geqslant 2\gamma-2.$$

Soit

$$k+\alpha=(2\gamma-2)+\rho \qquad (\rho \geqslant 0);$$

nous pouvons, par le théorème de la moyenne, mettre la quantité $\omega\, u^\rho$ qui est infiniment petite avec ω hors de l'intégrale, et il suffit alors de prouver que l'expression

$$(1-r)\int_0^\varepsilon \frac{u^{2\gamma-2}du}{[(1-r)^2+u^2]^\gamma}$$

est finie, quel que soit $r<1$. Ceci apparaît par le changement de variable $u=(1-r)\,t$, qui montre que cette expression est inférieure à l'intégrale finie

$$\int_0^\infty \frac{t^{2\gamma-2}dt}{(1+t^2)^\gamma}.$$

Le théorème est donc démontré. On voit de plus que x variant, *la convergence sera uniforme si* ω *tend uniformément vers* 0.

Ce théorème peut encore s'énoncer comme il suit :

45. Théorème. — *Étant donnée la série de Fourier d'une fonction* f(x) *convergente ou non, si l'on dérive*

k fois cette série, la série dérivée, sommée par le procédé de Poisson (*), *aura pour somme la dérivée d'ordre* k *de* f(x) *en tout point où cette dérivée existe et, plus généralement, la dérivée généralisée en tout point où celle-ci existe. — De plus, dans tout intervalle intérieur à un autre où la dérivée ordinaire d'ordre* k *existe et est continue, la convergence sera uniforme quand* r *tend vers* 1.

Par exemple, on peut former la série de Fourier pour l'ordonnée $f(x)$ d'une ligne polygonale. Si x est un des sommets, les dérivées généralisées d'ordre impair sont toutes nulles, sauf la première qui est égale à la dérivée moyenne. On a, en effet, pour u suffisamment petit (n° 18) :

$$f(x+u) - f(x-u) = 2a_1 u.$$

Donc, en ce point-là, toutes les dérivées d'*ordre impair* de la série de Fourier peuvent être sommées par le procédé de Poisson; la première aura pour somme a_1, toutes les autres pour sommes 0.

Comme les dérivées généralisées d'ordre impair > 1 sont aussi nulles aux autres points, elles sont donc nulles pour toutes les valeurs de x. Mais la convergence de $J(r, x)$ cessera d'être uniforme dans le voisinage des sommets.

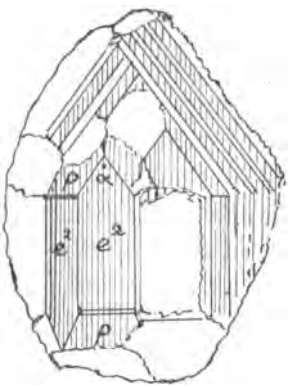
(*) On n'oubliera pas que le procédé de Poisson donne le même résultat que le procédé de sommation ordinaire, chaque fois que la série converge.

Tellure natif des mines de Balia (Asie Mineure); par G. Cesàro, membre de l'Académie, professeur à l'Université de Liége.

Dans un lot d'échantillons, provenant des mines de Balia, j'ai remarqué un minéral à éclat métallique, blanc d'étain, dendritique, ressemblant assez bien à la sylvanite; l'étude qui suit m'a montré qu'il s'agissait de tellure natif.

* * *

Détermination cristallographique. — Le minéral constitue un cristal dendritique, mais épais, formé par l'assemblage de plusieurs individus sensiblement parallèles, entrecoupés par du quartz qui s'insère sans altérer ce parallélisme (fig. 1). On voit miroiter les clivages prismatiques e^2, dont on peut mesurer l'angle de 60° dans les fragments tirés de l'assemblage. La symétrie rhomboédrique se manifeste nettement à l'observation attentive, chaque face prismatique se terminant d'un côté par une horizontale, de l'autre par l'angle α formé par les intersections de cette face avec deux faces du



rhomboèdre. J'ai mesuré cet angle directement au rapporteur; on a pu aussi obtenir une mesure approximative au microscope dans les bandelettes entrecoupées de quartz, parallèles aux côtés de l'angle dont il s'agit, bandelettes que l'on aperçoit vers le haut de la figure : les stries verticales y font avec la direction de la bandelette un angle

$$\frac{\alpha}{2} = 39^\circ.$$

En partant de la donnée de Rose (*Dana*; p. 11) :

$$pa^1 = 56^\circ 55' 30'',$$

on obtient

$$\frac{\alpha}{2} = 36^\circ 56' 38''.$$

La partie qui dans la figure ne porte pas de hachures est formée de quartz; comme en Transylvanie, on observe des dihexaèdres complets de pyrite, dont quelques-uns sont d'une extrême petitesse.

* * *

Détermination chimique. — Attaquable par l'HNO^3 en donnant d'abord un précipité blanc, qui se redissout par la suite. La solution précipite en blanc par l'H^3N. La solution nitrique, saturée au préalable, donne un précipité brun par l'A*m*HS, précipité qui se redissout dans un excès de réactif. Au chalumeau, sur le charbon, brûle avec une flamme verte, sans laisser de résidu *appréciable*. Chauffé dans un tube ouvert, le sublimé produit par la combustion se dépose très près de la substance, en gout-

telettes transparentes colorées en jaune qui, par le refroidissement, se solidifient en devenant blanches et opaques; ce sublimé devient brun foncé au contact des vapeurs de AmHS.

Ce sont tous les caractères d'un tellure chimiquement pur; je n'y ai trouvé ni S, ni Fe, ni Sb; les produits de la combustion étant complètement inodores, j'ai conclu à l'absence du sélénium. La seule impureté que le tellure de Balia pourrait contenir c'est l'or, en petite proportion, le précipité produit par les acides dans la solution du sulfure dans AmHS étant légèrement noirâtre.

* * *

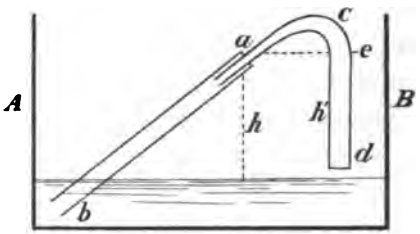
Le cristal de tellure de Balia est remarquable par ses dimensions : il mesure environ 30 millimètres sur 20, et l'on sait que les cristaux de Transylvanie sont de minuscules bâtonnets prismatiques. Certains fragments extraits de la masse dendritique sont de vrais cristaux e^2p, dans lesquels on retrouve la tendance aux formes arrondies que l'on observe dans les cristaux de Transylvanie.

—

Sur le pseudo-siphon de Joseph Plateau;
par G. Van der Mensbrugghe, membre de l'Académie.

Il y a plus de vingt-cinq ans que, à la prière de J. Plateau, j'ai fait une expérience d'autant plus intéressante qu'au premier abord elle semblait devoir fournir un exemple de mouvement perpétuel. L'ingénieux physicien a publié

à ce sujet une courte note intitulée : *Une petite illusion* (1). Voici la description de l'appareil qu'il a imaginé. Il se compose d'un tube capillaire *ba* ayant $1^{mm}5$ de diamètre intérieur et d'un second tube *cd* ayant environ 3 millimètres de diamètre (voir la figure) ; une portion de ce dernier est



étirée, puis recourbée de manière à présenter un effilement assez étroit pour pouvoir s'engager un peu dans l'ouverture supérieure du tube *ba* ; celui-ci est incliné de telle sorte que la partie la plus large du tube *cd* descende verticalement. Le système est fixé au-dessus d'une large capsule AB contenant de l'eau à quelques centimètres de hauteur ; l'extrémité *b* du tube incliné *ba* plonge dans le liquide, tandis que celle du tube *cd* se trouve à quelques millimètres au-dessus du niveau.

Cela étant, supposons que tout l'appareil soit rempli d'eau et fixé convenablement ; comme l'intervalle compris entre les deux tubes est très petit, le liquide sera maintenu par le ménisque capillaire, par exemple, à 4 centimètres au-dessus du niveau de la capsule. Les

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e sér., t. III, p. 24.

choses étant disposées de cette manière, Plateau s'est demandé si la portion *acd* de l'appareil ne ferait pas l'office de siphon, puisque l'équilibre peut exister en *a* et que l'extrémité du tube le plus large se trouve notablement plus bas. Dans l'affirmative, l'appareil aurait réalisé le mouvement perpétuel, déclaré théoriquement impossible. Et comment l'expérience a-t-elle répondu à la question? Quand l'extrémité du tube *cd* se trouvait très près du niveau, il n'y a pas eu de mouvement du tout; lorsqu'elle était à 4 millimètres au-dessus, l'eau est remontée dans le tube et ne s'est arrêtée qu'au moment où elle s'est engagée dans la partie étroite. Voilà comment s'est évanouie la petite illusion.

Restait à expliquer le phénomène en apparence si contraire à la marche du liquide dans un siphon ordinaire. Plateau a parfaitement montré que l'équilibre du liquide en *a* n'est pas aussi stable qu'on pourrait le croire; car le petit ménisque concave qui s'y forme doit exercer une succion de l'eau de bas en haut; d'autre part, le poids de la colonne liquide *de*, située au-dessous du plan horizontal passant par le sommet du ménisque en *a*, constitue une force dirigée vers le bas; il faut même y joindre la faible succion due au ménisque concave formé vers le bas du tube *cd*. D'après cela, on comprend que la succion en *a* peut être plus forte que la tendance au mouvement de haut en bas du liquide dans le tube *cd*; dès lors, l'eau doit s'élever dans ce tube avec une vitesse croissante à mesure que la colonne suspendue devient plus courte.

Si je reviens aujourd'hui sur ces quelques pages inspirées par l'infatigable chercheur qu'a été Joseph Plateau,

c'est qu'elles me fournissent l'occasion de soumettre à une épreuve intéressante la théorie de l'élasticité des liquides, dont j'ai déjà décrit de nombreuses applications. A la vérité, les faits que j'ai rappelés plus haut s'expliquent bien simplement quand on examine si, dans une même section horizontale, le liquide est doué partout du même degré d'élasticité, sous l'action des différentes forces agissantes.

Pour plus de clarté, supposons que l'extrémité du tube *cd* touche le niveau de l'eau de la capsule. En *a*, la pression est évidemment égale à la pression atmosphérique P, diminuée du poids d'une colonne liquide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la distance *h* du point *a* au-dessus du niveau; ce poids représente l'effet du ménisque concave en *a*, effet dirigé de bas en haut; la pression cherchée est donc $P - h\delta$, δ étant la densité du liquide.

Concevons maintenant par le sommet du ménisque un plan horizontal qui coupe le tube *cd* en *e*; la pression sur l'unité de surface en *e* sera aussi égale à $P - h\delta$; dans ces conditions, l'élasticité du liquide est la même en *a* qu'en *e*, et, par conséquent, l'équilibre a lieu.

Actuellement admettons que l'extrémité inférieure du tube *cd*, toujours rempli, soit à 3 ou 4 millimètres au-dessus du niveau. Nous désignerons encore par *h* la distance de *a* au niveau; si h' est la hauteur *de* de la colonne suspendue, la pression en *e* sera égale à $P - h'\delta$, et comme $h' < h$, elle sera plus forte qu'en *a*; il s'ensuit que la force élastique en *e* sera aussi plus grande qu'en *a*; voilà pourquoi le liquide doit monter dans le tube *cd*; mais aussitôt se formera vers le bas un ménisque concave dont l'effet dirigé de haut en bas ralentit d'abord un peu le mouve-

ment ascensionnel. Comme h' diminue de plus en plus, l'ascension doit persister jusqu'à ce que le liquide est engagé dans la portion recourbée; il est bien entendu que cela suppose toujours $h > h' + h''$, h'' désignant l'effet du ménisque inférieur. Pour que cette condition soit toujours remplie, il faut évidemment que le tube *cd* n'ait pas un diamètre trop petit, sans quoi h'' deviendrait trop grand pour ne pas empêcher le mouvement ascensionnel.

Le mode d'explication qui précède conduit immédiatement à deux conséquences qui me paraissent intéressantes.

En premier lieu, par l'introduction de la pression atmosphérique P, on fait voir que toutes les portions du liquide contenu dans le petit appareil de Joseph Plateau sont soumises à une certaine élasticité de compression. Au contraire, si le liquide était soustrait à l'action de la pression de l'atmosphère, les phénomènes se passeraient encore de la même manière, seulement l'eau serait alors sollicitée par une certaine élasticité de traction. On se rappelle que j'ai déjà signalé plus d'une fois des faits du même genre.

En second lieu, la curieuse expérience décrite plus haut nous donne une preuve entre mille autres, que le moindre effort exercé sur une partie d'une masse liquide transmet son effet de proche en proche, ce qui serait impossible si les distances intermoléculaires demeuraient absolument invariables. La compressibilité si faible des liquides se trouve donc compensée par la parfaite élasticité qui les caractérise.

—

Note complémentaire sur l'origine des nuances vertes des eaux de la nature; par W. Spring, membre de l'Académie.

J'ai montré, il y a quelques années (1), que la dissolution de sels de calcium dans l'eau, en particulier celle du *sulfate* ou du *carbonate acide*, ne change en rien la couleur bleue, propre du liquide. L'origine des nuances vertes des eaux de la nature ne doit donc pas être cherchée dans la présence des composés calciques, comme le fait d'Aufsess, dans son travail sur la coloration des lacs (2). D'après mes expériences, les sels calciques blancs ne font virer au *vert* la couleur bleue de l'eau que s'ils forment une solution qui n'est pas *optiquement vide*. Alors il y a diffraction de la lumière sur les fines particules suspendues dans le liquide et il se produit des tons jaunes ou bruns, plus ou moins foncés, suivant l'épaisseur du trouble, qui, par leur combinaison avec le bleu, engendrent diverses nuances de vert pour l'œil de l'observateur. Ce phénomène est évidemment indépendant de la couleur propre des sels dissous, ainsi que de leur espèce chimique.

J'ai fait voir, en outre, que la présence des sels calciques dans l'eau, loin de modifier le *bleu* de l'eau, le pro-

---

(1) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des sciences), pp. 300, 309; 1905.

(2) *Archives des sciences phys. et nat.*, t. XVII, p. 198; 1904.

tège, au contraire, contre les altérations provoquées par les substances colorées naturelles qui se rencontrent le plus fréquemment. Elle détermine, en effet, l'élimination continue des *combinaisons ferriques* et des *matières humiques* à la présence desquelles sont dues nécessairement les couleurs foncées, jaunes ou brunes, des eaux naturelles.

En résumé, à mon avis, les nuances qui diffèrent du bleu auraient une double cause. D'une part, elles seraient la conséquence de la présence de matières colorées par elles-mêmes, et, d'autre part, elles seraient dues à la présence, dans l'eau, d'un trouble d'une finesse telle que la diffraction lumineuse puisse se produire. On sait que celle-ci n'a lieu que si les dimensions des particules du trouble sont de l'ordre de grandeur des ondes lumineuses. Il est bien entendu que la puissance relative de ces deux causes sera en rapport avec les circonstances locales : si elles manquent toutes deux, ou si au moins elles se trouvent fortement atténuées, la couleur bleue de l'eau apparaîtra avec plus ou moins de pureté.

Bien que cette théorie, si simple, se trouve basée sur des observations et des expériences nombreuses, elle n'a pas eu la bonne fortune de rallier tous les savants. Ainsi, par exemple, le Dr F.-E. Bourcart, dans son beau travail sur les lacs alpins suisses (1), reconnaît comme seule cause des *nuances vertes* la présence dans l'eau de substances colorées, jaunes ou brunes, principalement des *matières humiques*. Il attribue à une « erreur d'expérience » la conclusion que j'ai tirée de mes recherches

(1) Genève, chez Georg et Cie; 1906.

au regard du rôle joué par le trouble de l'eau. Il objecte que le trouble des liquides que j'ai manipulés n'a pas rendu l'eau *verte* à la suite d'un phénomène de diffraction, mais simplement parce qu'il était formé de *matières organiques* qu'il assimile, gratuitement, je dois le dire, à des *matières humiques* quant à leur couleur. Son objection se base sur ce que j'aurais observé que le résidu blanc de l'évaporation de l'eau renfermait des matières organiques, puisque, pendant la calcination à laquelle je l'ai soumis, il a perdu, pendant un instant, de sa blancheur. « C'est, sans doute, à ces dernières (aux matières organiques), dit M. Bourcart, qu'il faut attribuer la teinte verte des liqueurs mentionnées, d'autant plus que l'auteur reconnaît lui-même l'extrême puissance colorante des matières humiques. »

Mon intention première avait été de montrer la méprise de M. Bourcart dès le moment où j'ai pris connaissance de son travail et d'empêcher, de la sorte, qu'une erreur ne s'accréditât. Mais j'ai cru cependant préférable d'examiner plus complètement la question et de contrôler, par des expériences nouvelles, la valeur de la proposition qui a suggéré, en somme, l'objection prérappelée.

On s'en souvient, lorsque Soret et Hagenbach eurent fait voir que la lumière des lacs est polarisée, on a attribué tous les phénomènes de coloration des eaux à la diffraction. La raison du bleu de l'eau était ramenée à celle qui était admise alors pour le bleu du ciel. Les recherches que j'ai faites m'ont montré alors que l'on avait été trop loin et que la couleur bleue de l'eau n'avait pas la diffraction pour origine; celle-ci pouvait, tout au plus, donner des teintes jaunes ou brunes à la lumière

transmise, teintes qui devaient coopérer avec celles des matières brunes naturelles, à l'altération du bleu, voire à sa suppression.

Plus récemment, M. d'Aufsess a étudié spectrophotométriquement la couleur des lacs, et il est arrivé à conclure « qu'on ne peut assimiler en aucun cas la couleur de l'eau à la couleur d'un milieu trouble (1) ». La *diffraction* est donc complètement remerciée et nous nous trouvons à l'opposite de l'explication première. J'ai tenu à m'assurer si, cette fois encore, on n'a pas trop versé dans l'absolu et si la vérité ne se trouve pas entre les opinions extrêmes. La réalisation des expériences projetées à ce propos a tardé plus que je ne l'eusse voulu, pour des raisons étrangères à notre sujet, et force me fut de remettre jusqu'en ce moment les observations que je désire présenter à Bourcart, en même temps que la relation des faits qui établissent que vraiment on ne peut dénier toute influence à la diffraction dans le phénomène de la coloration des eaux.

M. Bourcart s'est mépris quand il a pensé que les matières organiques, dont j'ai signalé la présence lors de la calcination des sels calciques retirés de l'eau à la suite de l'évaporation, se trouvaient dans le liquide *au moment de l'observation de la couleur des solutions*. J'avais formé les sels de calcium, au sein d'eau optiquement vide, à l'aide de chaux résultant de la calcination, dans le moment même, de spath d'Islande. Il ne pouvait donc être question alors de matières organiques; mais celles-ci se sont introduites dans l'eau, après la constatation de la

(1) *Loc. cit.*, p. 196.

couleur, pendant les manipulations qui ont précédé et accompagné l'évaporation entreprise pour mettre à nu et pour reconnaître la nature du trouble de l'eau. On sait depuis longtemps qu'il n'est pas possible de transvaser de l'eau dans un air renfermant des matières organiques sans que celles-ci ne se trouvent en partie entraînées. Tyndall nous a déjà instruits à ce sujet. Les vestiges de matières organiques, dont j'avais constaté la présence *après l'évaporation*, qui a duré près d'une journée entière, sont un accident postérieur au moment de l'observation et, par conséquent, sans influence sur celle-ci. Au surplus, il a été établi par mes expériences que le trouble ultramicroscopique de l'eau ne pouvait être formé que de silice.

Il y a plus. L'objection de M. Bourcart postule que la présence des matières organiques dans l'eau entraînerait toujours l'apparition d'une couleur brunâtre. Ceci est inexact. Une solution de sucre *blanc*, *même concentrée*, est d'un bleu plus accusé que l'eau pure (1); il en est de même pour la plupart des corps organiques blancs. Seules, des substances de la nature des matières humiques sont en état d'altérer la couleur bleue de l'eau lorsqu'elles-mêmes se trouvent présentes en quantités infiniment petites. Il est bien évident qu'il ne s'agit de rien de semblable dans les matières organiques qu'un liquide peut enlever à l'air atmosphérique.

Je crois donc ne pas devoir m'arrêter plus longtemps devant l'objection de M. Bourcart, et je passe à l'examen de la conclusion de M. d'Aufsess, rappelée ci-dessus.

---

(1) Voir mes *Recherches sur la couleur de quelques corps organiques*. (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 3e sér., t. XXXII, p. 43, 1896, et t. XXXIII, p. 165, 1897.)

Cette conclusion est tirée, en somme, de ce qu'il n'a pas été possible de constater *un rapport simple entre le degré de trouble d'une eau et sa couleur :* telle eau est bleue, bien que moins limpide qu'une autre qui est verte; en outre, les observations spectro-photométriques montrent que la courbe exprimant l'absorption de la lumière par les liquides troubles, pour chaque région du spectre, n'est superposable à celle d'aucune eau naturelle.

Avant d'accepter la conclusion de M. d'Aufsess, il importe donc de s'assurer si les phénomènes de coloration engendrés par la diffraction sont en rapport simple avec l'état de trouble qu'on peut produire dans une eau. Si ce n'était pas le cas, on devrait nécessairement envisager la *transparence* d'une eau comme un facteur indépendant, dans une certaine mesure, de la couleur, c'est-à-dire ne pas s'attendre à rencontrer toujours la couleur bleue dans les eaux les plus limpides et les nuances vertes dans les eaux troubles.

A cet effet, j'ai repris l'examen de la couleur de l'eau chargée d'un trouble ultramicroscopique et j'ai cherché les conditions dans lesquelles la lumière transmise donne le mieux les nuances verdâtres avec le bleu de l'eau.

Comme dans mes observations antérieures, j'ai opéré à l'aide de tubes de 6 mètres de long, placés parallèlement, afin de faciliter les comparaisons.

L'un des tubes était rempli, à demeure, d'eau pure optiquement vide; sa couleur était bleue et devait servir de *témoin*.

Pour m'assurer si les tons jaunes ou bruns, dus à la diffraction, sont en relation avec la transparence de l'eau, j'ai rempli un autre tube d'eau additionnée de quelques

milligrammes de *silice ultrafine*. Celle-ci avait été obtenue par la calcination de l'acide silicique précipité. Elle a été débarrassée de ses particules les plus grosses par *lévigation*. Je n'ai recueilli que les particules auxquelles il fallait près d'une demi-journée pour tomber, dans l'eau, d'une hauteur de 2 centimètres.

Le trouble du liquide n'était pas visible dans les conditions ordinaires; il a été néanmoins suffisant pour empêcher complètement le passage de la lumière par le tube de 6 mètres; celui-ci paraissait donc contenir un liquide noir. Avec le temps, la silice suspendue dans l'eau se déposa peu à peu et la lumière put traverser le tube, mais les premières lueurs visibles n'ont été ni brunes, ni jaunes, ni même glauques; elles ont été, dès l'abord, de la couleur bleue de l'eau, avec cette seule différence que l'intensité de la lumière était fortement diminuée.

Cette expérience montre que les tons brunâtres dus à la diffraction ne se produisent pas à l'aide de chaque trouble, alors même que celui-ci est de grande finesse; elle montre aussi que la couleur bleue peut s'observer dans une eau troublée au point de compromettre la transparence.

En vue de m'assurer si l'espèce de trouble joue un rôle dans ce phénomène, j'ai répété cette expérience en remplaçant la silice par le trouble produit en mêlant une solution alcoolique de mastic avec de l'eau. Le titre de ce trouble était d'environ 3 centigrammes de mastic par litre d'eau. A ce degré, l'eau a paru *opaque* dans le tube de 6 mètres.

Le repos, même prolongé, n'amenant aucun changement, j'ai dilué le liquide de plus en plus, à l'aide d'eau pure, et j'ai examiné successivement chaque dilution.

Les premières lueurs qui ont pu passer par le tube ont paru d'un brun extrêmement sombre; puis elles ont passé par des tons de plus en plus clairs, mais dans aucun cas, pas même à l'origine, il n'a apparu une nuance verte exempte de bleu. On a pu constater du *bleu verdâtre* ou du *vert bleuâtre*, mais jamais la nuance verte, pure, bien connue, de certains lacs.

J'ai varié les conditions de ces observations en ne mêlant plus le trouble de mastic avec l'eau pure, mais en superposant au tube contenant l'eau pure des couches de trouble de mastic d'épaisseurs de plus en plus faibles, correspondant aux titres précédents.

Les résultats ont été les mêmes.

Il semble résulter de ces dernières observations que le trouble de mastic n'est pas tout à fait dans les conditions optiques du trouble de silice. Si, comme celui-ci, le trouble de mastic assombrit surtout l'eau, il permet cependant à la diffraction de se faire et d'engendrer des tons en état de donner du *vert* avec le bleu de l'eau.

Il est possible qu'un trouble de mastic renferme des particules de deux ordres de grandeur, tandis que la silice que j'ai employée n'en renfermait que d'un ordre, ensuite de la lévigation à laquelle elle avait été soumise.

Pour vérifier l'influence de la grandeur des particules sur la diffraction, j'ai préparé des solutions *colloïdales* d'alumine et de silice, parfaitement privées de toutes particules visibles dans les conditions ordinaires, c'est-à-dire paraissant tout à fait transparentes.

Ces solutions représentaient, certainement, des milieux troubles, dont les particules étaient d'une ténuité extrême, mais cependant réelle, car on sait que ces solutions col-

loïdales sont loin d'être optiquement vides. Si on les éclaire au moyen d'un rayon de lumière intense, elles s'illuminent sur le passage de ce rayon en laissant voir une trainée estompée. L'homogénéité de celle-ci est une grande présomption en faveur de la *similitude* ou peut-être de l'*égalité* des particules en suspension. On peut donc s'attendre à des résultats plus simples.

La solution colloïdale d'alumine a été préparée en dissolvant de l'hydrate absolument exempt de composés ferriques dans du chlorure d'aluminium (1) et en soumettant ensuite la solution à la dialyse, comme Graham l'a fait connaître, jusqu'à disparition presque complète de la réaction du chlore. L'acide silicique a été préparé de même, en soumettant à la dialyse une solution de silicate de sodium additionnée d'acide chlorhydrique. Cette préparation a duré près de deux mois.

Les solutions ont été finalement filtrées. Elles étaient absolument limpides à l'observation immédiate. La solution d'alumine titrait $1^{gr}57$ par litre et la solution d'acide silicique $0^{gr}72$.

Vidées dans les tubes de 6 mètres, ces solutions ont fait voir, l'une et l'autre, une couleur brun foncé, un peu rougeâtre. Le spectre de cette lumière était réduit à une lueur dans la région rouge : il y avait donc assombrissement général avec absorption complète des ondes courtes.

---

(1) Pour me procurer le chlorure d'aluminium exempt de fer et ensuite l'hydrate d'aluminium, j'ai traité une solution concentrée de chlorure, déjà pure, par un courant d'acide chlorhydrique gazeux. Le chlorure d'aluminium se précipite, tandis que le chlorure de fer est soluble dans l'acide chlorhydrique.

J'ai alors dilué de plus en plus les deux liquides à l'aide d'eau optiquement vide. A mesure des progrès de la dilution ont apparu, cette fois, avec netteté, les nuances *jaunâtres, jaunes vertes, vertes, vert bleuâtre* et, finalement, les *nuances bleues* quand la dilution fut suffisamment forte.

Les spectres correspondant à ces diverses nuances étaient de plus en plus lumineux et de plus en plus étendus vers la région des ondes courtes. Pour ces deux liquides, la transparence s'est donc montrée en relation simple avec les teintes vertes et bleues.

Conclusions.

Les observations précédentes font voir que les nuances vertes peuvent se produire, dans l'eau, à la suite de la diffraction de la lumière sur les particules en suspension dans le liquide, et cela en dehors de la présence de toute matière colorante, minérale ou organique.

Il est aussi exagéré d'attribuer l'origine des nuances vertes des eaux, exclusivement, à la présence de *matières humiques* ou de *composés ferriques* que de la chercher dans la seule présence de *sels calciques*.

Il est établi, en outre, qu'il n'y a pas nécessairement de rapport simple entre la coloration due à la diffraction et le plus ou moins de transparence de l'eau.

Suivant la nature physique du trouble, l'opacité d'un liquide s'efface graduellement sans que les couleurs dues à la diffraction apparaissent, ou bien la transparence parcourt, pour se rétablir, l'échelle des tons à grande longueur d'ondes.

Entre ces cas extrêmes qui ont été réalisés dans les

expériences précédentes, on conçoit tous les intermédiaires possibles. Il n'est donc pas juste d'invoquer le défaut relatif de transparence de certaines eaux bleues naturelles contre la théorie physique des nuances vertes; il serait plus exact de dire que l'on observe, dans les eaux naturelles, précisément ce que les expériences de laboratoire nous ont montré et qu'il y a donc parallélisme complet entre l'enseignement des unes et des autres.

—

A propos de la préparation de l'alcool bifluoré; par Fréd. Swarts, correspondant de l'Académie.

La préparation de l'alcool bifluoré, par saponification du bromure de difluoréthyle à l'aide de l'oxyde de mercure en présence de l'eau (*), donne toujours un rendement inférieur au rendement théorique, même lorsqu'on évite de chauffer à des températures supérieures à 160°, auxquelles l'angle fluoré de la molécule est attaqué d'une manière sensible.

J'ai cherché à réduire les diminutions de rendement dues au mode opératoire; j'ai reconnu notamment que la solution saturée de carbonate de potassium, que l'on obtient en séparant l'eau de l'alcool bifluoré, retenait une petite quantité de ce dernier et qu'on pouvait en extraire encore quelques grammes de produit par distillation sous pression réduite.

En mettant en œuvre de grandes quantités de matière, je suis parvenu à restreindre les pertes d'origine physique;

(*) Voir *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 1902, p. 731.

je ne crois pas m'écarter beaucoup de la vérité en fixant à 10 grammes la perte totale éprouvée de ce chef dans une préparation effectuée sur 7,2 mol. gr. (1,044 gr.) de bromure de difluoréthyle et dont voici le rendement :

Portions distillant de 85 à 90°	5	grammes.
— 90 à 95°	86	—
— 95 à 96°	431	—
Les résidus de distillation fournissent encore.	14	—
La distillation dans le vide de la solution de K_2CO_3	4	—
Pertes	± 10	—
TOTAL. . .	550	—

Soit 6,707 mol. gr. Le rendement est donc de 93.2 %.

Une autre opération effectuée sur 1,400 gr. de bromure de difluoréthyle m'a donné 93.1 % de rendement.

Le déficit est d'environ 7 % et ne peut s'expliquer que par des réactions secondaires; la recherche de celles-ci m'a conduit à quelques résultats intéressants que j'ai cru intéressant d'exposer.

Lorsqu'on a extrait par distillation l'alcool bifluoré aqueux du produit brut, il reste un résidu formé d'une masse cristalline abondante que baigne un liquide très fortement acide. Après avoir séparé par essorage, suivi d'un lavage soigné, les cristaux de leurs eaux mères, j'ai établi le titre acidimétrique de ces dernières.

Le liquide résiduel provenant de l'attaque de 9,6 mol. gr. de bromure de difluoréthyle neutralisait 1,147 mol. gr. de potasse.

La solution neutralisée fut déversée dans un excès de soude pure, afin de transformer les sels mercuriques en sels sodiques. Il se fit un précipité d'oxyde mercurique pesant 154 grammes, soit 0,72 mol. gr.

La solution alcaline fut réduite par évaporation dans le vide, neutralisée ensuite exactement par l'acide acétique, puis ramenée à 1 litre. J'y ai dosé le brome : elle renfermait 149gr68 de brome, soit 1,86 atome gr.

Pour séparer les sels d'acides organiques qu'elle pouvait renfermer, j'ai prélevé 400 centimètres cubes ($^4/_{10}$) de la dissolution, que j'ai évaporés à sec dans le vide. J'ai repris le résidu d'évaporation par l'alcool à 93°, qui ne laissa qu'un léger résidu.

La solution alcoolique fut soumise à plusieurs cristallisations fractionnées, pour en séparer la majeure partie du bromure de sodium. Les eaux mères, soigneusement recueillies, ont été reprises par l'eau et précipitées par le nitrate de plomb. J'ai filtré le bromure de plomb et évaporé la solution à sec.

Le résidu d'évaporation fut épuisé par l'alcool bouillant afin de séparer les nitrates de sodium et de plomb. Après filtration et lavage du précipité, j'ai évaporé la solution alcoolique, repris le résidu par l'eau, précipité par l'hydrogène sulfuré une trace de plomb, neutralisé par la soude pure, évaporé à sec dans le vide, repris enfin par l'alcool bouillant et évaporé la solution alcoolique dans une capsule tarée. J'ai recueilli ainsi 35gr25 d'un sel de sodium exempt de bromure, très soluble dans l'eau et hygroscopique, fort soluble dans l'alcool bouillant, peu dans l'alcool froid, insoluble dans l'éther. Tous ces caractères ainsi qu'un dosage de sodium permettent d'identifier ce sel avec le difluoracétate de sodium.

Un dosage de sodium m'a, en effet, donné le résultat suivant :

0gr4486 de sel donnent 0gr2720 Na_2SO_4.
soit 0gr08823 Na ou 19.69 °/o.
Calculé pour $Na(C_2HFl_2O_2)$: 19.49 °/o.

En calculant la quantité de difluoracétate de sodium obtenu dans l'ensemble du produit de la réaction, on trouve que pour 9,6 mol. gr. de bromure de difluoréthyle, il s'est formé 0,75 mol. gr. d'acide difluoracétique ; 8 °/o de l'alcool bifluoré ont donc été oxydés.

Ce résultat concorde d'une manière satisfaisante avec les données du dosage acidimétrique et des dosages de brome et d'oxyde mercurique. En effet, le liquide séparé du bromure de mercure renfermait 1,86 atome gr. de brome et avait fourni 0.72 × 2 = 1.44 équivalents-grammes d'oxyde mercurique; 1.86 — 1.44 = 0,42 atome gr. de brome s'y trouvaient donc à l'état d'acide bromhydrique. En retranchant cette quantité du titre acidimétrique total 1,149, on trouve 0,729 pour titre maximum en acide difluoracétique.

Il est par conséquent démontré quantitativement, dans les limites de précision que je pouvais attendre d'une recherche de l'espèce, que le déficit en alcool bifluoré doit être attribué à une transformation en acide difluoracétique : tout l'alcool manquant se retrouve sous forme d'acide.

Cette transformation implique une réduction du bromure mercurique ; il ne se fait pas de mercure, mais on constate en épuisant le sel de mercure par l'alcool chaud, qu'il laisse un résidu jaunâtre abondant, insoluble égale-

ment dans l'eau et les acides, et qui est constitué de bromure mercureux.

Un échantillon de ce corps, soigneusement lavé à l'alcool, renfermait 28.03 °/₀ de brome; calculé pour Hg_2Br_2 : 28.55 °/₀.

J'ai voulu m'assurer de l'importance de l'attaque de l'angle fluoré de la molécule de bromure de difluoréthyle. A cet effet, j'ai dosé d'abord le fluor dans le sel de mercure insoluble dans l'alcool, c'est-à-dire dans le bromure mercureux brut. Ce dernier fut transformé en sel de sodium par la méthode de Piria; le sel de sodium, dissous dans $C_2H_4O_2$, fut précipité par $CaCl_2$.

J'ai trouvé 0.0048 °/₀ de fluor dans le sel de mercure, ce qui, pour la totalité du sel, ne représente pas 1 gramme de fluorure mercurique, soit $0^{gr}004$ moléculaire.

J'ajouterai que l'exactitude de ce dosage ne saurait être rigoureuse, quoique j'aie opéré sur 20 grammes de substance, étant donnée la difficulté de doser le fluor à côté des autres halogènes lorsqu'il est en quantité aussi minime. Mais il n'en ressort pas moins de cette détermination que la teneur en fluor des sels de mercure solides est infime.

J'ai ensuite recherché qualitativement l'ion de fluor dans les sels de sodium provenant du traitement des eaux mères; le résultat fut positif.

La présence de fluorures rendait probable celle de l'acide oxalique, et j'ai pu effectivement retrouver des traces d'oxalates.

Pour doser les fluorures et les oxalates, j'ai précipité les $^3/_{10}$ de la solution de sels sodiques par $CaCl_2$ en solution fortement acétique. Le précipité desséché à

100° pesait 0gr7190. Il se décomposa à chaud sans carbonisation; son poids après calcination était de 0gr3359. Le poids d'oxalate de calcium renfermé dans le précipité primitif se déduit de la proportion

$$\frac{146}{90} = \frac{x}{0,719 - 0,3359}, \quad \text{d'où } x = 0^{gr}6214.$$

Le précipité contient donc 0gr0976 $CaFl_2$, ou 0gr0476 de fluor.

La dissolution des sels sodiques ne contient par conséquent que 0gr158 de fluor à l'état ionisable, soit 0,005 mol. gr.

Tous ces résultats démontrent que les réactions secondaires portant sur l'angle fluoré sont absolument négligeables; un centième de molécule-gramme seulement sur 9,6 mol. gr. a subi l'attaque dans le chaînon $-CHFl_2$. On verra plus loin qu'il n'en est pas toujours ainsi.

La facilité avec laquelle les composés mercuriques se laissent réduire et peuvent par conséquent jouer le rôle d'agents oxydants explique la formation d'acide difluoracétique. J'ai cherché à éviter cette réaction secondaire en substituant à l'oxyde de mercure l'oxyde de plomb, qui, comme je l'ai reconnu antérieurement (*), saponifie rapidement le bromure de difluoréthyle.

J'ai préparé l'oxyde de plomb pur en précipitant à chaud de l'acétate de plomb par la soude pure. Le

---

(*) Voir *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 1903, p. 441.

produit a été lavé et séché à l'abri de l'anhydride carbonique.

J'ai chauffé en présence d'eau pendant huit jours à 160° 2,65 mol. gr. de bromure de difluoréthyle avec la quantité équivalente d'oxyde de plomb.

La transformation de l'éther ne fut pas absolument complète; en tenant compte du difluorbrométhane inaltéré, le rendement effectif en alcool bifluoré fut de 92.04 %, soit encore une fois inférieur de 8 % au rendement théorique.

La solution aqueuse, au lieu d'être acide, avait une réaction alcaline, mais le phénomène le plus frappant était la coloration grise du composé plombique insoluble formé, ce qui faisait présumer une réduction de l'oxyde de plomb à l'état métallique.

Il s'était fait encore une fois une réaction secondaire.

Pour l'élucider, j'ai chauffé de l'alcool bifluoré avec de l'oxyde de plomb. $^1/_{10}$ de molécule-gramme d'alcool bifluoré a été dissous dans 60 centimètres cubes d'eau, additionné de $^1/_{10}$ de molécule-gramme d'oxyde de plomb et chauffé pendant quinze jours à 160°. Dès le deuxième jour, l'oxyde de plomb devint gris et après quinze jours le produit solide déposé présentait un ton gris-noir très prononcé.

A l'ouverture des tubes, j'ai constaté l'existence d'une légère pression. Le gaz qui s'échappait ne renfermait pas d'oxyde de carbone, mais à côté d'une petite proportion d'anhydride carbonique (1.5 % en volume), il s'y trouvait une notable quantité d'hydrogène (environ 70 %).

Le liquide, séparé des composés de plomb insolubles, fut distillé dans le vide. J'obtins un léger résidu amorphe, partiellement soluble dans l'eau chaude. La

dissolution aqueuse précipitait complètement par l'alcool. Il ne s'était donc pas formé d'acide difluoracétique dont le sel de plomb est extrêmement soluble dans l'eau et l'alcool.

Les composés de plomb insolubles qui s'étaient produits dans la réaction de l'oxyde de plomb sur l'alcool bifluoré, ont été épuisés à l'abri de l'air par de l'acide acétique à 50 °/₀. Ce traitement laissa un résidu gris abondant.

La solution acétique a été neutralisée partiellement par la soude caustique, de manière à lui conserver une réaction faiblement acide. Il se fit un précipité assez abondant. La solution acétique fut évaporée partiellement et traitée par un grand excès de nitrate de cuivre en solution concentrée. Après deux jours de repos, il s'était séparé dans le liquide $10^{gr}84$ de beaux prismes d'un vert foncé, fort peu solubles dans l'eau froide, plus solubles dans l'eau chaude.

Ces cristaux ont été purifiés par cristallisation. En y dosant électrolytiquement le cuivre, je me suis assuré qu'ils étaient formés de glycolate de cuivre.

$0^{gr}5881$ de sel ont donné $0^{gr}1762$ de cuivre, soit 30 °/₀.
Calculé pour $Cu(C_2H_3O_3)_2$: 29.75 °/₀.

L'oxyde de plomb provoque donc une hydrolyse de l'alcool bifluoré; il se fait d'abord de l'aldéhyde glycolique, qui réduit ensuite l'oxyde de plomb, avec formation d'acide glycolique. Son action diffère ainsi essentiellement de celle de l'oxyde de mercure, qui n'agit guère comme hydrolysant. L'origine de cette différence doit sans doute être recherchée dans la manière différente dont les fluorures de mercure et de plomb se comportent vis-à-vis de l'eau.

Le fluorure mercurique est très profondément hydrolysé en solution aqueuse; l'acide fluorhydrique garde ainsi une concentration suffisante pour réduire à une valeur négligeable l'importance de la réaction réversible:

$$HOCH_2 - CHFl_2 + 2H_2O = HOCH_2 - CH(OH)_2 + \overbrace{2H. + 2Fl'}^{2HFl}.$$

Le fluorure de plomb, au contraire, est très résistant à l'hydrolyse; de plus, son insolubilité pratiquement complète fait disparaître les ions Fl', ce qui permet à la réaction directe de se poursuivre.

Mais l'acide glycolique n'est pas le seul produit qui se forme dans l'action de l'alcool bifluoré sur l'oxyde de plomb. Il subit lui-même une oxydation de la part de ce dernier et se transforme en acide oxalique.

Le sel de plomb, mélangé de plomb métallique, insoluble dans l'acide acétique, ne renferme, en effet, pas que du fluorure de plomb. Il était impossible de séparer les différents sels par voie de cristallisation fractionnée, tous ces corps étant insolubles.

Aussi ai-je épuisé la masse par 400 grammes de soude caustique pure dissous dans 1300 centimètres cubes d'eau. Après avoir chauffé quarante-huit heures au bain-marie, j'ai précipité la dissolution par un courant d'anhydride carbonique. J'ai séparé le volumineux précipité de carbonate de plomb, j'ai maintenu ensuite le courant d'anhydride carbonique jusqu'à précipitation abondante de carbonate acide de sodium.

Le liquide filtré fut acidifié par l'acide acétique, traité par l'hydrogène sulfuré pour éliminer les dernières traces de plomb, puis réduit par évaporation.

Je l'ai précipité ensuite par le nitrate d'argent; j'ai

obtenu un précipité blanc cristallin, possédant tous les caractères de l'oxalate d'argent. De plus, un échantillon lavé à l'eau, puis à l'alcool, séché à 100° dans le vide, m'a donné le résultat analytique suivant :

1gr1097 de substance ont fourni 1gr3702 AgBr,
soit 0gr7870 Ag ou 70.92 °/o.
Calculé pour $Ag_2C_2O_4$: 71.04 °/o.

Il m'a été impossible de déterminer la quantité d'oxalate de plomb formée dans la réaction de l'oxyde de plomb sur l'alcool bifluoré. La masse considérable de carbonate de plomb que j'ai précipitée aux dépens de la solution alcaline des composés de plomb n'a pu être lavée d'une manière satisfaisante.

Je n'ai pu réussir davantage dans les essais que j'ai faits pour isoler le plomb réduit. Le résidu de l'attaque par la soude n'était pas formé exclusivement de plomb; il contenait encore des cristaux de fluorure de plomb ayant résisté à l'action de la soude, et les tentatives que j'ai faites pour séparer quantitativement le plomb sont restées vaines. J'ai essayé notamment de le dissoudre dans le mercure, mais ce dernier se divise dans le magma cristallin et sa récolte intégrale devient impraticable.

Il y a d'ailleurs lieu de faire observer que toutes les manipulations auxquelles j'ai dû soumettre le produit ne peuvent être exécutées complètement à l'abri de l'air et que le plomb réduit très divisé que j'avais entre les mains s'oxydait fort rapidement.

J'ai attribué la formation de l'acide oxalique à l'oxydation de l'acide glycolique par l'oxyde de plomb. On pourrait peut-être objecter que la production d'acide oxalique

a une autre cause, que l'oxyde de plomb forme d'abord de l'acide difluoracétique, lequel s'hydrolyse ensuite pour donner de l'acide glyoxylique, puis de l'acide oxalique par oxydation. Cette interprétation m'a paru peu plausible, puisque je n'ai pas retrouvé de difluoracétate de plomb : le résidu d'évaporation de la solution aqueuse primitive était du glycolate de plomb. Mais pour démontrer que l'acide oxalique peut se former par l'action de l'oxyde de plomb sur l'acide glycolique, il restait à en fournir la preuve directe.

J'ai chauffé à 160° en vase clos $^1/_{10}$ de molécule d'acide glycolique dissous dans l'eau avec $2.5/_{10}$ molécules d'oxyde de plomb. J'ai constaté derechef la production de plomb métallique. Le produit solide de la réaction a été repris par la soude en excès et la solution alcaline a subi la série de traitements que j'ai indiqués plus haut.

J'ai pu mettre en évidence la présence d'oxalate en précipitant de l'oxalate d'argent que j'ai identifié en y dosant l'argent.

De tous les résultats consignés dans cette notice, la réduction de l'oxyde de plomb me paraît le plus intéressant. Si cet oxyde se laisse aisément réduire à chaud, il ne passe pas comme un agent oxydant à des températures relativement basses. Et il est certainement curieux de voir l'oxyde d'un métal dont l'électroaffinité est supérieure à celle de l'hydrogène se laisser réduire à l'état métallique au sein de l'eau par un agent réducteur aussi peu énergique que l'acide glycolique.

Université de Gand.
Laboratoire de Chimie générale.
Gand, le 5 mars 1908.

—

Contribution à l'étude de l'assimilation du phosphore et de la chaux pendant la vie embryonnaire du poussin; par E. Carpiaux.

Dans un travail sur la composition des œufs de poule, publié en 1903 (*), nous avons insisté particulièrement sur la teneur élevée des œufs en phosphore, une faible partie de ce phosphore étant sous forme de phosphates minéraux et l'autre liée à la matière organique à l'état de lécithine; en même temps nous avons remarqué le faible taux en chaux de la partie comestible de l'œuf. Or, ces deux éléments sont appelés à remplir un rôle important dans l'alimentation de l'embryon. Le phosphore est nécessaire à l'édification de la matière nerveuse, mais la majeure partie doit servir avec la chaux à constituer la principale substance minérale du squelette, le phosphate tricalcique.

Le squelette des oiseaux est relativement plus riche en chaux que celui des mammifères; outre la chaux à l'état de phosphate, il renferme encore environ 10 °/₀ de carbonate calcique.

Dès le très jeune âge, et déjà quelques heures après la naissance, les os du poussin se soudent pour former un assemblage très rigide; il est donc à présumer qu'à

(*) *L'œuf de poule.* (BULLETIN DE L'AGRICULTURE, 1903, n° 19, pp. 200 à 212.) — *Bulletin de l'Institut chimique et bactériologique de l'État*, 1903, n° 72.

partir de ce moment les tissus osseux sont déjà très riches en chaux.

Nous basant sur ces considérations et étant donné l'écart considérable entre les taux en chaux et en phosphore du contenu de l'œuf, nous avons cru intéressant d'examiner quelle était la marche des mutations de ces corps pendant la vie embryonnaire.

Le travail qui suit, sans être à l'abri de toute critique, nous a cependant permis de tirer des conclusions qui n'en sont pas moins certaines.

Avant de livrer cette étude à la publicité, nous avons consulté la littérature et n'avons trouvé aucune indication à ce sujet; nous croyons donc ce travail original.

En vue de nous renseigner quant aux transformations que subissent les éléments de l'œuf pendant le cours de l'incubation, nous avons opéré l'analyse des œufs de poule aux différents stades du développement.

Les œufs examinés ont été pondus par des poules de ferme n'appartenant à aucune race déterminée; nous avons préféré ces derniers parce que ceux des volailles parquées n'offrent guère de garanties.

Les œufs de poules qui disposent d'espace sont mieux fécondés et donnent beaucoup moins de mortalité en coquille que ceux des pondeuses de parquet, qui ne disposent pas de l'alimentation parfaite récoltée dans les pâturages.

Voici la marche suivie pour l'analyse des œufs :

Les œufs ayant été pris à la ferme au cours de l'incubation, nous n'étions pas renseigné sur leur poids initial; nous avons cependant pu l'estimer d'une façon suffisamment exacte par la méthode suivante :

Sachant que la densité de l'œuf qui vient d'être pondu

est de 1.08, il suffit de multiplier le volume de l'œuf par cette densité : 1.08 pour obtenir le poids initial.

Le volume de l'œuf destiné à l'analyse a été calculé en divisant son poids par sa densité, prise au moyen de la balance hydrostatique au moment du prélèvement.

L'œuf a été débarrassé de sa coquille, celle-ci a été pesée et le contenu a été broyé avec une quantité suffisante de sulfate de soude anhydre, qui s'est emparé de l'eau de l'œuf pour cristalliser. L'application de ce procédé nous a permis de préparer un échantillon convenable en évitant de porter la matière à analyser à une température pouvant nuire à une bonne détermination de la lécithine.

Dosage de phosphore total. — Une partie aliquote de l'échantillon a été oxydée à chaud dans un ballon Kjeldahl par l'acide sulfurique et l'acide nitrique. Après neutralisation partielle par l'ammoniaque, on a dosé l'acide phosphorique par précipitation par le molybdate d'ammoniaque et on a pesé à l'état de pyrophosphate de magnésie.

Dosage de la lécithine. — Le dosage de la lécithine a été exécuté sur une partie aliquote. Après extraction par l'éther des corps gras, qui renferment toute la lécithine, l'extrait éthéré, évaporé dans un ballon Kjeldahl, a été traité comme il vient d'être dit à propos du dosage de l'acide phosphorique; le résultat du dosage a donné le phosphore de la lécithine exprimé en acide phosphorique.

Le phosphore minéral (*) égale le phosphore total moins le phosphore de la lécithine.

Dosage de la chaux. — Une partie aliquote de l'échantillon a été lavée avec de l'eau ammoniacale additionnée d'un peu d'oxalate d'ammonium, pour enlever l'excès de sulfate de soude qui eût empêché un bon dosage de la chaux ; le résidu insoluble renfermant toute la chaux a été calciné, puis repris par l'acide chlorhydrique et additionné d'un petit excès de chlorure ferrique ; l'acide phosphorique et le fer ont, après basification par le carbonate ammonique et addition d'acétate ammonique, été séparés en solution faiblement acétique. La chaux a été précipitée à l'état d'oxalate et pesée sous forme de chaux vive.

*
* *

Voici, rapportés dans le tableau I, les résultats de l'analyse des œufs entiers et, dans le tableau II, les chiffres établis sur 100 grammes du contenu.

(*) Nous comprenons également sous la dénomination de « phosphore minéral » celui qui se trouve en combinaison dans les *protéides* représentés d'ailleurs en faibles quantités.

TABLEAU I. — *Dosages portant sur un œuf.*

Nos d'ordre.	AGE en jours.	POIDS.	POIDS FRAIS présumé.	POIDS FRAIS sans coquille.	CHAUX.	ACIDE phosphorique minéral.	ACIDE phosphorique organique.	ACIDE phosphorique total.	CORRESPONDANT à lécithine.
1	0	»	57gr50	51gr50	0gr040	0gr075	0gr150	0gr225	1gr050
2	6 à 7	62gr63	65,45	59,45	»	0,128	0,146	0,274	1,022
3	6 à 7	55,43	57,40	51 40	0,0377	»	»	»	»
4	7 à 8	64.70	65,98	57,83	0,036	0.127	0.135	0,262	0,945
5	13 à 14	54.20	62,00	56,40	0,0478	»	»	»	»
6	14 à 15	54,62	62,77	56,02	0,0616	0,137	0,108	0,245	0,760
7	18	55 90	63,23	57 30	0,1357	0,1820	0,0504	0,2320	0,350
8	19	53,10	61 50	55,50	0,1487	»	»	»	»
9	21 né.	»	»	40,50	0,2022	»	»	»	»
10	16 à 17	55,00	62.10	55,90	0,0467	Poussin mort en coquille.	Poussin mort en coquille.	Poussin mort en coquille.	Poussin mort en coquille.

TABLEAU II. — *Dosages rapportés à 100 grammes de contenu.*

Nos d'ordre.	CHAUX.	ACIDE phosphorique minéral.	ACIDE phosphorique organique.	ACIDE phosphorique total.	CORRESPONDANT à lécithine.	*OBSERVATIONS :* NATURE DE L'INCUBATION.
1	0gr0776	0gr146	0gr291	0gr437	2gr037	
2	»	0,215	0,245	0,460	1,715	Naturelle.
3	0,0733	»	»	»	»	Id.
4	0,0628	0,220	0,233	0,453	1,631	Id.
5	0,0848	»	»	»	»	Id.
6	0,1100	0,244	0,192	0,436	1,344	Id.
7	0,2381	0,318	0,088	0,406	0,616	Id.
8	0,2680	»	»	»	»	Artificielle.
9	0,3610	»	»	»	»	Id. Le poids initial de l'œuf était d'environ 62 grammes.
10	0,0836	»	»	»	»	Id. Mort en coquille.

L'analyse de l'œuf avant l'incubation représente la moyenne des analyses signalées dans le travail : *L'œuf de poule.* On peut y remarquer le rapport large de l'acide phosphorique à la chaux et la prédominance du phosphore à l'état de lécithine sur celui des autres combinaisons.

Examinant ensuite les analyses des œufs soumis à l'incubation, nous voyons, au début, les quantités de phosphore minéral augmenter, en même temps que le taux en lécithine diminue corrélativement. C'est à partir du treizième ou quatorzième jour de l'incubation que ce phénomène d'oxydation commence à se produire avec intensité. C'est aussi à ce moment que l'embryon fait une consommation considérable des corps gras de l'œuf, dont la lécithine fait partie; aussi, au cours des incubations artificielles, on constate une émission de chaleur qui permet de diminuer considérablement la dépense de combustible.

En vertu de la grande affinité de la chaux pour l'acide phosphorique, et par suite de la formation des tissus osseux, l'acide phosphorique provenant de la lécithine et qui n'est saturé par aucune base, se combine à la chaux du contenu de l'œuf. Mais la réserve en cet élément est vite épuisée et l'embryon puise alors à une source presque extérieure, c'est-à-dire à la coquille. C'est d'ailleurs le seul moyen pour l'embryon de constituer son squelette et par conséquent de continuer son évolution.

Considéré sous le rapport de son rôle basique, l'intervention de la chaux de la coquille, pour la saturation de l'acide phosphorique provenant de la lécithine, n'est pas moins intéressante à examiner; en effet, le milieu nutritif qui alimente les tissus animaux, c'est-à-dire le

sang, doit avoir normalement une réaction légèrement alcaline; or, si nous étudions l'analyse des matières minérales du contenu de l'œuf, nous aurons la certitude que les phénomènes d'oxydation, dus à la vie animale, créeront fatalement à l'organisme en voie d'incubation, un milieu acide incompatible avec la vie.

Voici, d'après Kōnig, l'analyse centésimale de la matière minérale du contenu de l'œuf. Tous les dosages ont été effectués sur les cendres.

Les secondes colonnes de chiffres expriment les basicités et acidités correspondant aux teneurs centésimales en atome d'hydrogène.

100 parties de matière minérale (cendres) *du contenu de l'œuf renferment :*

Bases.	%	Alcalinité en hydrogène.
Potasse (K^2O)	17.37	37
Soude (Na^2O)	22.87	74
Chaux (CaO)	10.91	39
Magnésie (MgO)	1.14	6
Oxyde de fer (Fe^2O^3)	0.39	1
TOTAL		157

Acides.	%	Acidité en hydrogène.
Phosphore (en P^2O^5)	37.62	160
Acide sulfurique (SO^3)	0.32	1
Chlore	8.98	25
TOTAL		186

Cette analyse déjà ancienne renseigne l'acide phospho-

rique obtenu par calcination. Il est certain que le dosage de l'acide phosphorique est beaucoup trop faible; en effet, dans l'analyse ci-dessus, le rapport de l'acide phosphorique à la chaux est

$$\frac{P^2O^5}{CaO} = \frac{37.62}{10.91} = \frac{3.45}{1},$$

tandis que, en effectuant le dosage du phosphore par voie humide, comme c'est le cas pour nos analyses, on obtient le rapport suivant :

$$\frac{P^2O^5}{CaO} = \frac{225}{40} = \frac{5\ 63}{1}.$$

Il est alors facile d'établir que le chiffre des atomicités acides à attribuer au phosphore doit être, non pas 160, mais beaucoup plus élevé. On peut l'estimer d'après la proportion

$$\frac{3.45}{5.63} = \frac{160}{x},$$

d'où

$$x = 260.$$

Ainsi corrigé, on arrive à exprimer le contenu de l'œuf en matière minérale par 157 atomicités basiques et 286 atomicités acides.

Comme on le voit, le nombre des atomicités acides l'emporte de beaucoup sur celui des bases; si l'œuf frais n'a pas de réaction acide, c'est que la majeure partie du phosphore, exprimée en acide phosphorique, se trouve engagée dans un corps neutre, la lécithine. Celle-ci, comme le montrent les tableaux I et II, s'oxyde pendant l'incubation en laissant comme résidu de l'eau, de l'acide carbonique et de l'acide phosphorique. Ce dernier, s'il n'était saturé par une base, finirait par entraver le développement en rendant le milieu acide.

Le dix-huitième jour, plus des deux tiers de la lécithine se sont oxydés et l'apport de chaux provenant de la coquille est considérable : il dépasse le double du contenu initial de l'œuf. Vers le dix-neuvième ou vingtième jour, alors que se résorbe le reste du jaune de l'œuf, l'assimilation de la chaux s'active rapidement pour arriver au moment de l'éclosion, entre le vingtième et vingt et unième jour, à donner un poussin parfait. Celui-ci a emprunté à la coquille plus des $^4/_5$ de la chaux de son organisme.

Il est probable qu'il faut attribuer la fragilité de la coquille au moment de l'éclosion à cet emprunt considérable de chaux.

La chaux de la coquille de l'œuf n'est pas seulement combinée à l'acide carbonique, une certaine quantité s'y trouve sous forme de phosphate.

Il était intéressant de savoir si l'embryon n'utiliserait pas les phosphates tout formés de l'enveloppe.

Nous avons, en vue de répondre à cette question, effectué l'analyse des coquilles d'œufs frais et des coquilles d'œufs ayant donné des poussins vivants.

L'analyse des coquilles, débarrassées de leurs membranes et incinérées, a donné les résultats suivants :

100 parties de coquilles renferment :	Œufs frais.	Œufs incubés.
Chaux (CaO)	54.30	54.86
Acide phosphorique (P^2O^5) . .	0.31	0.32
Rapport de la chaux à l'acide phosphorique	175.1 : 1	174.1 : 1

Le rapport de la chaux à l'acide phosphorique est sensiblement le même et la petite différence tombe dans les limites d'erreurs d'analyses.

Si, ce qui est peu probable, le poussin a utilisé l'acide phosphorique de la coquille, ce ne peut être qu'en quantité infinitésimale, que l'on peut d'ailleurs apprécier assez exactement.

Le tableau I nous indique que le poussin a emprunté 0gr2022 moins 0gr0400 de chaux = 0gr1622 à la coquille.

Or, le rapport $\frac{\text{chaux}}{\text{acide phosphorique}}$ n'ayant pas varié après l'incubation, le poussin n'a pu prendre l'acide phosphorique que dans le même rapport, par conséquent la quantité maximum de P^2O^5 qui a pu être absorbée, sera donnée par la proportion

$$\frac{175}{1} = \frac{0.1622}{x},$$

d'où

$$x = 0^{gr}0009.$$

En résumé, si la coquille a fourni de l'acide phosphorique pour le développement embryonnaire, cette quantité doit être estimée à moins de 1 milligramme.

Conclusions.

1) Pendant le développement embryonnaire jusqu'à l'éclosion, le poussin utilise le phosphore du contenu de l'œuf, et s'il en prend à la coquille, ce ne peut être qu'en quantité infinitésimale.

2) La coquille fournit plus des $^4/_5$ de la chaux nécessaire à l'édification du poussin.

3) C'est à la fin de l'incubation que se fait la plus grande consommation du calcaire de l'enveloppe : cette consommation suit une marche parallèle à la destruction de la lécithine.

*
* *

Nous avons eu l'occasion d'examiner sommairement un œuf dont le poussin était mort en coquille vers le seizième ou dix-septième jour ; nous n'avons pu, à la suite d'accident, qu'effectuer le dosage de la chaux.

Tandis que chez l'œuf en incubation normale, le taux en chaux (tableau II, colonne 2, ligne 5) est de 0gr0848 pour l'œuf ayant subi une incubation de treize ou quatorze jours, et de 0gr1100 pour celui de quatorze à quinze jours (colonne 2, ligne 6), nous n'avons trouvé dans le contenu de l'œuf dont l'embryon était mort entre le seizième et le dix-septième jour, que 0gr0836 de chaux (colonne 2, ligne 10), alors que le taux normal aurait dû approcher de 0gr2000 (colonne 2, ligne 7).

Nous ne pouvons naturellement pas conclure de cause à effet; la mortalité en coquille serait-elle due à un manque d'assimilation de la chaux ou bien le défaut d'assimilation résulterait-il d'un état morbide? Cette constatation ne reste pas moins très intéressante. En effet, la mortalité en coquille est un fléau qui prend des proportions de plus en plus grandes, en causant aux producteurs de poulets primeurs surtout des pertes importantes. En défalquant les œufs clairs, la proportion de ceux qui n'arrivent pas à terme atteint parfois 40 à 60 °/. lorsque l'on fait de l'incubation d'hiver, ou quand on fait incuber des œufs sortis des parquets. Il y aurait donc lieu, comme nous comptons pouvoir le faire, de poursuivre l'étude des phénomènes chimiques qui accompagnent l'incubation : nul doute que cette étude ne soit indispensable pour déterminer toutes les causes, et celles-ci sont multiples, de la mortalité en coquille. Quelques causes en relation avec le milieu extérieur sont déterminées ; on

sait ce qu'il faut penser de la température d'incubation, et les latitudes permises sous ce rapport. Zuntz (*) a mis en lumière l'importance de la perte de poids journalière des œufs soumis à l'incubation et il en a donné la mesure; il en est de même en ce qui concerne l'aération et la teneur en CO^2 de l'air de la couveuse. Mais à côté de cela, il existe d'autres facteurs aussi importants peut-être et notamment ceux en relation avec la composition de l'œuf. L'étude des œufs de provenances diverses destinés à l'incubation et à différentes périodes de l'année, et l'examen plus approfondi des transformations dont ils sont le siège, seraient peut-être de nature à jeter un jour sur cette opération livrée encore sous plus d'un rapport à l'empirisme : aucune des explications données de la plupart des cas de mortalité en coquille ne supporte la discussion. La teneur de l'œuf, non seulement en substance organique, mais aussi en matière minérale, doit avoir une importance capitale sur l'issue de l'incubation. Or, on sait que la composition de l'œuf n'est pas invariable. Certain auteur prétend, d'ailleurs, avoir pu relever le taux du jaune en matière phosphorée; il serait même arrivé à doubler la teneur en lécithine. Sans savoir si cette opération serait un bien pour l'incubation, sa réalisation démontre au moins que l'alimentation des pondeuses a une répercussion sur les éléments de l'œuf et par conséquent sur les résultats qu'il faut en attendre lors de leur mise en incubation.

Fait à l'Institut chimique et bactériologique
de l'État, à Gembloux. — Janvier 1908.

(*) *Deutsche landwirtschaftliche Presse,* 20 avril 1904.

—

PTILOCRINUS ANTARCTICUS n. sp., *a crinoid dredged by the Belgian Antarctic Expedition;* by F. A. Bather, British Museum (Natural History), London.

Material. — N° 589. Three specimens : A. Crown on column. B. Crown and column, broken. C. Smaller crown, abnormal, with portion of column. N° 688, two columns of the same, dried. All from Faubert VII, 8 October 1898; 82° 47′ W. Greenwich, 70° 23′ S. Depth, not actually given, circa 480 metres. Colour in life, « Flavus brillant ». Colour in spirit, yellowish brown.

These clearly belong to a species allied to *Ptilocrinus pinnatus* A. H. Clark (1) from the North Pacific. Clark gave no diagnosis of *Ptilocrinus,* nor did he assign it to any Family or even Order. The details given by him leave some important points doubtful, and the material at my disposal has not enabled me to clear them up entirely. Clark did, however, state that his species was « closely related » to *Calamocrinus Diomedae* A. Ag., and this seems justified. *Calamocrinus* has hitherto been regarded as one of the Apiocrinidae, but it has not been directly proved to be pseudo-monocyclic. The discovery of *Ptilocrinus* seems to link *Calamocrinus* rather to the Crinoidea Monocyclica. Pending decisive evidence, the generic diagnosis has been drawn up so as to distinguish *Ptilocrinus* from the known genera of both series.

---

(1) *Proc. U. S. Nat. Mus.,* n° 1547, vol. XXXII, p. 551, 15 June 1907.

Diagnosis of Ptilocrinus. — Monocyclic or cryptodicyclic. BB completely fused (except perhaps in young). Facet restricted to $^2/_3$ width of R. Arms unbranched, free and pinnulate from Br_4 onward, the proximal Br being fixed, though not rigidly, by the heavily plated tegmen. Br_1 united to R by articulation, to Br_2 by syzygy usually; Br_5 and Br_6 united by syzygy, after which syzygies are infrequent and irregular. Subvective grooves pass from Br_4 over tegmen. Stem cylindrical or nearly so, relatively long and slender, joint-faces radiately striate; fresh columnals arising in proximal region [existence of a persistent proximale uncertain]; distal end expanded [probably to form an encrusting root].

The **genotype** is :

Ptilocrinus pinnatus A. H. Clark 1907 (loc. cit.) 1588 fm., off Moresby Id., Queen Charlotte group, N. Pacific.

Diagnosis. — A *Ptilocrinus* with height of BB circa four-fifths that of RR, and about equal to diameter of cup at basi-radial suture. Sides of basal cup continuous with column. RR [described by Clark as « elongate », but figured by him as wider than high] with very broad median ridge continuous into arms. Facet about two-thirds width of R, facing outwards slightly. Interbrachials and interambulacrals [apparently] smooth. Tegmen apparently of greater height than the cup. Brachials and pinnulars smooth and equable in outline. Columnars all smooth-sided.

Some of the statements in this diagnosis are based on the enlarged photographs reproduced in P. Bartsch's

paper. « A new parasitic mollusk of the genus *Eulima* (1). »

Ptilocrinus antarcticus sp. n.

Diagnosis. — A *Ptilocrinus* with height of BB less than half that of RR, and about half diameter of cup at basiradial suture. Proximal border of basal cup projects beyond column to a distance equal to about one-sixth diameter of proximal columnals. RR about as wide as high, with broad median longitudinal ridge, less wide than arms, and tending to bifurcate at basal end. Facet about five-eighths width of R, facing outwards markedly. Interbrachials verrucose, continuous with similar but smaller interambulacrals to form a domed tegmen equal in height to the cup. Brachials somewhat swollen, so that arms have a nodose outline. Pinnulars with ridged sides. Proximal columnars varying in diameter and height according to orders of growth; the larger ones tuberculate.

Holotype, specimen B (fig. 1).

The coarser ornament, more pronounced ridges, and slightly more massive appearance of this species may be connected with the fact that it was dredged from a depth only one-sixth of that at which *P. pinnatus* was found.

---

(1) *Proc. U. S. Nat. Mus.*, n° 1548, vol. XXXII, pp. 555, 556, pl. liii, 5 June 1907.

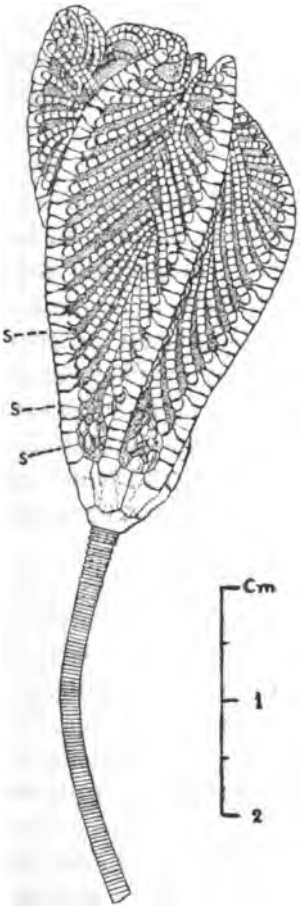


FIG. 1. — *Ptilocrinus antarcticus*. Accurate outline drawing of the holotype, × $^3/_2$ diameters. *s*, syzygy.

—

Sur quelques propriétés physiques du butane et de l'isobutane; par Paul Lebeau, professeur à l'École supérieure de pharmacie, Paris.

Dans le cours de ses importantes recherches sur la volatilité des composés organiques, M. Louis Henry avait été conduit à douter de l'exactitude des points d'ébullition généralement attribués au butane et surtout à l'isobutane. Nous avons été heureux de pouvoir faire sur sa demande quelques déterminations concernant ces deux carbures. Il nous était facile d'obtenir ces deux composés dans un grand état de pureté en utilisant notre méthode générale de préparation des carbures saturés basée sur l'action des métaux ammoniums sur les dérivés halogénés de ces carbures.

Pour préparer le butane, nous avons fait réagir le sodammonium sur l'iodure de butyle normal et sur l'iodure de butyle secondaire. Dans le cas de l'isobutane, nous avons traité deux échantillons différents de chlorure d'isobutyle, l'un par le sodammonium, l'autre par le calcium ammonium. Nous pouvions donc disposer ainsi de deux butanes et de deux isobutanes de provenance différentes (*).

Le dispositif expérimental adopté pour réaliser ces préparations a été le même dans tous les cas. Le métal

(*) Les iodures et chlorures alcooliques que nous avons utilisés provenaient de la maison Kalhbaum. Nous les avons en outre tous rectifiés.

ammonium en solution dans un excès d'ammoniaque liquide était contenu dans un ballon tubulé dont le col portait un bouchon de caoutchouc donnant passage à un tube servant à l'arrivée du gaz ammoniac et à un tube à brome permettant l'introduction du dérivé halogéné. La tubulure du ballon était destinée au départ du gaz produit.

Pour préparer le butane, par exemple, on plaçait dans le ballon 2 grammes de sodium et on liquéfiait le gaz ammoniac au moyen d'un mélange d'acétone et de neige carbonique, de manière à former une solution très fluide de métal ammonium. On fait ensuite tomber goutte à goutte et en agitant continuellement l'iodure de butyle normal ou secondaire. La réaction est immédiate et assez vive pour que, malgré le refroidissement énergique auquel le mélange est soumis, la majeure partie du butane se dégage à l'état gazeux. On cesse d'ajouter l'iodure quand la coloration bleue du sodammonium disparaît, phénomène qui se produit brusquement. La réaction est exprimée par l'équation suivante :

$$2C^4H^9I + Az^2H^6Na^2 = C^4H^{10} + C^4H^9AzH^3 + 2NaI + AzH^3.$$

Le rendement est théorique.

Le carbure est recueilli sur une cuve à eau, ce qui permet l'absorption de l'ammoniaque. Le gaz renferme parfois une petite quantité de la vapeur du dérivé halogéné ayant servi à le préparer. On le purifie en le liquéfiant en présence de sodammonium. Après un nouveau lavage à l'eau, le carbure est desséché par son contact avec le sodium. La dernière purification du butane consiste dans sa solidification au moyen de l'air liquide, dans un petit récipient de verre relié à une trompe à mercure.

On fait le vide sur le carbure solide et on le recueille ensuite.

Les combustions eudiométriques faites sur tous les échantillons préparés ont permis de reconnaître la pureté de ces carbures.

Points d'ébullition. — Les points d'ébullition de ces carbures ont été déterminés en faisant bouillir 3 à 4 centimètres cubes de chacun d'eux dans un petit cylindre de verre protégé du rayonnement extérieur par un manchon de plâtre. Ce tube de verre communiquait avec un récipient refroidi à — 80° permettant de recueillir l'hydrocarbure distillé sous la pression atmosphérique. L'ébullition était provoquée et régularisée en chauffant le fond du tube légèrement par la chaleur de la main. La température était donnée par un thermomètre à mercure de Baudin, dont la cuvette était au début de l'expérience entièrement plongée dans le liquide. Le point d'ébullition des deux échantillons de butane normal a été trouvé très voisin de + 0°5 sous la pression de 755 millimètres. Pour les deux isobutanes, on a également constaté un même point d'ébullition, soit — 10°5 sous la pression de 757 millimètres.

Tension de vapeur à la température ordinaire. — Dans le but de vérifier une fois de plus l'identité de pureté des divers échantillons de butane et d'isobutane, nous avons déterminé leur tension de vapeur à la température du laboratoire. A cet effet, le carbure était liquéfié dans un tube de verre fermé à une extrémité et recourbé de manière à se terminer par un manomètre à air libre. L'extrémité fermée était reliée par une tubulure à un

robinet à trois voies communiquant, d'une part, avec une trompe à mercure et, d'autre part, avec un gazomètre contenant le gaz à étudier. On pouvait ainsi, après avoir fait le vide dans l'appareil, introduire le carbure, le liquéfier et même le solidifier. On avait soin de faire préalablement rentrer une ou deux fois une petite quantité de gaz et de l'éliminer ensuite à la trompe afin de chasser toute trace d'air. Le tube renfermant le carbure était ensuite séparé du gazomètre en étirant et en fermant sa tubulure au moyen du chalumeau. Les appareils étant abandonnés dans une salle non chauffée, on a fait les lectures des dénivellations des manomètres le matin, avant qu'il ne se soit produit des variations rapides de la température. On a obtenu les résultats suivants :

	Température 10°4.	Température 8°6.
Butane de l'iodure normal. Tension en millimètres de mercure . . .	1206^{mm}78	1168^{mm}70
Butane de l'iodure secondaire. . .	1203^{mm}86	1167^{mm}23

	Température 0°7
Isobutane par le sodammonium. .	1179^{mm}16
Isobutane du calcium ammonium .	1176^{mm}36

Les divergences observées sont d'un ordre de grandeur correspondant à la limite de précision de nos mesures. Le moindre mouvement d'air dans la salle où ces mesures étaient effectuées entraînait des variations de cet ordre. Les appareils étaient disposés de telle sorte que les lectures pouvaient être faites très rapidement avec un même cathétomètre.

Températures critiques. — Les températures critiques

ont été déterminées par la méthode du tube de Natterer. Nous avons trouvé pour le butane 151-152° et pour l'isobutane 134-135°.

Solubilité. — Le butane et l'isobutane sont peu solubles dans l'eau. A 17° et sous la pression de 772 millimètres, un volume d'eau dissout 0 vol. 15 de butane et 0 vol. 13 d'isobutane. Nous avons obtenu pour les solubilités dans l'alcool, l'éther et le chloroforme les nombres suivants :

	Butane.	Isobutane.
1 volume d'alcool (t = 17°. H = 775) dissout	18^{vol}83	13^{vol}2
— d'éther (t = 18°. H = 773) —	29.8	27.9
— chloroforme (t = 17°. H = 768) —	32.5	39.5

En résumé, l'action des métaux ammoniums sur les dérivés halogénés du butane et de l'isobutane nous a permis de préparer ces deux composés à l'état de pureté. Ces deux carbures, solides dans l'air liquide, sont encore liquides à — 80°. Le premier bout à 0°5 (H = 755) et le second à — 10°5 (H = 757). Le point d'ébullition du butane diffère peu de celui qui lui avait été attribué par Butlerow (*), qui avait admis la température de + 1°. Le point d'ébullition de l'isobutane s'éloigne, au contraire, notablement de la température de — 17° qui est généralement adoptée. Les températures critiques sont pour le butane 151-152° et pour l'isobutane 134-135°. Le butane est plus soluble dans l'eau, l'alcool et l'éther que l'isobutane, tandis que ce dernier est au contraire plus soluble dans le chloroforme.

(*) Butlerow, *Zeitschrift für Chemie*, 1867, p. 363.

Observation relative à l'action du soufre sur le gaz acétylène (1); par W. Oechsner de Coninck.

La note que M. Georges Capelle a publiée récemment dans le *Bulletin de la Société chimique de France* m'engage à rappeler quelques résultats obtenus, il y a environ deux ans, dans mon laboratoire. Avec un de mes préparateurs, j'avais fait réagir l'acétylène sur le soufre fondu (maintenu à l'abri de l'air), *et nous avions constaté qu'il ne s'était point formé de thiophène.* Comme M. Capelle a fait, de son côté, la même observation, et qu'il l'a publiée, *ce qui rend sa priorité indiscutable*, je demande simplement à l'Académie l'autorisation de publier ces quelques lignes comme une confirmation de l'intéressant résultat obtenu par M. Capelle.

Montpellier, le 27 février 1908.

—

Quelques réflexions sur le rôle de l'ionisation dans certaines réactions chimiques (2); par W. Oechsner de Coninck.

Les réactions chimiques qui se passent entre sels solubles et sels insolubles, et qui ont été mises en lumière et étudiées par Malaguti, W. Spring et d'autres auteurs, n'ont guère été expliquées jusqu'ici. On s'est borné à

(1) Institut de chimie, Montpellier.
(2) Institut de chimie, Montpellier.

énoncer les résultats fournis par l'expérience, et à faire ressortir l'intérêt qu'ils présentaient.

Les progrès récents de la chimie physique et les beaux travaux qui ont été faits par les chimistes de différents pays et de différentes écoles sur l'ionisation, nous permettent aujourd'hui d'entrevoir une explication, tout au moins rationnelle, de quelques-unes de ces réactions. Je prendrai comme exemple la réaction entre chlorures solubles et carbonates insolubles au sein de l'eau. Nous savons que lorsque 100 molécules de chlorure de potassium sont dissoutes dans une quantité déterminée d'eau, 88 d'entre elles sont ionisées (Raoult). Si du carbonate de baryum se trouve en présence, n'est-on pas fondé à admettre qu'une petite partie du chlore dissocié se porte sur ce sel pour former du chlorure de baryum, tandis que l'acide carbonique correspondant va saturer la petite quantité de potasse mise, à un moment donné, en liberté? Dans les réactions entre sels solubles et sels insolubles, la double décomposition est effectivement très petite; et l'on voit que ce résultat pouvait être prévu, si l'on admet 1° l'effet dû à l'ionisation; 2° la limitation des réactions due aux lois de la dissociation s'effectuant au sein même d'un liquide.

Les réactions entre sulfates solubles et carbonates insolubles pourraient, semble-t-il, s'expliquer d'une manière analogue.

Montpellier, le 27 février 1908.

ÉLECTIONS.

En remplacement d'Albert Lancaster décédé, M. Fraipont est élu membre de la Commission de la *Biographie nationale*, et M. Mourlon est élu membre de la *Commission administrative*.

OUVRAGES PRÉSENTÉS.

Gravis (*A.*). La flore du Congo. Deux conférences faites à Liége le 4 et le 11 février 1908. In-8° (8 p.).

Rutot (*A.*). Compte rendu sommaire du Congrès de Monaco. Découverte d'un atelier de taille du paléolithique ancien à Saint-Acheul, par M. Commont. — Paléolithes fabriqués à la machine. — Les découvertes du Dr Baechler au Wild-Kirchli. — Les découvertes du Dr Schweinfurth en Sicile et en Tunisie. Bruxelles, 1907; extr. in-8° (9 p.).

— I. La poterie pendant l'époque troglodytique. II. A propos des pseudo-éolithes de Cromer. Le Mans, 1908; extr. in-8° (16 p.).

Duesberg (*J.*). Sur l'existence de mitochondries dans l'œuf et l'embryon d'*Apis mellifica*. Iéna, 1908; extr. in-8° (5 p.).

Vincent (*J.*). Atlas des nuages. Bruxelles, 1907; extr. in-4° (29 p. et 7 pl.).

Vincent (*J.*). Nouvelles recherches sur la température climatologique. Bruxelles, 1907; extr. in-4° (120 p.).

Doudou (*E.*). Les phénomènes d'homochromisme, d'autotomie et de mimétisme observés sur l'*OEdipoda cerulescens* vivant sur les terrils des environs de Seraing-sur-Meuse. Mâcon, 1906; extr. in-8° (9 p. et 1 pl.).

Stroobant (*Paul*). Sur la cause de la différence systématique entre le nombre d'étoiles fourni par l'observation visuelle et par la photographie dans les diverses parties du Ciel. Paris, 1908; extr. in-8° (7 p.).

Kerremans (*Ch.*). Monographie des Buprestides, tome II. Bruxelles, 1907; in-8° (621 p. et 6 pl.).

Arctowski (*Henryk*). Variations de longue durée de divers phénomènes atmosphériques. Bruxelles, 1907; extr. in-8° (14 p.).

— De l'influence de la lune sur la vitesse du vent aux sommets du Saentis, du Sonnblick et du Pike's Peak. Bruxelles, 1907; extr. in-8° (13 p.).

— Réclamation à propos d'association. Bruxelles, 1907; extr. in-8° (2 p.).

— Recherches sur la périodicité des phénomènes météorologiques à Bruxelles. — Notice sur les variations de longue durée des amplitudes moyennes. — De la marche diurne de la température en Russie. — Variation des amplitudes des marches diurnes de la température au sommet du Pike's Peak. Bruxelles, 1908; extr. in-8°.

Fraipont (*Charles*). Sur un affleurement fossilifère du Houiller à proximité de la faille eifélienne à Angleur. Liége, 1908; extr. in-8° (5 p.).

— Sur l'origine d'un cailloutis très fin interstratifié dans les sables (Om) des environs de Sprimont. Liége, 1908; extr. in-8° (7 p.).

Bosmans (*H.*). Sur le « Libro de algebra » de Pedro Nuñez. Leipzig, 1908; extr. in-8° (16 p.).

— Histoire des mathématiques et de l'astronomie : La « Bibliotheca mathematica » en 1905-1906. Bruxelles, 1907; 2 extr. in-8° (17 p. et 17 p.).

— Lettre inédite d'Antoine Thomas, missionnaire belge en Chine, au XVII° siècle. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (18 p.).

Monier (*Marcel*). La fermenthérapeutique considérée comme science nouvelle. Anvers, 1908; extr. in-8° (15 p.).

LIÉGE. *Société royale des sciences*. Mémoires, tome VII, 1907; in-8°.

La Cellule, recueil de cytologie et d'histologie générale (J.-B. Carnoy et G. Gilson), tome XXIV, 1er fascicule. Louvain, 1907; gr. in-8°.

Institut colonial. Les différents systèmes d'irrigation, tome III : Espagne. 1908.

Archives de biologie (Éd. Van Beneden et Ch. Van Bambeke), tome XXIII, 3° fasc., 1907.

—

Meves (*Friedrich*) et *Duesberg* (*Jules*). Die Spermatozytenteilungen bei der Hornisse (*Vespa crabro* L.). Bonn, 1908; extr. in-8° (17 p. et 2 pl.).

Duesberg (*Jules*). Der Mittochondrial-Apparat in den Zellen der Wirbeltiere und Wirbellosen. Bonn, 1907; extr. in-8° (13 p. et 1 pl.).

BERLIN. *Königl. technische Hochschule*. Werkzeug und Arbeitsteilung. Rede am 25. Januar 1908 (Kammerer).

MUNICH. *Deutscher Museum*. Führer durch die Sammlungen, 1908; in-8° (158 p.).

—

Wève (*Louis*). Cinématique des mécaniciens. Paris, 1907; pet. in-8° (VIII-475 p.).

Leduc (*Stéphane*). Production par diffusion dans leur ordre consécutif des forces, mouvements et figures de la karyokinèse. Paris, 1906; extr. in-8° (3 p. et 1 fig.).

— Les bases physiques de la vie et la biogenèse. Paris, 1906; in-4° (14 p.).

— Conférence sur la diffusion et l'osmose. Paris, 1907; extr. in-8° (9 p.).

PARIS. *Comité international des poids et mesures*. Procès-verbaux des séances, 1907.

Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Nouv. édition. 1908; in-8°.

Lebeau (*Paul*). Notice sur la vie et les travaux de Henri Moissan. Paris, 1908; in-8° (38 p. avec portrait).

—

GRANDE-BRETAGNE.

Lockyer (*Sir Norman*). On the presence of sulphur in some of the Hotter Stars. Londres, 1907; extr. in-8° (7 p. et 1 pl.).

LONDRES. *Geological Society*. The history of the Society, by Horace Woodward, 1907; in-8°.

SOUTH-KENSINGTON. *Solar physics Committee*. Upon the work done in the solar physics Observatory in 1907 (Sir Norman Lockyer); in-8° (18 p.).

— Prominence and coronal structure (Will. Lockyer), 1908; in-8° (6 p. et 1 pl.).

The nautical Almanac and astronomical ephemeries for 1911.

Glascow. *Geological Society*. Transactions, vol. X, XI, XII, 1892-1905.

— The drift or glacial deposits of Ayrshire (John Smith), 1898; in-8° (134 p.).

— The natural history of Scottish Zeolites and their allies (Goodschild and Currie), 1903; in-8° (68 p.).

Philosophical Society. Proceedings, vol. XXXVIII, 1906-1907.

—

Strambio (*Gaetano*). La pellagra, i pellagrologi e le administrazioni pubbliche. Saggi di storia e di critica sanitaria. Milan, 1890; in-8° (xx-754 p.).

Guareschi (*Icilio*). Notizie storiche su Luigi Chiozza con lettere inedite di Ch. Gerhardt ed altri chimici. Turin, 1907; extr. in-4° (46 p., portrait).

— Nuove notizie storiche sulla vita e sulle opere di Macedonio Melloni. Turin, 1908; extr. in-4° (59 p., portraits).

Liapounoff (*A.*). Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. 1re partie. Saint-Pétersbourg, 1906; in-4° (225 p.).

Popoff (*D.-K.*). Démonstration du théorème dit : « la grande Proposition » de Fermat, à savoir que $a^n + b^n = c^n$ est impossible en nombres entiers si $n > 2$. Sophia, 1908; in-8° (8 p.).

Bucarest. *Académie roumaine*. Discours et rapports, 1906-1907.

— Annales, tome XXIX, 1906-1907.

Gautier (*R.*). Résumé météorologique de l'année 1906 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. Genève, 1907; in-8°.

— Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice en 1906. Genève, 1907; in-8°.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — N° 4.

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 4 avril 1908.

M. Julien Fraipont, directeur.

M. le chevalier Edm. Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. J. Deruyts, *vice-directeur;* C. Malaise, Ch. Van Bambeke, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, M. Mourlon, P. Mansion, P. De Heen, C. le Paige, Léon Fredericq, J. Neuberg, C. Vanlair, A. Jorissen, Ch. Francotte, Paul Pelseneer, A. Gravis, Aug. Lameere, *membres;* F. Swarts, Th. Durand, Max. Lohest, Rutot, V. Willem et Alex. de Hemptinne, *correspondants.*

MM. Louis Henry et Ch. Lagrange ont motivé leur absence.

CORRESPONDANCE.

M. G. Castelnuovo, secrétaire général du comité d'organisation du IVe Congrès international des mathématiciens à Rome, remercie pour les vœux qui lui ont été exprimés pour la réussite du Congrès.

— La Classe accepte le dépôt dans les archives de l'Académie :

1° Par M. Lucien Godeaux (43, rue des Champs, à Liége), d'un billet cacheté portant la date du 20 mars 1908;

2° Par M. A. Bomsel, ingénieur (36, rue Antoine Dansaert, à Bruxelles), de deux billets cachetés portant les dates des 12 et 21 mars 1908 et intitulés : *Théorèmes sur la théorie des nombres;*

3° Par M. J. Beaupain, ingénieur en chef des mines, à Liége, d'un billet portant la date du 14 mars 1908.

ASSOCIATION INTERNATIONALE DES ACADÉMIES.

La *Reale Accademia dei Lincei* à Rome, Académie directrice de l'Association internationale pour 1908-1910, fait parvenir quatre exemplaires de l'ouvrage : *Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hülfe der Drehwage;* par le baron Roland Eötvös, de Budapest.

— Hommages d'ouvrages :

1° *Traité des courbes spéciales remarquables planes et*

gauches, tome Ier; par Gomes Teixeira (adressé par l'Académie polytechnique de Porto);

2° *Questions de physique générale et d'astronomie;* par le vicomte François de Salignac Fénelon;

3° *La création. Les migrations aux temps géologiques;* par le même;

4° *Deuxième congruence linéaire de cubiques gauches;* par Modeste Stuyvaert.

— Travaux manuscrits à l'examen :

1° *Sur l'existence d'une lactase dans le lait de vache;* par le Dr A.-J.-J. Vandevelde. — Commissaires : MM. Fredericq et Jorissen;

2° *Contribution à l'étude du biomécanisme*; par le professeur A. Demoulin et Ch. Pottiez, pharmacien à Fontaine-l'Évêque. — Commissaires : MM. Fredericq et Jorissen;

3° *Quelques mots à propos d'une nouvelle théorie de la chaleur;* par J. Debry. — Commissaires : MM. Van der Mensbrugghe et De Heen.

RAPPORTS.

Sur une congruence linéo-linéaire de cubiques gauches; par Lucien Godeaux.

Rapport de M. Neuberg.

« On dit que des courbes qui sont assujetties à des conditions communes, constituent une *congruence* lorsque chacune d'elles dépend des valeurs de deux paramètres;

le nombre de ces lignes est donc représenté par ∞^2. L'*ordre* de la congruence est le nombre des courbes passant par un point quelconque. Il peut arriver que par un point il passe une simple infinité de courbes de la congruence; un tel point est dit *singulier*. Un point commun à toutes les courbes considérées est dit *principal*. La *classe* d'une congruence est le nombre des courbes qui rencontrent en deux points une droite quelconque. Si une droite est bisécante d'une simple infinité de courbes de la congruence ou de toutes les courbes, on dit respectivement qu'elle est *singulière* ou *principale*.

Les congruences de cubiques gauches ont été l'objet de plusieurs travaux remarquables. Celle des cubiques passant par cinq points donnés a été étudiée par MM. Reye et Sturm; celle des cubiques admettant, de la même manière, un même tétraèdre d'osculation, par M. Sturm; celle des cubiques ayant en commun trois bisécantes et deux points, par M. Stuyvaert. Ce géomètre belge a publié, sur les congruences de cubiques, plusieurs mémoires intéressants dont l'un a paru récemment dans nos *Bulletins*.

M. Godeaux soumet à l'Académie ses recherches sur la congruence de cubiques admettant quatre bisécantes communes a_1, a_2, a_3, a_4 et passant par un point donné A. Cette congruence est un cas particulier d'une autre plus générale signalée par M. Veneroni et étudiée analytiquement par M. Stuyvaert. M. Godeaux emploie la méthode synthétique, ce qui, avec une foule de résultats nouveaux, donne un intérêt suffisant à son travail. Dans ses développements, il a l'occasion de s'appuyer sur un mémoire important de Fr. Deruyts, concernant un mode de génération de la surface cubique.

Soit α le plan mené par les deux droites b_1, b_2 qui passent par A et s'appuient l'une sur a_1 et a_2, l'autre sur a_3 et a_4. A toute droite d de α on peut faire correspondre une cubique gauche de la congruence, intersection partielle des quadriques réglées (a_1a_2d), (a_3a_4d). Réciproquement, toute courbe de la congruence admet ce mode de génération si l'on prend pour d la droite joignant les deux points autres que A où la courbe coupe le plan α; toutefois, si la courbe touche α en A, la droite d joint A au second point d'intersection de la courbe avec α.

L'auteur détermine très simplement l'ordre et la classe de la congruence. Il étudie d'une manière complète les cas où une cubique dégénère en une conique et une droite ou en trois droites, la surface des cubiques tangentes à une courbe donnée du plan α, celle des cubiques s'appuyant sur une droite donnée, le lieu des points de contact des cubiques tangentes à un plan donné, etc.

Cette courte analyse suffit pour montrer que le travail de M. Godeaux est digne de figurer dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

Sur une nouvelle méthode de préparation de quelques éthers simples (deuxième communication); par Th. Van Hove, ingénieur-chimiste, préparateur à l'Université de Gand.

Rapport de M. F. Swarts, premier commissaire.

« M. Van Hove a décrit, dans une communication antérieure faite à l'Académie, un mode de préparation des éthers simples qui lui a donné de très bons rendements pour les éthers d'alcools primaires.

Il a recherché, dans le travail qui nous est présenté, si le procédé était applicable à la préparation des éthers d'alcools secondaires et tertiaires.

Dans son rapport sur le premier mémoire de M. Van Hove, notre savant confrère M. L. Henry avait signalé l'intérêt d'une recherche dans cette direction ; il prévoyait d'ailleurs un insuccès dans les essais d'éthérification des alcools tertiaires. Le travail de M. Van Hove confirme ces prévisions : le chlorhydrate de quinoléine, comme le chlorure de zinc, transforme le triméthylcarbinol en isobutylène et isodibutylène.

Par contre, l'auteur a obtenu l'éther isopropylique en proportion assez satisfaisante. Des réactions secondaires, qui donnent naissance à du propylène et à du chlorure d'isopropyle, viennent abaisser le rendement.

Le chlorure de propyle formé réagit sur la quinoléine pour donner des quinoléines alkylées, différentes des isopropyle quinoléines connues et qui paraissent posséder des caractères de leucobases.

J'estime que le travail de M. Van Hove renferme des résultats intéressants; aussi ai-je l'honneur d'en proposer l'insertion dans les *Bulletins* de la Classe. »

—

Rapport de M. Louis Henry, second commissaire

« Ce travail est fait avec soin ; j'en propose aussi l'insertion dans notre *Bulletin*. » — Adopté.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

—

Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes; par Ch.-J. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain, correspondant de l'Académie.

INTRODUCTION.

§ 1. — *Préliminaire.*

1. Objet de l'interpolation. — L'objet de l'interpolation est de trouver une fonction qui passe par des valeurs données pour des valeurs données de la variable, ou, ce qui revient au même, d'écrire l'équation d'une courbe passant par des points donnés.

Ce problème est dans une dépendance plus ou moins étroite avec celui de l'approximation des fonctions. En effet, dans l'étude des phénomènes naturels, on se sert des formules d'interpolation pour donner une expression mathématique à la loi qui lie les variations simultanées de deux grandeurs quand cette loi n'est connue que par un certain nombre d'observations. Le plus souvent, on expérimente pour des valeurs de la variable en progression arithmétique et, pour celles-là, la formule doit fournir les valeurs observées de la fonction. Mais assurément le physicien ou l'ingénieur qui utilise les formules d'inter-

polation, estime obtenir, pour les valeurs intermédiaires de la variable, des valeurs approchées de la fonction. En d'autres termes, il admet que la courbe empirique qu'il définit ne s'écartera pas beaucoup de la courbe réelle qu'il ne connaît pas.

Donc, aux yeux du praticien, l'interpolation est, en même temps, un procédé d'approximation. Mais, il faut le dire, l'obligation nouvelle de faire passer la courbe par des points donnés complique singulièrement le problème d'approximation.

2. Recherches de M. Runge. Formule de Lagrange. — Les premières recherches sur la convergence des formules d'interpolation paraissent dues à M. Runge : *Ueber empirische Functionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten* (*). L'étude porte sur la formule d'interpolation de Lagrange, et M. Runge suppose que l'on interpole les valeurs d'une fonction ANALYTIQUE donnée $f(x)$. Il montre que la convergence ou la divergence de la formule aux points intermédiaires dépend, en général, uniquement de la position des points critiques de la fonction par rapport au segment de l'axe réel sur lequel on interpole (**).

Quel que soit l'intérêt de ce travail au point de vue théorique, il intéresse peu le praticien. Pour lui, la formule de Lagrange présente un vice rédhibitoire qui

---

(*) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XLVI, 1901.

(**) La divergence de la formule de Lagrange a été établie également par M. E. BOREL (*Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, pp. 74-79. Paris, G. V., 1905).

doit la faire proscrire comme procédé d'approximation, dès que le nombre des valeurs données n'est plus très petit.

3. Défaut de la formule de Lagrange. — Le défaut de la formule de Lagrange est extrêmement grave et n'a peut-être pas attiré suffisamment l'attention. *Cette formule exagère, dans une proportion qui croît avec une rapidité extrême, l'importance des erreurs d'observation, à mesure que le nombre des valeurs données augmente.*

On sait qu'un polynôme de degré m est déterminé par ses valeurs en $m+1$ points, et ce polynôme s'exprime précisément par la formule de Lagrange. Mais si ce polynôme est théoriquement déterminé, il l'est dans les conditions pratiques les plus défectueuses, comme nous allons le montrer.

Soit à déterminer le polynôme de degré $m = 2n$ qui prend des valeurs données pour $2n+1$ valeurs de x *équidistantes* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$. Soit $f(x)$ ce polynôme, $f(\alpha_0), f(\alpha_1), \ldots$ les valeurs données que l'on appelle les *observations*. On a, par la formule de Lagrange,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2n} f(\alpha_i) P_i,$$

où P_i est un polynôme de degré $2n$ de forme connue. Nous allons montrer que certains de ces polynômes P peuvent prendre dans l'intervalle de l'interpolation des valeurs très rapidement croissantes avec n; d'où il suit qu'une erreur insignifiante sur $f(\alpha_i)$ peut changer complètement la valeur de $f(x)$.

Considérons, en effet, le polynôme du milieu P_n. Il a pour expression

$$\frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_{n+1})\cdots(x-\alpha_{2n})}{(\alpha_n-\alpha_0)(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})(\alpha_n-\alpha_{n+1})\cdots(\alpha_n-\alpha_{2n})}.$$

Soit h la différence constante des valeurs α; donnons à x la valeur médiane du premier intervalle :

$$x = \alpha_0 + \tfrac{1}{2}h.$$

Comme $\alpha_i - \alpha_k = (i-k)\,h$, on voit que h se détruit dans l'expression de P_n. Celle-ci sera, au signe près,

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-2)(\frac{1}{2}+n)\cdots(\frac{1}{2}+2n-1)}{1.2\ldots n.1.2\ldots n}.$$

ou encore

$$\frac{3.5.7\ldots(4n-1)}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2} = \frac{(4n)!}{2^{4n}(2n-1)(n!)^2(2n)!}.$$

La valeur asymptotique très approchée de cette expression, calculée par la formule de Stirling, est

$$P_n = \frac{2^{2n-\frac{1}{2}}}{n(2n-1)\pi}.$$

Déjà pour $n = 10$, ou pour 21 observations, le facteur P_n surpasse 1200. Donc, sans tenir compte de l'erreur possible sur les autres termes, l'erreur possible sur une seule des observations, celle du milieu, produit une incertitude 1200 fois plus grande sur les valeurs de la fonction dans le premier intervalle de l'interpolation. A supposer que les observations portent sur des longueurs mesurées au $^1/_{10}$ de millimètre, la fonction ne sera pas connue à 10 centimètres près dans cet intervalle.

4. Objet du mémoire. — Dans le mémoire actuel, nous laisserons donc de côté la formule de Lagrange et celle de Newton qui n'en est qu'une autre forme, et nous ne nous occuperons que de formules dépourvues de l'inconvénient qui précède.

Le mémoire est divisé en trois chapitres, consacrés, le premier à une *formule d'interpolation fondamentale;* le second à l'*interpolation trigonométrique;* le troisième à l'*interpolation parabolique*, c'est-à-dire par des polynômes. Il ne s'agira d'ailleurs que d'interpolation ENTRE ORDONNÉES ÉQUIDISTANTES : cette restriction s'impose pour l'étude de la convergence des formules.

J'appelle *fondamentale* la formule d'interpolation du premier chapitre, parce qu'elle sert de base dans l'étude des suivantes. Mais j'ignore si cette formule a jamais été employée ni même signalée. Elle ne figure pas dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, et je ne possède aucun renseignement bibliographique à son sujet.

Cette formule serait cependant d'une application pratique très commode. Elle est, en réalité, la plus simple de toutes et celle dont l'emploi exige le moins de calculs. Elle en exige infiniment moins que celle de Lagrange et, en même temps, elle est beaucoup plus rationnelle pour l'interpolation des résultats de l'expérience.

Cette formule n'est pas aussi éloignée de celle de Lagrange qu'elle pourrait le paraître à première vue : elle en est seulement un cas-limite. En effet, que l'on détermine, par la formule de Lagrange, le polynôme qui prend des valeurs données pour des valeurs données de x en progression arithmétique depuis a jusque b, et qui s'annule pour toutes les autres valeurs de x appartenant à la même progression et comprises entre $-N$ et $+N$;

ce polynôme a pour limite une fonction entière quand N tend vers l'infini; cette limite est notre formule d'interpolation fondamentale. Ce n'est d'ailleurs pas ainsi que nous avons été conduit à cette formule, et nous signalons la propriété précédente sans nous arrêter à la démontrer.

Dans l'étude que nous faisons de cette formule, nous nous proposons d'en chercher la limite ou, plus généralement, la valeur asymptotique quand les intervalles consécutifs d'interpolation se resserrent indéfiniment. C'est un problème analogue à celui de la convergence des séries de Fourier, mais plus complexe. On ne s'étonnera pas que nous n'en donnions pas la solution générale.

Pour arriver à un résultat, force nous est d'introduire des restrictions, mais elles ne nous feront pas sortir du domaine réel. C'est la notion de *fonction à variation bornée*, notion très féconde introduite par M. C. Jordan, qui jouera, dans tout notre mémoire, le rôle principal.

Chemin faisant, nous rencontrerons des théorèmes qui peuvent intéresser le praticien (n° 21). Ils le renseignent, en effet, sur le degré de confiance que mérite la formule d'interpolation quand elle est construite sur les données de l'expérience (n° 23).

Au point de vue de l'analyse, l'étude de la formule aux points de discontinuité de la fonction à interpoler ou de sa dérivée est particulièrement intéressante. Sur ce point, la formule d'interpolation se différencie nettement de celle de Fourier par la variété des circonstances qui se présentent.

Je ne sais si l'on a déjà remarqué que les formules d'interpolation trigonométrique ne sont, non plus, qu'un cas-limite de celle de Lagrange. Que l'on interpole, par

cette dernière formule, dans un intervalle indéfiniment croissant (— N, + N), une fonction périodique; si l'intervalle des valeurs successives de x est une partie aliquote de la période, on trouve à la limite les formules d'interpolation trigonométrique.

Quoi qu'il en soit, c'est par un procédé presque équivalent que les formules d'interpolation trigonométriques se rattachent à notre formule fondamentale.

Ces formules présentent deux formes distinctes suivant qu'on divise 2π en un nombre pair ou impair de parties; et nous attirons l'attention sur cette distinction qui passe généralement inaperçue, quand elle n'est pas ouvertement méconnue.

Tout ce que nous avons dit de la convergence de notre formule fondamentale est presque immédiatement applicable à l'interpolation trigonométrique.

Enfin, le troisième chapitre a pour objet de trouver une formule d'interpolation parabolique qui soit certainement convergente.

§ 2. — *Définitions et propositions générales relatives aux fonctions d'une variable réelle.*

Il est nécessaire de rappeler ou d'exposer ici un ensemble de définitions et de propositions générales qui trouveront leur application au cours de ce travail.

5. Variation totale. Fonctions à variation bornée. — La *variation totale* d'une fonction $\varphi(x)$ dans un intervalle (a, b) est la borne supérieure (finie ou infinie) de toutes les sommes

$$|\varphi(x_1) - \varphi(a)| + |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| + \ldots + |\varphi(b) - \varphi(x_n)|$$

que l'on peut former en prenant un système quelconque de points consécutifs $x_1, x_2, \ldots x_n$ intermédiaires entre a et b.

Les *fonctions à variation bornée* sont celles pour lesquelles cette limite est finie (*).

1° Il résulte d'abord de cette définition que la variation totale de $\varphi(x)$ dans une partie de l'intervalle (a, b) ne peut pas surpasser la variation totale dans l'intervalle (a, b).

2° Si une fonction $\varphi(x)$ a une variation totale M dans l'intervalle (a, b) et est constamment nulle hors de l'intervalle, elle sera à variation bornée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et sa variation totale, dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, sera évidemment

$$M + |\varphi(a)| + |\varphi(b)|.$$

3° Une fonction $\varphi(x)$ à variation bornée est la différence de deux fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ positives et non décroissantes dans l'intervalle (a, b).

La propriété précédente est démontrée dans les deux *Cours* mentionnés ci-dessous (*). Mais nous utiliserons aussi la suivante, qui n'y est pas énoncée sous cette forme :

4° *Une fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions positives et non décroissantes* $\psi_1(x)$ *et* $\psi_2(x)$, *qui sont, de plus, continues en tout point où* $f(x)$ *est elle-même continue.*

En effet, considérons l'ensemble de toutes les fonc-

(*) Voir le *Cours d'analyse* de C. Jordan, 2e édition, t. I, nos 67 et suivants. Paris, G. V.; ou bien mon *Cours d'analyse*, t. I, n° 298. Louvain, Uystpruyst, 1903.

tions positives et non décroissantes φ_1 et φ_2 qui satisfont à la condition

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Si, pour une valeur donnée de x, on fait tendre φ_1 vers sa limite inférieure $\psi_1(x)$, φ_2 tendra en même temps vers la sienne $\varphi_2(x)$. On aura donc

$$f(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x),$$

et les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont encore évidemment positives (ou nulles) et non décroissantes.

Je dis maintenant que si $f(x)$ est continue au point x, on a

$$\psi_1(x) = \psi_1(x-0), \qquad \psi_2(x) = \psi_2(x-0).$$

En effet, si cela n'était pas, $f(x)$ étant continue au point x, on aurait

$$f(x) = f(x-0) = \psi_1(x-0) - \psi_2(x-0),$$

et on pourrait remplacer $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ par les quantités plus petites $\psi_1(x-0)$ et $\psi_2(x-0)$; donc $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ ne seraient pas les limites inférieures supposées.

Donc les fonctions ψ sont continues à gauche du point x et l'on prouverait de même qu'elles sont continues à droite.

6. Fonction dont les nombres dérivés sont à variation bornée. — Soit $f(x)$ une fonction continue et h une quantité positive qui tend vers 0; la plus grande et la plus petite limite du quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

sont, par définition, les deux *nombres dérivés supérieur* et *inférieur à droite* au point x. Les deux *nombres dérivés à gauche* se définissent de même pour h négatif.

Supposons qu'une fonction $f(x)$ ait l'un de ses quatre nombres dérivés à variation bornée dans un intervalle donné, par exemple son *nombre dérivé supérieur à droite* $\Lambda(x)$. D'abord $\Lambda(x)$, étant la différence de deux fonctions qui varient sans décroître, a une limite $\Lambda(a-0)$ quand x tend vers a en croissant, et une limite $\Lambda(a+0)$ quand x tend vers a en décroissant. Ensuite $\Lambda(x)$, différence de deux fonctions intégrables, est intégrable. Mais on démontre très facilement que lorsqu'un nombre dérivé d'une fonction $f(x)$ est intégrable, son intégrale entre a et b est $f(b)-f(a)$ (*).

On a donc

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h \Lambda(a+h)\,dh;$$

par conséquent, par le théorème de la moyenne,

$$\lim_{h=0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\begin{cases}\Lambda(a+0), & \text{si } h>0;\\ \Lambda(a-0), & \text{si } h<0.\end{cases}$$

Il suit de là que $f(x)$ a des *dérivées à droite* et *à gauche* finies et déterminées en chaque point. Désignons-les par $f'(x,+0)$ et $f'(x,-0)$; la relation précédente montre que

$$f'(a,+0)=\Lambda(a+0),\qquad f'(a,-0)=\Lambda(a-0).$$

(*) Voir, par exemple, LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 80. Paris, G. V., 1904.

Donc l'une quelconque des deux dérivées au point x tend vers la *dérivée à droite* en a si x tend vers a en décroissant, vers la *dérivée à gauche* en a si x tend vers a en croissant. En conséquence, nous pouvons, sans ambiguïté, désigner les *dérivées à droite* et *à gauche* au point x par les notations (sans virgule)

$$f'(x+0), \qquad f'(x-0).$$

Donc, si une fonction a un nombre dérivé à variation bornée, on peut aussi dire qu' *elle a une dérivée à variation bornée;* en effet, elle possède des dérivées à droite et à gauche déterminées en chaque point et à variation bornée.

7. Variation totale dans l'intérieur d'un intervalle. — Nous appelons variation totale d'une fonction (x) DANS L'INTÉRIEUR d'un intervalle (a, b), la borne supérieure de la somme

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|+|\varphi(x_3)-\varphi(x_2)|+\cdots+|\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1})|$$

quand $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont un système *quelconque* de points consécutifs entre a et b, *ces deux limites exclues.*

8. Application au cas d'une fonction ayant une dérivée à variation bornée (n° 6). — Il importe de remarquer le théorème suivant :

Quand une fonction a une dérivée à variation bornée (n° 6), *ses deux dérivées à droite et à gauche ont la même variation totale* DANS L'INTÉRIEUR *d'un intervalle* (a, b).

En effet, supposons, par impossible, que la variation totale de l'une des deux dérivées, — celle à droite, par exemple, — soit plus grande que la variation de l'autre.

On peut alors trouver une somme

$$|f'(x_2+0)-f'(x_1+0)|+|f'(x_3+0)-f'(x_2+0)|+\cdots$$

suffisamment rapprochée de sa limite pour surpasser la variation totale de la dérivée à gauche. Donc, prenant ε positif et assez petit pour que $x_n+\varepsilon$ soit encore $< b$, cette somme surpassera la suivante, relative à la dérivée à gauche :

$$|f'(x_2+\varepsilon-0)-f'(x_1+\varepsilon-0)|+|f'(x_3+\varepsilon-0)-f'(x_2+\varepsilon-0)|+\cdots$$

Mais ceci est absurde, parce que la seconde somme est égale à la première pour ε infiniment petit.

Remarque. — Il résulte du théorème précédent que si une fonction a une dérivée à variation bornée dans un intervalle (a, b), on peut parler de la *variation totale de la dérivée* dans l'intérieur *de cet intervalle* sans avoir à préciser de laquelle des deux dérivées il s'agit.

9. Théorème. — *Soit* $f(\alpha)$ *une fonction de* α *ayant une dérivée à variation bornée dans un intervalle* (a, b), — *qui peut aussi s'étendre à l'infini, — et soit* x *un point fixe de cet intervalle; la fonction*

$$\varphi(\alpha)=\frac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x}$$

est aussi à variation bornée dans l'intervalle (a, b) *et sa variation totale dans cet intervalle ne surpasse pas la variation totale* V *de* $f'(\alpha)$ dans l'intérieur *du même intervalle.*

Soit $f'(\alpha)$ la dérivée (par exemple à droite) qui est

intégrable, puisqu'elle est à variation bornée; on a

$$f(\alpha) - f(x) = \int_x^\alpha f'(\alpha)d\alpha = \int_0^{\alpha-x} f'(x+t)dt,$$

$$= (\alpha - x)\int_0^1 f'[x + (\alpha - x)t]dt,$$

d'où

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 f'[x + (\alpha - x)t]dt.$$

Il vient donc, pour une succession quelconque de points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ entre a et b (limites non exclues) :

$$\sum_k |\varphi(\alpha_{k+1}) - \varphi(\alpha_k)|$$

$$< \int_0^1 dt \sum_k |f'(x - tx + \alpha_{k+1}t) - f'(x - tx + \alpha_k t)|.$$

Tous les points $x - tx + \alpha_k t$, pour $k = 1, 2, \ldots n$, sont consécutifs entre a et b (ces limites exclues) pour chaque valeur de t entre 0 et 1 (ces limites exclues). Donc, au second membre de cette dernière inégalité, la somme à intégrer est $< V$, et il vient

$$\sum_k |\varphi(\alpha_{k+1}) - \varphi(\alpha_k)| < \int_0^1 V dt = V.$$

§ 3. — *Deux lemmes d'un usage fréquent.*

10. Notations. — Soit h un nombre positif, qui pourra tendre vers 0. Posons, d'une manière générale,

$$\alpha_k = kh,$$

où k est un nombre entier qui peut prendre toutes les valeurs négatives, nulles ou positives.

Nous désignerons par

$$\sum_a^b \quad (a \text{ étant} < b)$$

une somme étendue à toutes les valeurs de α_k comprises entre a et b et rangées par ordre de grandeur. Il sera entendu que le point a peut entrer dans la somme si c'est un point α_k, mais que le point b en est toujours exclu. Ainsi on a, sans exception,

$$\sum_a^b = \sum_a^c + \sum_c^b.$$

Ceci posé, on a les deux lemmes suivants :

11. Lemme I. — *Soit* $\varphi(\alpha)$ *une fonction bornée et intégrable (au sens de Riemann) dans l'intervalle* (a, b); *la somme*

$$h \sum_a^b (-1)^k \varphi(\alpha_k)$$

tend vers 0 *avec* h.

En effet, soient Σ' et Σ'' les sommes étendues aux seules valeurs paires ou aux seules valeurs impaires de k respectivement; cette somme est la différence

$$\frac{1}{2}\sum_a^b{}'' \varphi(\alpha_k) 2h - \frac{1}{2}\sum_a^b{}' \varphi(\alpha_k) 2h$$

de deux autres qui tendent vers la même intégrale définie

$$\frac{1}{2}\int_a^b \varphi(\alpha) d\alpha.$$

Cette somme tend donc vers 0.

Remarque. — Dans les applications que nous aurons à faire de ce lemme, il arrivera que $\varphi(\alpha)$ est une fonction continue de α et d'un paramètre x, ou le produit d'une fonction $f(\alpha)$, satisfaisant aux conditions de l'énoncé, par une fonction $\omega(\alpha, x)$ uniformément continue de α et de x. Il est alors clair que les deux sommes accentuées tendent uniformément vers leur limite, et *la somme considérée dans l'énoncé du lemme tend uniformément vers* 0 *avec* h.

12. Lemme II. — *Soit* $\varphi(\alpha)$ *une fonction continue, ayant un nombre dérivé borné et intégrable (au sens de Riemann) dans l'intervalle* (a, b);

Considérons la somme

$$\sum_{0}^{h}(-1)^k \varphi(\alpha_k)$$

et soit r *l'indice du plus grand* α_k *qui est* $<$ a ; *cette somme aura pour valeur asymptotique quand* h *tend vers* 0 :

$$(-1)^{r-1}\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{2},$$

si le nombre des termes est pair;

$$(-1)^{r-1}\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2},$$

si le nombre des termes est impair.

Plus généralement, ce lemme subsiste, encore que la condition relative au nombre dérivé vienne à manquer en un nombre limité de points de l'intervalle (a, b), — *par exemple au point* a, — *pourvu que la fonction* $\varphi(\alpha)$ *soit continue et à variation bornée dans cet intervalle.*

Supposons, pour commencer, le nombre dérivé borné et intégrable dans tout l'intervalle. Si r est pair, la somme commence par un terme négatif, et si, de plus, le nombre des termes est pair, elle peut s'écrire

$$\sum_a^b \left[\varphi(\alpha_{2k+1}) - \varphi(\alpha_{2k}) \right].$$

Désignons, en abrégé, par φ' le nombre dérivé; et soit μ_{2k} une valeur moyenne de φ' dans l'intervalle $(\alpha_{2k}, \alpha_{2k}+1)$. La somme précédente peut s'écrire

$$\sum_a^b \mu_{2k} h = \tfrac{1}{2} \sum_a^b \mu_{2k} . 2h$$

quand h tend vers 0, cette somme tend vers

$$\frac{1}{2} \int_a^b \varphi'(\alpha) d\alpha = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2}$$

et, dans ce cas, le théorème est établi.

Si le nombre des termes était impair (r restant pair), il y aurait un dernier terme négatif à ajouter qui tend vers $-\varphi(b)$. La limite serait

$$-\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}.$$

Enfin, si r est impair, la somme commence par un terme positif et les résultats changent de signe.

Étendons maintenant la démonstration au cas où la condition relative au nombre dérivé vient à manquer au point a.

Soit ε un nombre positif arbitrairement petit. Décom-

posons la somme qui nous occupe en deux autres :

$$\sum_{a}^{a+\varepsilon} + \sum_{a+\varepsilon}^{b} (-1)^k \varphi(\alpha_k);$$

et choisissons ε de manière que la première qui est, au signe près,

$$\varphi(\alpha_{r+1}) - \varphi(\alpha_{r+2}) + \ldots - \varphi(\alpha_{r+2p}),$$

renferme (comme nous venons de l'écrire) un nombre pair de termes.

Je dis que cette première somme est aussi petite qu'on veut avec ε, quel que soit m.

En effet, φ étant la différence $\varphi_1 - \varphi_2$ de deux fonctions continues non décroissantes, on peut évidemment faire la démonstration en supposant que φ est une fonction continue non décroissante. Dans ce cas, la valeur absolue de cette première somme est moindre que $\varphi(\alpha_{r+2p}) - \varphi(\alpha_{r+1})$ et *a fortiori* que $\varphi(a+\varepsilon) - \varphi(a)$. Elle est donc infiniment petite avec ε.

Prenons donc ε infiniment petit; il nous suffira de chercher la valeur asymptotique de la seconde somme

$$\sum_{a+\varepsilon}^{b} (-1)^k \varphi(\alpha_k).$$

Pour celle-ci, la difficulté a disparu; sa valeur asymptotique sera donnée par l'énoncé du lemme, sauf que a est changée en $a+\varepsilon$ et r en $r+2p$ qui est de même parité. Mais ε étant infiniment petit, ces changements sont sans conséquence et peuvent être négligés. L'énoncé primitif subsiste.

Remarque. — Si $\varphi(\alpha)$ est une fonction uniformément

continue de α et d'un paramètre x, ou, comme le cas se rencontrera, le produit d'une fonction $f(\alpha)$, satisfaisant aux conditions du lemme, par une fonction uniformément continue de α et x, la somme $\Sigma\, \mu_{2k}\, 2h$ considérée ci-dessus tend uniformément (x variant) vers l'intégrale qui est sa limite. Donc, dans ce cas, *la différence entre la somme considérée dans l'énoncé du lemme et sa valeur asymptotique tend uniformément vers* 0 *quand* h *tend vers* 0.

CHAPITRE PREMIER

Formule d'interpolation fondamentale.

§ 1. — *Définition de la formule fondamentale d'interpolation* F(x).

13. Hypothèses sur la fonction à interpoler $f(x)$ **et notations.** — Nous désignerons par $f(x)$ la fonction qu'il s'agit d'interpoler dans un intervalle (a, b). Nous la supposerons *bornée* et *intégrable* au sens de Riemann dans cet intervalle.

Peu importe comment la fonction $f(x)$ se comporte en dehors de l'intervalle (a, b), mais pour faciliter l'écriture et les raisonnements, nous conviendrons une fois pour toutes que, dans tout le cours de ce premier chapitre, *la fonction* f(x) *sera considérée comme nulle en dehors de l'intervalle* (a, b). Cela bien entendu, nous ferons varier x de $-\infty$ à $+\infty$.

Nous supposerons que l'interpolation doit se faire entre des ordonnées équidistantes et que la différence

constante h des valeurs de x est égale à $\pi : m$. Nous poserons d'une manière générale :

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{m},$$

k pouvant prendre, dans la suite, toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

Nous ferons sur m deux hypothèses différentes : ou bien que m est un nombre entier positif n, ou bien que m est de la forme $n + \frac{1}{2}$, n étant encore entier et positif.

Nous désignerons, en général, par

$$\sum_a^b$$

une somme qui s'étend à toutes les valeurs de α_k comprises entre a et b (a pouvant entrer dans la somme, mais b en étant toujours exclu). De la sorte, on a toujours la relation

$$\sum_a^b = \sum_a^c + \sum_c^b.$$

14. Définition de $F(x)$. — On peut écrire immédiatement une formule d'interpolation très simple de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b); c'est la suivante :

$$F(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_a^b (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

On vérifie sans peine que c'est une formule d'interpolation dans les deux hypothèses faites sur m. A cet effet, on remarque la relation

$$(-1)^k \sin mx = \sin m(x - \alpha_k),$$

qui est vraie dans les deux hypothèses faites sur m au numéro précédent; et l'on constate que $F(x)$ coïncide avec $f(x)$ pour tous les points $x = \alpha_k$. De plus, la coïncidence subsiste pour les points α_k hors de (a, b), puisque $f(x)$ y est supposée nulle.

Cette formule n'a pas encore été utilisée à ma connaissance, mais elle pourrait l'être et, en tout cas, elle servira de point de départ pour l'étude des formules suivantes. Nous allons donc en faire une étude approfondie, nous proposant surtout de déterminer la valeur asymptotique de $F(x)$ et de sa dérivée, quand les points successifs α se rapprochent indéfiniment les uns des autres.

§ 2. *Convergence de* F(x).

15. Théorème I. — *Quelque petit que soit ε positif, les deux expressions*

$$F(x) \quad \text{et} \quad \frac{\sin mx}{m} \sum_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}$$

ont la même valeur asymptotique quand m *croît indéfiniment.*

Remarquons d'abord (n° 13) que x peut varier de $-\infty$ à $+\infty$, et que, $f(x)$ étant supposé nulle hors de (a, b), on peut écrire

$$F(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

Pour justifier le théorème, il suffit d'établir (puisque $\sin mx$ est < 1 en valeur absolue) que l'expression

$$\frac{1}{m} \sum_{x+\varepsilon}^{\infty} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}$$

et l'expression analogue de $-\infty$ à $x - \varepsilon$ ont pour limite 0. Il suffit évidemment de considérer la première.

Il n'y a lieu à démonstration que si $x + \varepsilon$ est $< b$ (sinon tous les termes sont nuls). L'expression se réduit alors à

$$\frac{1}{m}\sum_{x+\varepsilon}^{b}(-1)^k\,\varphi(\alpha_k),$$

en posant

$$\varphi(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{x-\alpha}.$$

Sa limite est donc nulle en vertu du lemme I (n° 11).

Si x varie, on remarquera, en outre, que, comme $1 : (x - \alpha)$ est une fonction *uniformément continue* tant que α est $> x + \varepsilon$, la convergence de l'expression considérée vers 0 sera *uniforme*.

16. Lemme. — *Quelque petit que soit le nombre positif fixe* ε, *on a*, m *tendant vers l'infini*,

$$1 = \lim \frac{\sin mr}{m}\sum_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{(-1)^k}{x-\alpha_k},$$

et la convergence est uniforme si x *varie.*

En effet, en se rappelant le développement de $1 : \sin x$ en série de fractions, on peut écrire

$$1 = \frac{\sin mx}{m}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x-\alpha_k}.$$

Tout revient donc à montrer que les deux séries négligées, dont il suffit de considérer l'une

$$\frac{\sin mx}{m}\sum_{x+\varepsilon}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x-\alpha_k},$$

tendent uniformément vers 0 quand m tend vers l'infini.

Ceci est apparent, car la série écrite est à termes de signes alternés et décroissants; elle est égale à une fraction de son premier terme, lequel est $<$ en valeur absolue que

$$\frac{1}{m\varepsilon}.$$

17. Théorème II. — *La fonction* F(x) *a pour limite* f(x) *en tout point* x *où la fonction* f(x) *a une dérivée finie, ou même, plus généralement, ses nombres dérivés finis, c'est-à-dire en tout point où le rapport*

$$\varphi(\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x}$$

est borné quand α *tend vers* 0.

Multiplions par $f(x)$ l'équation du lemme précédent et soustrayons-la de celle qu'exprime le théorème I. Il viendra

$$\lim F(x) - f(x) = \lim \frac{\sin mx}{m} \sum_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (-1)^k \frac{f(\alpha_k) - f(x)}{x - \alpha_k}.$$

Pour établir le théorème, il faut montrer qu'au second membre la limite est nulle; c'est-à-dire que la somme

$$\frac{1}{m} \sum_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} (-1)^k \frac{f(\alpha) - f(x)}{x - \alpha_k}$$

a pour limite 0. Mais c'est la conséquence du lemme I (n° 11), car, en posant

$$\varphi(\alpha) = \frac{f(\alpha_k) - f(x)}{x - \alpha},$$

elle se met sous la forme

$$\frac{1}{m}\sum_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}(-1)^k\varphi(\alpha_k),$$

la fonction $\varphi(\alpha)$ étant bornée et intégrable.

18. Théorème III. — *Quand* m *tend vers l'infini,* F(x) *a pour limite* f(x) *au point* x, *si* f(x) *est continue en ce point et à variation bornée dans l'intervalle si petit qu'il soit* $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Reportons-nous à la première équation de la démonstration précédente. Il faut montrer encore que la limite est nulle au second membre. Il faut donc établir que l'expression

$$S=\frac{\sin mx}{m}\sum_{x}^{x+\varepsilon}(-1)^k\frac{f(\alpha_k)-f(x)}{x-\alpha_k}$$

et l'expression analogue étendue de $x-\varepsilon$ à x ont pour limite 0. Il suffit de considérer la première. Comme d'ailleurs on peut supposer ε arbitrairement petit, il suffit d'établir que S est aussi petit qu'on veut avec ε, quel que soit m.

La fonction f à variation bornée est la différence de deux fonctions non décroissantes et continues aux mêmes points que f(n° 5, 4°). Comme la démonstration, supposée faite pour deux fonctions f_1 et f_2, s'appliquera à leur différence, nous pouvons admettre tout de suite que *la fonction considérée* f(x) *n'est jamais décroissante.*

Décomposons alors S comme il suit :

$$S=\frac{\sin mx}{m}\sum_{x}^{x+\varepsilon}(-1)^k\frac{f(x+\varepsilon)-f(\alpha_k)}{x-\alpha_k}$$

$$-\frac{\sin mx}{m}[f(x+\varepsilon)-f(x)]\sum_{x}^{x+\varepsilon}\frac{(-1)^k}{x-\alpha_k}.$$

Chacune de ces deux sommes Σ est à termes de signes alternés et décroissants : elles sont donc respectivement égales à une fraction de leur premier terme. Donc chacun des deux termes dans lesquels nous venons de décomposer S a sa valeur absolue inférieure à celle de l'expression

$$\frac{\sin mx}{m}[f(x+\varepsilon)-f(x)]\frac{1}{x-\alpha_k}$$

et, par conséquent, inférieure à

$$f(x+\varepsilon)-f(x),$$

car

$$\left|\frac{\sin mx}{m}\frac{1}{x-\alpha_k}\right| = \left|\frac{\sin m(x-\alpha_k)}{m(x-\alpha_k)}\right| \leqslant 1.$$

Donc S est aussi petit que l'on veut avec ε quel que soit m, car, $f(x)$ étant continue au point x, $f(x+\varepsilon)-f(x)$ tend vers 0 avec ε.

19. Théorème IV. — *Si la fonction* f(x) *est continue et à variation bornée dans l'intervalle* (a, b) *et s'annule, de plus, aux deux limites* a *et* b, *la fonction* F(x) *convergera uniformément vers* f(x), *pour toutes les valeurs de* x *de* $-\infty$ *à* $+\infty$, *quand* m *tendra vers l'infini.*

En effet, $f(x)$, qui est supposée nulle hors de (a, b), est alors une fonction uniformément continue pour toutes les valeurs de x. Dans ce cas, les expressions dont nous avons démontré que la limite est nulle dans le numéro précédent, convergent uniformément vers cette limite, ce qui prouve le théorème.

Remarque. — Si $f(x)$ est continue et à variation bornée

dans l'intervalle (a, b), mais ne s'annule pas aux limites a et b, la convergence de $F(x)$ restera uniforme dans tout intervalle ne contenant ni a ni b. Mais cette uniformité disparaîtra aux environs des points a et b (qui sont des points de discontinuité pour $f(x)$ considérée comme nulle hors de l'intervalle ab).

Remarquons encore que, quel que soit $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ étant supposée nulle hors de cet intervalle, la fonction $F(x)$ converge vers 0 en tout point x extérieur à l'intervalle (a, b), et la convergence est uniforme si x varie sans tendre ni vers a ni vers b.

Enfin, plus généralement encore, $F(x)$ convergera uniformément vers $f(x)$ dans tout intervalle intérieur à un autre dans lequel $f(x)$ est continue et à variation bornée.

20. Rapidité de convergence de $F(x)$. — La rapidité plus ou moins grande avec laquelle $F(x)$ converge vers $f(x)$ quand m croît, tient à la nature de $f(x)$. On ne peut obtenir de résultat simple et pratique qu'à la condition d'introduire des hypothèses plus particulières. A ce point de vue, il convient de considérer les fonctions dont la dérivée est à variation bornée (n° 6). Le cas où $f(x)$ est l'ordonnée d'une ligne polygonale rentre dans cette hypothèse. Pour ces fonctions-là, on peut énoncer le théorème suivant :

21. Théorème V. — *Soit* $f(x)$ *une fonction continue dans l'intervalle* (a, b) *et qui s'annule aux deux limites* a *et* b. *Supposons qu'elle ait une dérivée à variation bornée, et que la variation totale de cette dérivée* DANS L'INTÉRIEUR

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] les deux premières équations rencontrées dans les démonstrations des nos 15 et 16 respectivement. Il viendra

$$V(x) - f(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \varphi(\alpha_k),$$

en posant, en abrégé,

$$\varphi(\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(x)}{x - \alpha}.$$

On peut écrire aussi

$$V(x) - f(x) = \frac{\sin mx}{2m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k [\varphi(\alpha_k) - \varphi(\alpha_{k-1})].$$

La somme $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\alpha_k) - \varphi(\alpha_{k-1})|$ ne surpasse pas la variation totale de $\varphi(\alpha)$ dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; donc elle ne surpasse pas non plus celle de $f'(\alpha)$ dans le même

intervalle (n° 9). Cette variation totale étant $V + \mu$, le théorème est établi.

22. Comparaison de $F(x)$ avec l'ordonnée du polygone inscrit dans la courbe $y = f(x)$. — Considérons la courbe plane définie, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$y = f(x),$$

laquelle coïncide donc avec l'axe des x hors de l'intervalle (a, b).

Marquons sur la courbe les points consécutifs d'abscisses α_k et inscrivons dans la courbe le polygone P qui a ces points pour sommets. Ce polygone se confondra aussi avec l'axe des x dans tous les intervalles de deux points consécutifs α_k extérieurs à l'intervalle (a, b).

Soit $f_1(x)$ l'ordonnée de ce polygone et V_1 la variation totale du coefficient angulaire quand on parcourt tous les côtés du polygone (de sorte que ce coefficient part de 0 pour revenir à 0).

Ceci posé, remarquons que la définition de $F(x)$ est la même relativement à $f_1(x)$ que relativement à $f(x)$. On peut donc appliquer le théorème précédent en remplaçant $f(x)$ par $f_1(x)$ et, par suite, $V + \mu$ par V_1. On a donc, quel que soit x,

$$\left| F(x) - f_1(x) \right| < \frac{V_1}{2m} \left| \sin mx \right|.$$

Cette relation nous fournit une limite de l'écart entre la courbe d'interpolation $y = F(x)$ et le polygone inscrit.

23. Application au cas où les données sont fournies par l'observation. — Quand les valeurs de $f(x)$ aux points α_k de l'intervalle (a, b) sont fournies par l'observation, la formule

$$y = F(x)$$

est une formule d'interpolation empirique. La remarque du numéro précédent permet de décider facilement dans quel cas elle peut être employée avec sécurité.

En effet, on peut construire le polygone P et calculer la variation totale du coefficient angulaire sur ce polygone (de 0 à 0). Soit V_1 cette variation totale. Pour que la formule empirique soit acceptable, il faut que la courbe qu'elle définit ne s'écarte pas trop du polygone P. On peut s'en assurer par la formule qui termine le numéro précédent.

Si l'on trouvait un écart trop grand, on pourrait améliorer la formule sans nouvelles observations. Il suffirait d'intercaler de nouveaux points de subdivision entre les α_k et de faire coïncider $F(x)$ avec l'ordonnée du polygone P en ces nouveaux points. La variation totale V_1 ne changeant pas, la courbe et le polygone se rapprocheront autant qu'on le voudra en prenant m suffisamment grand.

Enfin c'est le moment de faire remarquer que la formule d'interpolation $F(x)$ a sur celle de Lagrange l'immense avantage de réduire au minimum l'influence des erreurs d'observation. En effet, dans notre formule, chaque observation $f(\alpha_k)$ est multipliée par une quantité, qui est égale à 1 au point α_k, mais < 1 en valeur absolue partout ailleurs et dont la valeur moyenne décroît à mesure que l'on s'écarte du point α_k.

§ 3. — *Valeur asymptotique de* F(x) *en un point de discontinuité de* f(x).

24. Hypothèse sur $f(x)$. — Pour pouvoir déterminer la valeur asymptotique de $F(x)$ en un point de discontinuité x, il faut faire des hypothèses.

Nous supposerons $f(x)$ *à variation bornée* dans un intervalle suffisamment petit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contenant x.

Une fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions non décroissantes. Comme les formules que nous allons obtenir, étant établies pour deux fonctions, subsistent pour leur différence, nous pouvons admettre tout de suite, dans les démonstrations, que *la fonction* f(x) *est non décroissante.*

Nous représenterons encore par $f(x \pm 0)$ les limites toujours existantes de $f(x + h)$ quand h tend vers 0 par des valeurs positives ou par des valeurs négatives.

D'après le théorème I (n° 15), la valeur asymptotique de $F(x)$ pour m infini est la même que celle de l'expression

$$\frac{\sin mx}{m} \sum_{n-\varepsilon}^{n+\varepsilon} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k},$$

dans laquelle ε désigne une constante arbitrairement petite.

Nous allons donc calculer cette valeur asymptotique.

Si x coïncide avec un point α_k, on sait que $F(x) = f(\alpha_k)$. Nous devons donc seulement considérer le cas où x est distinct des points α_k.

25. Calcul de la valeur asymptotique de $F(x)$. — L'expression précédente se décompose en deux autres S_1 et S_2, à savoir :

$$S_1 = \frac{\sin mx}{m} \sum_{x}^{x+\varepsilon} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k},$$

$$S_2 = \frac{\sin mx}{m} \sum_{x-\varepsilon}^{x} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

Cherchons d'abord la valeur asymptotique de S_1. Pour cela, mettons S_1 sous la forme

$$f(x+\varepsilon) \frac{\sin mx}{m} \sum_{x}^{x+\varepsilon} \frac{(-1)^k}{x - \alpha_k} - \frac{\sin mx}{m} \sum_{x}^{x+\varepsilon} (-1)^k \frac{f(x+\varepsilon) - f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

Cette dernière somme Σ est à termes de signes alternés et décroissants (car on suppose f non décroissant); elle est donc égale à une fraction de son premier terme, et l'on a, en valeur absolue,

$$\frac{\sin mx}{m} \sum_{x}^{x+\varepsilon} (-1)^k \frac{f(x+\varepsilon) - f(\alpha_k)}{x - \alpha_k} < \frac{\sin m(x - \alpha_k)}{m(x - \alpha_k)} [f(x+\varepsilon)$$
$$- f(x+0)] < f(x+\varepsilon) - f(x+0).$$

Cette expression est aussi petite que l'on veut avec ε, quel que soit m. On peut la négliger en faisant ε infiniment petit, auquel cas la valeur asymptotique de S_1 se réduit à celle de

$$f(x+0) \frac{\sin mx}{m} \sum_{x}^{x+\varepsilon} \frac{(-1)^k}{x - \alpha_k}.$$

De même, la valeur asymptotique de S_2 sera celle de

$$f(x-0) \frac{\sin mx}{m} \sum_{x-\varepsilon}^{x} \frac{(-1)^k}{x - \alpha_k}.$$

Supposons que x tombe entre α_r et α_{r+1}; on aura

$$\frac{r\pi}{m} < x < \frac{r+1}{m}\pi,$$

d'où

$$r < \frac{mx}{\pi} < r+1.$$

Posons

$$\frac{mx}{\pi} - r = \xi \qquad 1 + r - \frac{mx}{\pi} = 1 - \xi$$

$$(0 < \xi < 1)$$

il viendra

$$\frac{\pi}{m}\sum_{\pi}^{\pi+\infty}\frac{(-1)^k}{x-\alpha_k} = (-1)^r\left[\frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{1-\xi+1} + \frac{1}{1-\xi+2} - \cdots\right]$$

$$\frac{\pi}{m}\sum_{x-\infty}^{x}\frac{(-1)^k}{x-\alpha_k} = (-1)^r\left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{1}{\xi+2} - \cdots\right]$$

et les séries deviennent illimitées quand m tend vers l'infini.

Remarquons encore que l'on a

$$\sin mx = \sin(\pi r + \xi) = (-1)^r \sin\xi.$$

On voit que la valeur asymptotique de S_1 sera

$$f(x+0)\frac{\sin\pi\xi}{\pi}\left[\frac{1}{1-\xi} - \frac{1}{1-\xi+1} + \frac{1}{1-\xi+2} - \cdots\right]$$

et celle de S_2

$$f(x-0)\frac{\sin\pi\xi}{\pi}\left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi+1} + \frac{1}{\xi+2} - \cdots\right]$$

où les séries sont illimitées.

Donc la valeur asymptotique de $F(x)$, qui est la somme de celles de S_1 et de S_2, sera

$$f(x-0)\psi(\xi)+f(x+0)\psi(1-\xi),$$

en désignant par $\psi(\xi)$ la fonction

$$\psi(\xi)=\frac{\sin\pi\xi}{\pi}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi+1}+\frac{1}{\xi+2}-\ldots\right).$$

26. Propriétés de la fonction $\psi(\xi)$. — Le paramètre ξ est compris entre 0 et 1.

Si l'on observe que l'on a

$$\int_0^1\frac{t^{\xi-1}dt}{1+t}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 t^{\xi-1}(-t)^k dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\xi+k},$$

on voit que $\psi(\xi)$ *se met sous forme d'intégrale définie :*

$$\psi(\xi)=\frac{\sin\pi\xi}{\pi}\int_0^1\frac{t^{\xi-1}dt}{1+t}.$$

On a donc aussi

$$\psi(1-\xi)=\frac{\sin\pi\xi}{\pi}\int_0^1\frac{t^{-\xi}dt}{1+t}=\frac{\sin\pi\xi}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{t^{\xi-1}dt}{1+t}.$$

De là, la relation

$$\psi(\xi)+\psi(1-\xi)=\frac{\sin\pi\xi}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\xi-1}dt}{1+t}=1.$$

Les deux quantités $\psi(\xi)$ *et* $\psi(1-\xi)$ *étant positives et ayant pour somme l'unité, sont donc deux fractions complémentaires l'une de l'autre.*

Il y a lieu d'observer les valeurs particulières

$$\psi(0) = 1, \qquad \psi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}, \qquad \psi(1) = 0.$$

La fonction $\psi(\xi)$ DÉCROÎT CONSTAMMENT *de* 1 à 0 *quand* ξ *varie de* 0 *à* 1. — En effet, quand ξ varie de $\frac{1}{2}$ à 1, la fonction $\psi(\xi)$ est le produit de deux fonctions décroissantes :

$$\sin \pi\xi \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{t^{\xi-1}dt}{1+t}$$

et le cas où ξ varie de 0 à $\frac{1}{2}$ se ramène au précédent puisque les valeurs de $\psi(\xi)$ et $\psi(1-\xi)$ sont complémentaires.

Des deux numéros précédents, on peut donc conclure le théorème suivant :

27. Théorème VI. — *En un point de discontinuité de* $f(x)$ *aux environs duquel cette fonction est à variation bornée et qui n'est pas un point* α_k, *la valeur asymptotique de* $F(x)$ *pour* $m = \infty$ *est intermédiaire entre* $f(x-0)$ *et* $f(x+0)$. *Elle a pour expression*

$$f(x-0)\psi(\xi) + f(x+0)\psi(1-\xi),$$

où ξ *désigne la partie fractionnaire positive de* $\frac{mx}{\pi}$ *et* $\psi(\xi)$ *l'intégrale*

$$\psi(\xi) = \frac{\sin \pi\xi}{\pi} \int_0^1 \frac{t^{\xi-1}dt}{1+t}.$$

REMARQUE. — Si x est commensurable avec π, ξ ne peut avoir qu'un nombre limité de valeurs différentes

et $F(x)$ ne peut avoir qu'un nombre limité de *valeurs-limites* distinctes quand m tend vers l'infini.

Au contraire, si x est incommensurable avec π, ξ peut tendre vers n'importe quelle valeur entre 0 et 1, $\psi(\xi)$ également. On peut donc, en faisant tendre convenablement m vers l'infini, assigner à $F(x)$ telle *valeur-limite* que l'on veut entre $f(x-0)$ et $f(x+0)$.

Enfin, on peut encore remarquer que la formule asymptotique trouvée assigne une influence prépondérante aux valeurs de $f(x)$ du côté du point α_k le plus rapproché du point x, ce qui paraîtra assez naturel.

§ 4. — *Étude de la somme*

$$S = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{f(x) - f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

38. Hypothèses sur $f(x)$. — Il est nécessaire de passer par l'étude de cette somme S pour trouver la valeur asymptotique de la dérivée de $F(x)$.

Nous supposerons, comme dans tout ce qui précède, que $f(x)$ s'annule en dehors de l'intervalle (a, b). Mais nous ajouterons des hypothèses spéciales :

1° La fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et s'annule aux deux limites a et b. Cette dernière condition est évidemment nécessaire pour que la fonction soit continue pour toutes les valeurs de x de $-\infty$ à $+\infty$;

2° La fonction $f(x)$ a une dérivée à variation bornée (n° 6) dans l'intervalle (a, b). Cette dérivée, étant nulle hors de (a, b), sera donc encore à variation bornée dans l'intervalle de $-\infty$ à $+\infty$.

Il y a deux cas à distinguer dans la détermination de

la limite de S pour $m = \infty$: 1° x n'est pas un point α_k; 2° x est un point α_k.

29. Limite de S pour x différent de α_k. — Décomposons d'abord la somme S en deux autres :

$$S' = \sum_{-\infty}^{x} \qquad S'' = \sum_{x}^{\infty} (-1)^k \frac{f(x) - f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

Considérons la somme S''. En désignant par N un nombre $> x$ et aussi $> b$ (donc au delà duquel $f(x)$ s'annule), on peut décomposer S'' dans les deux sommes

$$\sigma_1 = \sum_{x}^{N} (-1)^k \frac{f(x) - f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}, \qquad \sigma_2 = f(x) \sum_{N}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x - \alpha_k}.$$

La série σ_2 est à termes de signes alternés et constamment décroissants, elle est donc inférieure en valeur absolue à son premier terme et *a fortiori* à $f(x) : (N - x)$; elle est donc aussi petite que l'on veut quel que soit m en prenant N assez grand. Nous pouvons donc la négliger *à la condition de faire* N *infiniment grand.*

La limite de S'' pour m infini est alors celle de σ_1, qui peut s'écrire

$$\sigma_1 = \sum_{x}^{N} (-1)^k \varphi(\alpha_k),$$

en posant, pour $\alpha > x$,

$$\varphi(\alpha) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

Comme $f(x)$ a, par hypothèse, une dérivée à variation

bornée, $\varphi(\alpha)$ est une fonction continue à variation bornée dans l'intervalle (x, N) (n° 9). De plus, cette fonction a (sauf au point a) une dérivée finie et intégrable en même temps que $f(\alpha)$. Nous pouvons donc appliquer à σ_1 le lemme II du n° 12. En désignant par r l'indice du plus grand $\alpha_k < a$, on aura

$$\lim \sigma_1 = (-1)^{r-1} \frac{\varphi(x) \pm \varphi(N)}{2}.$$

Mais, comme N est infiniment grand, $\varphi(N)$ est infiniment petit et peut être négligé, et $\varphi(x)$ est la limite, quand α tend vers x en décroissant, de

$$\frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x},$$

c'est-à-dire $f'(x + 0)$. Il vient donc

$$\lim S'' = \tfrac{1}{2}(-1)^{r-1} f'(x + 0).$$

La limite de S' se ramène à la précédente par un changement de signe. Donc, $r + 1$ étant l'indice du premier α_k qui suit x, on aura

$$\lim S' = \tfrac{1}{2}(-1)^r f'(x - 0).$$

Concluons donc. On a

$$\lim S = (-1)^{r-1} \frac{f'(x + 0) - f'(x - 0)}{2} \quad (\alpha_r < x < \alpha_r + 1).$$

En particulier, si les dérivées à gauche et à droite sont égales au point x, $\lim S = 0$.

20. Limite de S quand $x = \alpha_r$. — Dans ce cas-

là, il doit être entendu que le point α_r est exclu de la sommation dans l'expression

$$S = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{f(x) - f(\alpha_k)}{x - \alpha_k},$$

sinon il y aurait un terme indéterminé.

On peut, pour déterminer la limite de S, reproduire l'analyse précédente. La seule différence sera que les indices $(r - 1)$ et $(r + 1)$ des deux points qui précèdent et suivent x seront de même parité.

On aura donc

$$\lim S = (-1)^{r-1} \frac{f'(x + 0) + f'(x - 0)}{2}.$$

§ 5. — *Dérivée de* F(x).

31. Transformation de $F'(x)$. — Nous conserverons dans ce paragraphe les hypothèses faites sur $f(x)$ dans le paragraphe précédent (n° 28). Il est donc supposé que $f(x)$ s'annule aux deux limites a et b et a une dérivée à variation bornée (n° 6) dans l'intervalle (a, b).

Dérivons la formule

$$F(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k},$$

ce qui se fait sans difficulté, car il n'y a qu'un nombre limité de termes différents de 0. Il vient

$$F'(x) = \cos mx \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}$$
$$- \frac{\sin mx}{m} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{(x - \alpha_k)^2}.$$

Mais, d'autre part, en dérivant l'identité

$$1 = \frac{\sin mx}{m} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x - \alpha_k},$$

il vient

$$0 = \cos mx \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x - \alpha_k} - \frac{\sin mx}{m} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(x - \alpha^k)^2}.$$

Multiplions par $f(x)$ et soustrayons; il vient

$$F'(x) = \cos mx \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{f(\alpha_k) - f(x)}{x - \alpha_k}$$

$$+ \frac{\sin mx}{m} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{f(x) - f(\alpha_k)}{(x - \alpha_k)^2}.$$

Les valeurs asymptotiques de chacun de ces deux termes pour $m = \infty$ résultent de l'analyse faite dans les paragraphes précédents. Mais il y a deux cas à distinguer suivant que x coïncide ou non avec un point α_k.

32. Premier cas : x différent des α_k. — Posons, comme au n° 25,

$$\frac{mx}{\pi} = r + \xi \left\{ \begin{array}{l} r \text{ entier}, \\ 0 < \xi < 1 \end{array} \right..$$

Il viendra, S étant la somme étudiée au § précédent, l'égalité asymptotique

$$\cos mx \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{f(\alpha_k) - f(x)}{x - \alpha_k} = (-1)^r \cos \pi\xi \,(-S)$$

$$= \cos \pi\xi \, \frac{f'(x+0) - f'(x-0)}{2}.$$

D'autre part, en posant

$$\varphi(\alpha) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha},$$

le terme d'en dessous dans l'expression de $F'(x)$ qui termine le dernier numéro, peut s'écrire

$$\frac{\sin mx}{m} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

Or $\varphi(\alpha)$ est (en même temps que f', n° 9) une fonction à variation bornée et l'on a

$$\varphi(x - 0) = f'(x - 0), \qquad \varphi(x + 0) = f'(x + 0).$$

Donc la valeur asymptotique de l'expression précédente est fournie par le théorème VI (n° 27); c'est

$$f'(x - 0)\,\psi(\xi) + f'(x + 0)\,\psi(1 - \xi).$$

En définitive, la valeur asymptotique de $F'(x)$ sera la somme des deux expressions que nous venons de calculer, à savoir

$$f'(x - 0)\,\theta(\xi) + f'(x + 0)\,\theta(1 - \xi),$$

en posant, pour simplifier,

$$\theta(\xi) = \psi(\xi) - \tfrac{1}{2}\cos\pi\xi$$

$$= \frac{\sin\pi\xi}{\pi}\int_0^1 \frac{t^{\xi-1}dt}{1+t} - \frac{\cos\pi\xi}{2}.$$

On a donc encore

$$\theta(\xi) + \theta(1 - \xi) = \psi(\xi) + \psi(1 - \xi) = 1.$$

Donc, en particulier, si $f(x)$ a une dérivée unique au point x, $F'(x)$ a pour limite $f'(x)$.

33. Deuxième cas : $x = \alpha_r$. — Dans ce cas, les termes qui contiennent α_r dans l'expression de $F'(x)$ qui termine le n° 31, peuvent se réunir sous la forme

$$[f(\alpha_r) - f(x)]\left[\frac{\cos m(x-\alpha_r)}{x-\alpha_r} - \frac{\sin m(x-\alpha_r)}{m(x-\alpha_r)}\right]$$

et les deux facteurs s'annulent pour $x = \alpha_r$.

Supprimons donc ces termes-là dans l'expression de $F'(x)$ ainsi que tous les autres termes qui contiennent $\sin mx$ en facteur et s'annulent pour $x = \alpha_r$; il reste (pour $x = \alpha_r$) :

$$F'(x) = \cos mx \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{f(\alpha_k) - f(x)}{x - \alpha_k},$$

le point $\alpha_k = x$ étant maintenant exclu de la sommation. Le calcul de la limite de cette somme a été fait au n° 30 et nous donne

$$\lim F'(x) = \frac{f'(x-0) + f'(x+0)}{2}.$$

Donc, *quand* x *est un point* α_k, $F'(x)$ *a pour limite la dérivée moyenne.*

Comme conclusion du § actuel, nous pouvons donc déjà énoncer le théorème suivant :

34. Théorème VII. — *Si* $f(x)$ *est une fonction continue qui s'annule aux points* a *et* b *et qui a une dérivée à variation bornée* (n° 6), $F'(x)$ *converge vers* $f'(x)$ *en tout point où cette dérivée est unique.*

On remarquera, de plus, que la démonstration même que nous avons donnée prouve que *la convergence est uniforme dans tout intervalle intérieur à un autre où* $f'(x)$

est continue (on suppose $f'(x)$ à variation bornée). Mais pour que la dérivée soit continue aux deux points a et b, il faut qu'elle y soit nulle, puisqu'elle est nulle hors de (a, b).

Nous considérons comme inutile d'entrer dans le détail de cette démonstration.

Pour discuter complètement les points de discontinuité de la dérivée, il faut étudier de plus près la fonction $\theta(\xi)$.

§ 6. — *Dérivée de* F(x) *en un point de discontinuité de* f'(x). *Étude de la fonction* $\theta(\xi)$.

35. Transformation de $\theta(\xi)$. — $\theta(\xi)$ a été défini (n° 32) par la formule $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$

$$\theta(\xi) = \frac{\sin \pi\xi}{\pi} \int_0^1 \frac{x^{\xi-1}dx}{1+x} - \frac{\cos \pi\xi}{2}.$$

On en conclut directement

$$\theta(0) = \theta(\tfrac{1}{2}) = \theta(1) = \tfrac{1}{2}.$$

Sous la forme précédente, $\theta(\xi)$ est la différence de deux fonctions décroissantes quand ξ va de 0 à 1, et on n'aperçoit pas clairement comment $\theta(\xi)$ varie, ni quel est son signe. Nous allons donc transformer son expression.

Changeons ξ en $u + \frac{1}{2}$ et x en x^2; il vient

$$\theta(\tfrac{1}{2} + u) = \frac{2 \cos \pi u}{\pi} \int_0^1 \frac{x^{2u}dx}{1+x^2} + \frac{\sin \pi u}{2}.$$

Soustrayons de cela

$$0 = \cos \pi u \left[\frac{2}{\pi} \int_0 \frac{dx}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \right];$$

il vient

$$\theta(\tfrac{1}{2} + u) = \frac{\sin \pi u + \cos \pi u}{2} - \frac{2 \cos \pi u}{\pi} \int_0^1 \frac{1 - x^{2u}}{1 + x^2} du,$$

ou encore

$$\theta(\tfrac{1}{2} + u) = \tfrac{1}{2} + \frac{\sin \pi u - (1 - \cos \pi u)}{2} - \frac{2 \cos \pi u}{\pi} \int_0^1 \frac{1 - x^{2u}}{1 + x^2} dx.$$

Substituons les valeurs

$$\frac{\sin \pi u - (1 - \cos \pi u)}{2} = \frac{\sin \pi u}{2} \left(\cos \frac{\pi u}{2} - \sin \frac{\pi u}{2} \right)$$

$$= \frac{\sin \pi u}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi u}{2} \right)$$

$$\cos \pi u = \left(\cos \frac{\pi u}{2} + \sin \frac{\pi u}{2} \right) \left(\cos \frac{\pi u}{2} - \sin \frac{\pi u}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi u}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi u}{2} \right)$$

et posons, en abrégé,

$$k = \frac{1}{u} \sin \frac{\pi u}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi u} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi u}{2} \right) \int_0^1 \frac{1 - x^{2u}}{1 + x^2} dx,$$

il viendra

$$\theta(\tfrac{1}{2} + u) = \tfrac{1}{2} - ku\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi u}{2} \right).$$

36. Valeur approchée de k. — L'évaluation de θ est ramenée par la formule précédente à celle de k. Nous allons voir que *k reste toujours voisin de l'unité quand* u *varie de* 0 à $\frac{1}{2}$.

Évaluons d'abord l'intégrale. En y remplaçant $\frac{1}{1+x^2}$ par $\sum_n (-x^2)^n$, on a

$$\int_0^1 \frac{1-x^{2u}}{1+x^2}dx = 2u\left[\frac{1}{1+2u} - \frac{1}{3(3+2u)} + \frac{1}{5(5+2u)} - \cdots\right]$$

$$= \frac{2u}{1+2u}\left[1 - \frac{1+2u}{3(3+2u)} + \frac{1+2u}{5(5+2u)} - \cdots\right]$$

Quand u varie de 0 à $\frac{1}{2}$, ce dernier crochet diminue (on voit immédiatement que sa dérivée est négative); il est donc compris entre ses valeurs pour $u=0$ et $u=\frac{1}{2}$, savoir :

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = 0{,}934\cdots$$

$$1 - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.5} - \cdots = 2\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} - \log 2 = 0{,}8777\cdots$$

On peut donc poser

$$\int_0^1 \frac{1-x^{2u}}{1+x^2}dx = \frac{2u}{1+2u}\mu,$$

où μ décroît lentement de 0,934... à 0,8777... quand u varie de 0 à $\frac{1}{2}$. Portant cette expression dans k, il vient

$$2k = \pi\frac{\sin\frac{\pi u}{2}}{\left(\frac{\pi u}{2}\right)} - \mu\sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi u}{2}\right)}{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi u}{2}}.$$

L'erreur commise sur μ en lui attribuant sa valeur moyenne 0,906 sera inférieure à 0,0281, et celle sur k sera inférieure à 0,018.

Attribuons à μ cette valeur moyenne et posons encore

$$t = \frac{\pi u}{2}, \qquad h = \frac{\mu\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}410;$$

nous aurons

$$k = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin t}{t} - h\,\frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{t + \frac{\pi}{4}}\right).$$

C'est une expression approchée de k qu'il est commode de considérer. Pour les valeurs extrêmes $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$, elle donne

$$k = \frac{\pi}{2} - h\sqrt{2} = 0{,}9915,$$

$$k = \sqrt{2} - h = 1{,}003.$$

Pour nous rendre compte de la manière dont k varie dans l'intervalle, mettons en évidence le paramètre t dont dépend k, et considérons la courbe

$$y = k(t).$$

On peut écrire

$$k(t) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left[\cos tx - h\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)x\right]dx,$$

$$k'(t) = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \left[\sin tx - h\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)x\right]x\,dx,$$

$$k''(t) = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \left[\cos tx - h\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)x\right]x^2\,dx.$$

Donc, $k''(t)$ étant négatif, la courbe $y = k(t)$ tourne sa concavité vers le bas dans l'intervalle de 0 à $\frac{\pi}{4}$; elle est située au-dessus de sa corde et elle est comprise entre cette corde et une tangente, par exemple la tangente au point du milieu $t = \frac{\pi}{8}$.

Considérons le développement par la formule de Taylor

$$k(t) = k\left(\frac{\pi}{8}\right) + \left(t - \frac{\pi}{8}\right) k'\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{8}\right)^2 k''(\tau),$$

où τ est intermédiaire entre t et $\frac{\pi}{8}$. Le dernier terme représente la différence des ordonnées de la courbe et de cette tangente. Cherchons-en une limite supérieure pour t compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

On déduit d'abord une limite supérieure de $k''(t)$ de son expression ci-dessus par une intégrale. Le maximum de $\cos tx - h \cos (t + \frac{\pi}{4}) x$ quand t varie (x restant fixe), s'obtient par le procédé classique de dérivation : c'est $\sqrt{1 - 2h \cos \frac{\pi x}{4} + h^2}$. Son maximum est atteint pour $x = 1$, quand x varie dans l'intervalle (0,1); et ce maximum est 0,7668. On a donc

$$| k'' | < 0{,}767 \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 dx = 0{,}767 \frac{\pi}{6}.$$

Donc, puisque $\left(t - \frac{\pi}{8}\right)^2$ reste $< \left(\frac{\pi}{8}\right)^2$, la limite supérieure du terme en question, ou de la différence des ordonnées de la courbe et de la tangente, sera

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 0{,}767 \frac{\pi}{6} = 0{,}0309.$$

La différence entre les ordonnées de la courbe et de la corde ne surpassera pas non plus cette limite dans l'intervalle $(0, \frac{\pi}{4})$ de t. La plus grande des ordonnées extrêmes étant 1,003, on voit que l'ordonnée de la courbe ne surpassera pas celle-ci augmentée de 0,0309. Enfin, comme l'erreur commise sur k est $< 0{,}018$, nous avons

$$k < 1{,}003 + 0{,}0309 + 0{,}018 < 1{,}052.$$

D'autre part, puisque la plus petite valeur de k est la plus petite des ordonnées extrêmes 0,9915 calculée plus haut (avec une erreur $< 0{,}018$), on aura

$$k > 0{,}9915 - 0{,}018 = 0{,}973.$$

Donc, en attribuant à k la valeur moyenne entre ces deux limites 0,973 et 1,052, nous poserons

$$k = 1{,}012,$$

avec une erreur inférieure à la demi-différence 0,04 (quand u varie de 0 à 1).

37. Valeur approchée de $\theta(\xi)$. — Si l'on porte la valeur que nous venons d'attribuer à k dans l'équation finale de l'avant-dernier numéro, il vient :

1° Pour $0 < u < \frac{1}{2}$,

$$\theta(\tfrac{1}{2} + u) = \tfrac{1}{2} - 1{,}43\, u \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi u}{2}\right),$$

avec une erreur inférieure en valeur absolue à

$$0{,}056\, u \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi u}{2}\right).$$

2° Si l'on change le signe de u, la fonction prend les

valeurs complémentaires et l'on a, avec la même approximation, pour $0 < u < \frac{1}{2}$,

$$\theta(\tfrac{1}{2} - u) = \tfrac{1}{2} + 1{,}43\, u \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi u}{2}\right).$$

L'erreur commise est donc toujours très petite, elle est insensible dans le voisinage des valeurs $-\frac{1}{2}$, 0 et $\frac{1}{2}$ de u. Comme on a

$$u \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi u}{2}\right) < u\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi u}{2}\right) < \frac{\pi}{32} < \frac{1}{10},$$

le maximum de l'erreur ne surpassera pas 0,0056 *en valeur absolue.*

Les formules précédentes donnent une idée très claire de la manière dont varie $\theta(\xi)$ quand ξ varie de 0 à 1.

Quand ξ varie de 0 à $\frac{1}{2}$, la fonction partant de la valeur $\frac{1}{2}$ commence par croître jusqu'à un maximum un peu inférieur à 0,65 (pour ξ voisin de $\frac{1}{2}$), ensuite elle décroît de nouveau jusqu'à $\frac{1}{2}$.

Quand ξ varie de $\frac{1}{2}$ à 1, elle décroît d'abord de $\frac{1}{2}$ jusqu'à un minimum un peu supérieur à 0,35 (pour ξ voisin de $\frac{3}{4}$) et revient ensuite en croissant à $\frac{1}{2}$.

38. Valeur asymptotique de $F'(x)$. — Nous avons trouvé dans le paragraphe précédent, sous les conditions indiquées au début de ce paragraphe, la formule asymptotique

$$F'(x) = f'(x - 0)\,\theta(\xi) + f'(x + 0)\,\theta(1 - \xi).$$

Nous en concluons donc que la valeur asymptotique de $F'(x)$ sera toujours intermédiaire entre les dérivées à droite et à gauche. La formule attribue encore une

influence prépondérante à la dérivée de $f(x)$ du côté du point α_k le plus rapproché. Mais cette prépondérance est beaucoup plus faible que celle qui a été discutée au n° 27 pour la valeur asymptotique de $F(x)$.

Cette valeur asymptotique sera comprise entre les deux nombres

$$0{,}35\, f'(x-0) + 0{,}65\, f'(x+0),$$
$$0{,}65\, f'(x-0) + 0{,}35\, f'(x+0);$$

et, si ξ tend vers l'une des trois valeurs 0, $\frac{1}{2}$ ou 1, $F'(x)$ aura pour limite la dérivée moyenne de $f(x)$.

CHAPITRE II.

Interpolation trigonométrique.

§ 1. — *Formule générale d'interpolation trigonométrique.*

39. Hypothèses sur la fonction à interpoler. — Dans tout ce chapitre, la fonction $f(x)$ à interpoler sera supposée *bornée* et *intégrable* au sens de Riemann.

Les formules d'interpolation trigonométrique admettent la période 2π et il y a deux manières de poser le problème de l'interpolation :

1° On peut se proposer d'interpoler une fonction *périodique* de période 2π dans l'intervalle de $-\infty$ à $+\infty$;

2° On peut se proposer d'interpoler dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ une fonction *qui reprend la même valeur à ces deux limites.*

Dans les démonstrations, nous admettrons toujours que la fonction à interpoler soit périodique. En effet, on

ramène le second cas au premier en considérant une fonction $f(x)$ égale à la proposée dans l'intervalle $(0,2\pi)$ et définie ailleurs par la condition de périodicité.

Il nous suffira donc d'étudier la convergence des formules d'interpolation dans l'intervalle $(0,2\pi)$, les mêmes circonstances se reproduisant dans les autres intervalles de même amplitude pour une fonction périodique.

40. Formule générale d'interpolation trigonométrique considérée comme limite de celle du chapitre précédent. — Interpolons la fonction périodique $f(x)$ dans un intervalle $(-N, +N)$ par la formule du chapitre précédent. Nous obtenons

$$(1) \qquad F(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_{-N}^{+N} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

Si N croît indéfiniment, la fonction $F(x)$ tend, comme nous allons le montrer, vers une limite bien déterminée. Nous représenterons cette limite par la notation (ayant le sens précisé)

$$(2) \qquad \Phi(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

C'est l'expression générale de toutes les formules d'interpolation trigonométrique eu égard à la périodicité de la fonction $f(x)$.

En particulier, si $f = 1$, elle devient identique :

$$1 = \frac{\sin mx}{m} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{x - \alpha_k}.$$

Nous allons d'abord mettre $\Phi(x)$ sous forme finie, ce qui prouvera la convergence.

41. Expressions de $\Phi(x)$ sous forme finie. — Nous allons réunir, dans la formule (1), les termes de la somme où les valeurs de α_k sont congrues (mod. 2π) et où $f(\alpha)$ reprend la même valeur. Mais il y a deux cas à distinguer :

1° m est un entier n;

2° m est de la forme $n + \frac{1}{2}$ (n entier).

1° Si $m = n$, on a $2\pi = \alpha_{2n}$ et les valeurs congrues de α_k ont des indices de même parité. L'ensemble des termes correspondant à ces valeurs sera

$$\frac{\sin nx}{n}(-1)^k f(\alpha_k) \sum_{\lambda} \frac{1}{x - \alpha_k - 2\lambda\pi},$$

où la somme s'étend aux valeurs entières de λ telles qu'on ait

$$-N < (\alpha_k + 2\lambda\pi) < N.$$

Quand N tend vers l'infini, cet ensemble a pour limite

$$\frac{\sin nx}{n}(-1)^k f(\alpha_k) \cot \frac{x - \alpha_k}{2}.$$

La formule (2) devient donc

$$(3) \qquad \Phi_1(x) = \frac{\sin nx}{2n} \sum_{0}^{2\pi} (-1)^k f(\alpha_k) \cot \frac{x - \alpha_k}{2}.$$

En particulier, si $f = 1$, on a identiquement

$$1 = \frac{\sin nx}{2n} \sum_{0}^{2\pi} (-1)^k \cot \frac{x - \alpha_k}{2}.$$

2° Si $m = n + \frac{1}{2}$, on a $2\pi = \alpha_{2n+1}$ et les points α_k congrus (mod. 2π) ont leurs indices alternativement

pairs et impairs. L'ensemble des termes correspondants dans la formule (1) sera

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{n+\frac{1}{2}}(-1)^k f(\alpha_k)\sum_{\lambda}\frac{(-1)^\lambda}{x-\alpha_k-2\lambda\pi}.$$

Cet ensemble a pour limite

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2n+1}(-1)^k\frac{f(\alpha_k)}{\sin\frac{x-\alpha_k}{2}}.$$

La formule (2) devient alors

$$(4)\qquad \Phi_1(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2n+1}\sum_0^{2\pi}(-1)^k\frac{f(\alpha_k)}{\sin\frac{x-\alpha_k}{2}}.$$

En particulier, si $f=1$, on a l'identité

$$1=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2n+1}\sum_0^{2\pi}\frac{(-1)^k}{\sin\frac{x-\alpha_k}{2}}.$$

Les formules (3) et (4) correspondent respectivement au partage de l'intervalle 2π en un nombre pair $2n$ ou impair $2n+1$ de parties. Ce sont celles qui se prêtent le mieux à la discussion.

Comme on a, suivant le cas,

$$\sin(nx)=(-1)^k\sin n(x-\alpha_k),$$

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x=(-1)^k\sin n(x-\alpha_k),$$

les formules (3) et (4) peuvent encore recevoir les formes suivantes :

$$(3^{bis}) \qquad \Phi_1(x) = \frac{1}{2n} \sum_0^{2\pi} f(\alpha_k) \sin n(x - \alpha_k) \cot \frac{x - \alpha_k}{2},$$

$$(4^{bis}) \qquad \Phi_2(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_0^{2\pi} f(\alpha_k) \frac{\sin (n + \frac{1}{2})(x - \alpha_k)}{\sin \frac{x - \alpha_k}{2}}.$$

Sous cette forme, on aperçoit immédiatement que Φ et f coïncident en tous les points α_k.

Remarque. — Les formules (3) et (4) ne dépendent plus que des valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle $(0,2\pi)$. On peut donc se servir immédiatement de ces formules pour l'interpolation d'une fonction donnée dans l'intervalle $(0,2\pi)$, *pourvu qu'elle prenne la même valeur aux deux limites.*

§ 2. — *Développement de la formule d'interpolation pour un nombre impair* 2n + 1 *de subdivisions.*

42. Quand on divise 2π en un nombre impair de parties, c'est-à-dire quand

$$\alpha_k = \frac{2k\pi}{2n+1},$$

c'est la formule (4bis) qui convient. Dans la relation connue :

$$\frac{\sin (n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_1^n \cos n\theta,$$

remplaçons θ par $(x - \alpha_k)$ et portons le développement dans (4bis); il vient

$$\phi_2(x) = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \sum_0^{2\pi} f(\alpha_k) \left[\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \cos i(x - \alpha_k)\right].$$

Remplaçons $\cos i(x - \alpha_k)$ par

$$\cos ix \cos i\alpha_k + \sin ix \sin i\alpha_k,$$

et intervertissons les sommations; il vient

$$(5) \qquad \phi_2(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} (A_i \cos ix + B_i \sin ix)$$

où les coefficients ont pour valeurs

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \sum_0^{2\pi} f(\alpha_k) \cos i\alpha_k \\ B_i &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \sum_0^{2\pi} f(\alpha_k) \sin i\alpha_k \end{aligned} \right. \quad \left(\alpha_k = \frac{2k\pi}{n}\right).$$

On peut aussi écrire, ce qui est la même chose,

$$(6^{bis}) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_i &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2n} f(\alpha_k) \cos i\alpha_k \\ B_i &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2n} f(\alpha_k) \sin i\alpha_k. \end{aligned} \right.$$

La formule (5) avec les valeurs (6) des coefficients est la plus employée des formules d'interpolation trigonométrique (*).

(*) D'après l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* (Bd II 1, Heft 5, S. 650), cette formule aurait été trouvée par GAUSS et par FOURIER. Mais il n'est pas spécifié que le nombre des subdivisions de 2π soit impair.

§ 3. — *Développement de la formule pour un nombre pair de subdivisions.*

43. Quand 2π est divisé en un nombre pair de parties, π est lui-même divisé en un nombre entier n de parties, et l'on a

$$\alpha_k = k\frac{\pi}{n}.$$

C'est la formule (3bis) qu'il faut alors considérer. Dans la relation

$$\tfrac{1}{2}\sin n\theta \cot\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\cos i\theta + \frac{\cos n\theta}{2},$$

qu'on obtient en retranchant $\frac{\cos n\theta}{2}$ aux deux membres de l'équation analogue du n° précédent, faisons $\theta = x - \alpha_k$ et portons le développement dans la formule (3bis). Il vient

$$\phi_1(x) = \frac{1}{n}\sum_0^{2\pi} f(\alpha_k)\left[\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\cos i(x-\alpha_k) + \frac{\cos n(x-\alpha_k)}{2}\right]$$

et, en transformant comme dans le cas précédent,

$$(7)\qquad \phi_1(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}(A_i\cos ix + B_i\sin ix) + \frac{A_n}{2}\cos nx,$$

les coefficients ayant pour valeurs

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{n}\sum_0^{2\pi} f(\alpha_k)\cos i\alpha_k \\ B_i &= \frac{1}{n}\sum_0^{2\pi} f(\alpha_k)\sin i\alpha \end{aligned}\right. \quad \left(\alpha = \frac{k\pi}{n}\right)$$

c'est-à-dire

$$(8^{\text{bis}})\qquad \begin{cases} A_i = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} f(\alpha_k)\cos i\alpha \\[2ex] B_i = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} f(\alpha_k)\sin i\alpha_k. \end{cases}$$

En particulier, si $i = n$,

$$B_n = 0 \quad A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k f(\alpha_k).$$

La formule (7) est tout aussi simple que la formule (6), mais elle paraît moins employée. Elle n'est pas renseignée dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, au moins quant à la valeur spéciale du dernier coefficient $\left(\frac{A_n}{2}\right)$.

§ 4. — *Interpolation par des séries limitées de sinus ou de cosinus seulement.*

44. Séries de cosinus. — La formule (8) ne contient plus que des cosinus si l'on suppose que $f(x)$ soit une fonction paire de x.

On a, en effet, à cause de la périodicité de $f(x)$,

$$A_i = \frac{1}{n}\sum_{0}^{2\pi} = \frac{1}{n}\sum_{0}^{\pi} + \frac{1}{n}\sum_{-\pi}^{0} f(\alpha_k)\cos i\alpha_k$$

$$A_i = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=-1}^{-n} f(\alpha_k)\cos i\alpha_k$$

$$A_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}[f(\alpha_k) + f(-\alpha_k)]\cos i\alpha_k + \frac{f(0) + (-1)^i f(-\pi)}{n}.$$

De même,

$$B_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}[f(\alpha_k) - f(-\alpha_k)]\sin i\alpha_k.$$

Donc, si la fonction est paire, B_i est nul et il reste $\left(\alpha_k = \frac{k\pi}{n}\right)$

$$(9)\quad \begin{cases} \Phi_2(x) = \dfrac{A_0}{2} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} A_i \cos ix + \dfrac{A_n}{2}\cos nx \\ A_i = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(\alpha_k)\cos i\alpha_k + \dfrac{f(0) + (-1)^i f(\pi)}{n}. \end{cases}$$

La formule (9) ne dépend plus que des valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$. On s'en sert pour interpoler une fonction quelconque dans l'intervalle $(0, \pi)$ avec un nombre pair ou impair n de subdivisions (*).

Si la fonction $f(x)$ s'annule aux limites 0 et π, on aura, plus simplement (**),

$$A_i = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\alpha_k)\cos i\alpha_k.$$

45. Séries de sinus. — Si la fonction $f(x)$ est

(*) M. H. Lebesgue attribue la formule d'interpolation par des cosinus à Clairaut (*Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 25. Paris, G. V., 1906.) La formule signalée, sans démonstration, par M. Lebesgue est en désaccord avec notre formule (9) : le terme en $\cos nx$ manque et les coefficients A_i sont différents.

La contribution de Clairaut est renseignée aussi sans précision dans l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd II 1, Heft 5, S. 646.

(**) On suppose presque toujours ce dernier cas.

impaire, les valeurs de A_i et B_i calculées au début du numéro précédent deviennent

$$\begin{cases} A_i = \dfrac{f(0) + (-1)^i f(\pi)}{n} \\ B_i = \dfrac{2}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(\alpha_k) \sin i\alpha_k. \end{cases}$$

Mais si la fonction est périodique et impaire comme on le suppose, $f(\pi)$ est nul, car on a, en même temps,

$$f(\pi) = f(-\pi), \qquad f(\pi) = -f(-\pi).$$

Il vient donc

$$A_i = \frac{f(0)}{n}.$$

Pour que les cosinus disparaissent de la formule, il faut donc que $f(0) = 0$.

Soit donc $f(x)$ une fonction impaire qui s'annule aux deux points 0 et π; on aura

$$(10) \qquad \begin{cases} \Phi_2(x) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} B_i \sin ix \\ B_i = \dfrac{2}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(\alpha_k) \sin i\alpha_k \end{cases} \qquad \left(\alpha_k = \frac{k\pi}{n}\right).$$

Cette formule ne dépend plus que des valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$. On peut donc se servir de la formule (10) pour interpoler dans l'intervalle $(0, \pi)$ une fonction quelconque qui s'annule aux deux limites 0 et π.

Cette formule a déjà été considérée par LAGRANGE, qui en a déterminé les coefficients par un procédé très laborieux (*).

§ 5. — *Convergence des formules d'interpolation trigonométriques.*

46. Relation avec la formule d'interpolation fondamentale. — Pour étudier la convergence des formules d'interpolation, il suffit de faire varier x dans l'intervalle de 0 à 2π, car ces formules admettent toutes la période 2π, comme la fonction $f(x)$ à interpoler (n° 39).

Bornons-nous donc à cet intervalle; nous allons montrer que la question se ramène complètement à celle qui a été résolue dans le premier chapitre. Il y a, en réalité, deux cas à traiter : celui où m est un entier n et celui où $m = n + \frac{1}{2}$. Mais comme les deux cas se traitent exactetement de la même manière, il suffit de considérer le premier.

La formule d'interpolation trigonométrique est alors la formule (3) :

$$\Phi(x) = \frac{\sin mx}{2m} \sum_{0}^{2\pi} (-1)^k f(\alpha_k) \cot \frac{x - \alpha_k}{2}.$$

Nous allons comparer cette fonction à celle, définie comme au n° 14 du chapitre Ier,

$$F(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_{-2\pi}^{4\pi} (-1)^k f(\alpha_k) \frac{1}{x - \alpha_k}.$$

(*) *Œuvres*, I, p. 87.

A cause de la périodicité de $f(x)$, on peut écrire aussi

$$F(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_0^{2\pi} (-1)^k f(a_k) \left[\frac{1}{x - a_k} + \frac{1}{x - a_k - 2\pi} + \frac{1}{x - a_k + 2\pi} \right].$$

Si nous faisons la différence des deux fonctions $\Phi(x)$ et $F(x)$, il vient donc

$$\Phi(x) - F(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_0^{2\pi} (-1)^k f(a_k)\, \varpi(a_k),$$

en posant, en abrégé,

$$\varpi(\alpha) = \tfrac{1}{2} \cot \frac{x - \alpha}{2} - \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \alpha - 2\pi} - \frac{1}{2 - \alpha + 2\pi}.$$

Donc, $\varpi(\alpha)$ est une fonction continue de x et de α ainsi que toutes ses dérivées quand x et α varient de 0 à 2π.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

46. Théorème. — *Pour toute valeur de* x *dans l'intervalle de* 0 *à* 2π, *les deux fonctions* $\Phi(x)$ *et* $F(x)$ *du numéro précédent ont la même valeur asymptotique quand* m *tend vers l'infini. De plus, la différence* $\Phi(x) - F(x)$ *tend uniformément vers* 0 *quand* x *varie de* 0 *à* 2π.

En effet, cette différence tend vers 0 comme la somme

$$\frac{1}{m} \sum_0^{2\pi} (-1)^k f(a_k)\, \varpi(a_k)$$

et il n'y a qu'à appliquer le lemme I du n° 11 pour établir qu'elle tend uniformément vers 0.

Les conditions de convergence de la formule d'interpolation $\Phi(x)$ sont donc exprimées par les théorèmes II

et III des nos 17 et 18 du premier chapitre, où il suffit de remplacer $F(x)$ par $\Phi(x)$. — La convergence de $\Phi(x)$ vers $f(x)$ sera *uniforme* dans tout intervalle intérieur à un autre où $f(x)$ sera continue.

La valeur asymptotique de $\Phi(x)$ en un point de discontinuité de $f(x)$ sera fournie par le théorème VI (n° 27) de la première partie, dans l'énoncé duquel il n'y a qu'à remplacer $F(x)$ par $\Phi(x)$.

Si l'on applique la formule d'interpolation à une fonction donnée dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ seulement, il faudra discuter la formule pour les extrémités 0 et 2π en rendant la fonction périodique.

§ 6. — *Convergence des dérivées des formules d'interpolation.*

L'étude de la convergence ou de la valeur asymptotique de la dérivée se ramène aussi complètement aux conclusions du chapitre Ier, moyennant les deux théorèmes suivants :

47. Théorème. — *Soit* $f(x)$ *une fonction continue, ayant une dérivée bornée et intégrable, et s'annulant pour les valeurs* $x = 0$ *et* $x = 2\pi$; *en tout point de l'intervalle* $(0, 2\pi)$, *les dérivées*

$$\Phi'(x) \quad \text{et} \quad F'(x)$$

des fonctions Φ *et* F *définies au* n° 46 *auront la même valeur asymptotique pour* $m = \infty$ *et leur différence*

$$\Phi'(x) - F'(x)$$

tendra uniformément vers 0 *quand* x *variera de* 0 *à* 2π.

En effet, en dérivant l'équation du n° 46 :

$$\phi(x) - F(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_0^{2\pi} (-1)^k f(\alpha_k) \varpi(\alpha_k)$$

et en observant que $\varpi'_x = -\varpi'_\alpha$, il vient

$$\phi'(x) - F'(x) = \cos mx \sum_0^{2\pi} (-1)^k f(\alpha_k) \varpi(\alpha_k)$$

$$- \frac{\sin mx}{m} \sum_0^{2\pi} (-1)^k f(\alpha_k) \varpi'(\alpha_k).$$

Or, le lemme II du n° 12 prouve que la somme

$$\sum_0^{2\pi} (-1)^k f(\alpha_k) \varpi(\alpha_k)$$

tend *uniformément* (ϖ étant continue) vers la limite

$$\frac{-f(0)\varpi(0) \pm f(2\pi)\varpi(2\pi)}{2} = 0.$$

D'autre part, le lemme I du n° 11 prouve que la somme

$$\frac{1}{m} \sum_0^{2\pi} (-1)^k f(\alpha_k) \varpi'(\alpha_k)$$

tend *uniformément* vers 0.

Le théorème est donc établi.

Le théorème précédent suppose que $f(x)$ s'annule aux deux limites 0 et π. Mais la périodicité entraîne seulement comme conséquence que ces valeurs soient égales.

Dans ce cas, on reviendra aux théories du chapitre Ier en se servant du théorème suivant :

48. Théorème. — *Si* $f(x)$ *est une fonction continue ayant une dérivée bornée et intégrable dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$ *et qui reprend la même valeur différente de* 0 *à ces limites, on désigne par* $F_0(x)$ *ce que devient* $F(x)$ *quand on y remplace* $f(\alpha)$ *par* $f(\alpha) - f(0)$ *qui a la même dérivée mais qui s'annule aux deux limites ; en tout point de l'intervalle* $(0, 2\pi)$, *les deux fonctions dérivées*

$$\Phi'(x) \quad \text{et} \quad F_0'(x)$$

auront la même valeur asymptotique pour $m = \infty$ *et la différence* $\Phi'(x) - F_0'(x)$ *convergera uniformément vers* 0 *quand* x *variera de* 0 *à* 2π.

Pour établir ce théorème, il faut observer que l'on ne change pas la dérivée $\Phi'(x)$ de la formule d'interpolation quand on remplace $f(x)$ par $f(x) - f(0)$.

On a, en effet, D étant le signe de dérivation :

$$\Phi'(x) = D.\ \frac{\sin mx}{2m} \sum_0^{2\pi} (-1)^k f(\alpha_k) \cot \frac{x - \alpha_k}{2},$$

et identiquement :

$$0 = D.\ \frac{\sin mx}{2m} \sum_0^{2\pi} (-1)^k f(0) \cot \frac{x - \alpha_k}{2}.$$

Soustrayons, et appelons Φ_0 la fonction déduite de Φ par le changement de $f(x)$ en $f(x) - f(0)$; nous trouvons

$$\Phi'(x) = \Phi_0'(x).$$

Nous sommes ainsi ramenés à démontrer que Φ'_0 et F'_0 ont la même valeur asymptotique, donc au théorème précédent.

L'analyse faite dans le § 5 du premier chapitre nous conduit donc à la conclusion suivante :

49. Théorème. — *Si* $f(x)$ *est une fonction continue qui reprend les mêmes valeurs aux limites* 0 *et* 2π *et qui possède une dérivée à variation bornée dans cet intervalle, la valeur asymptotique de la dérivée* $\Phi'(x)$ *de la formule d'interpolation sera*

$$f'(x-0)\,\theta(\xi) + f'(x+0)\,\theta(1-\xi).$$

En particulier $\Phi'(x)$ *aura pour limite* $f'(x)$ *en tout point où cette dérivée est unique et la convergence sera uniforme dans tout intervalle intérieur à un autre où* $f'(x)$ *sera continue.*

Pour que $\Phi'(x)$ converge uniformément vers $f'(x)$ dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$, il suffit donc que $f(x)$ ait une dérivée continue et à variation bornée dans cet intervalle, et qui reprend la même valeur aux deux limites.

§ 7. — *Relations entre les coefficients de la formule d'interpolation et ceux de la série de Fourier.*

50. Calcul de ces relations. — Supposons que $f(x)$ soit développable en série de Fourier dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, sous la forme

$$(1) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Établissons les formules d'interpolation en divisant 2π en μ parties. Il y a deux cas à distinguer :

1° Si μ est un nombre pair $2n$,

$$\Phi_1(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i \cos ix + B_i \sin ix) + \frac{A_n}{2} \cos nx.$$

2° Si μ est un nombre impair $2n + 1$,

$$\Phi_2(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} (A_i \cos ix + B_i \sin ix).$$

On peut écrire dans les deux cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i = \dfrac{2}{\mu} \displaystyle\sum_0^{\mu-1} f(\alpha_k) \cos i\alpha_k \\ B_i = \dfrac{2}{\mu} \displaystyle\sum_0^{\mu-1} f(\alpha_k) \sin i\alpha_k \end{array} \right. \quad \left(\alpha_k = \frac{2k\pi}{\mu}\right).$$

Observons que

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} \cos p\alpha_k = \left\{ \begin{array}{ll} \mu, & \text{si} \quad p \equiv 0 \pmod{\mu} \\ 0, & \text{dans l'autre cas.} \end{array} \right.$$

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} \sin p\alpha_k = 0, \text{ dans tous les cas.}$$

Considérons aussi les décompositions :

$$2 \cos p\alpha_k \cos q\alpha_k = \cos(p + q)\alpha_k + \cos(p - q)\alpha_k$$
$$2 \sin p\alpha_k \sin q\alpha_k = \cos(p - q)\alpha_k - \cos(p + q)\alpha_k$$
$$2 \sin p\alpha_k \cos q\alpha_k = \sin(p + q)\alpha_k + \sin(p - q)\alpha_k.$$

Maintenant faisons successivement dans l'équation (1) $x = 0$, α_1, α_2,... $\alpha_{\mu-1}$ et ajoutons; il vient

$$\sum_0^{\mu-1} f(\alpha_k) = \mu \left[\frac{a_0}{2} + a_\mu + a_{2\mu} + \cdots\right]$$

Opérons de même après avoir multiplié par cos px ou par sin px; il vient

$$\sum_0^{\mu-1} f(\alpha_k) \cos p\alpha_k = \frac{\mu}{2}(a_p + a_{\mu+p} + a_{2\mu+p} + \cdots$$
$$+ a_{\mu-p} + a_{2\mu-p} + \cdots)$$

$$\sum_0^{\mu-1} f(\alpha_k) \sin p\alpha_k = \frac{\mu}{2}(b_p + b_{\mu+p} + b_{2\mu+p} + \cdots$$
$$- b_{\mu-p} - b_{2\mu+p} - \cdots)$$

C'est-à-dire, pour les valeurs $p = 0, 1, 2, \ldots$ qui sont inférieures à $\frac{\mu}{2}$,

$$\begin{cases} A_p = a_p + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a_{\lambda\mu+p} + a_{\lambda\mu-p}) \\ B_p = b_p + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (b_{\lambda\mu+p} - b_{\lambda\mu-p}) \quad (*). \end{cases}$$

En particulier, si $\mu = 2n$ et $p = n$,

$$B_n = 0 \qquad A_n = 2(a_n + a_{3n} + a_{5n} + \cdots).$$

Le passage de la formule de Fourier à celle d'interpo-

(*) Ces relations sont dues à Euler et à Gauss (*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, B II_1, Heft 5, S. 651).

lation peut donc se formuler par la règle suivante, si μ est impair :

Quand on divise 2π en un nombre impair μ de parties, la formule d'interpolation se déduit de celle de Fourier en remplaçant, dans les lignes trigonométriques cos px *et* sin px *qui y figurent, les multiplicateurs* p *par leur résidu* (mod. μ), *positif ou négatif, qui a la plus petite valeur absolue.*

Si μ est pair et égal à $2n$, on devra commencer par annuler dans la formule de Fourier tous les coefficients b dont l'indice est un multiple de n (on pourrait dire aussi qu'on annule les sinus correspondants), et puis l'on pourra appliquer la règle précédente.

§ 8. — *De l'approximation obtenue par les formules d'interpolation.*

51. Hypothèse sur la fonction. — Pour arriver à des résultats précis, il faut faire des hypothèses. Nous supposerons que la fonction à interpoler $f(x)$ possède une dérivée à variation bornée (n° 6) et nous représenterons par V la variation totale de la dérivée dans l'*intérieur* (n° 8) de l'intervalle $(0,2\pi)$. Nous supposerons encore, comme précédemment, que $f(x)$ reprend la même valeur aux deux limites 0 et 2π.

52. Limite supérieure de l'expression

$$a_p \cos \xi + b_p \sin \xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos(p\alpha - \xi)d\alpha.$$

Cette expression, où a_p, b_p sont donc les coefficients de

Fourier, devient, par une intégration par parties, $f(\alpha)$ reprenant la même valeur aux deux limites :

$$-\frac{1}{\pi p}\int_0^{2\pi} f'(\alpha)\sin(p\alpha-\xi)d\alpha,$$

et $f'(\alpha)$ désigne la dérivée à droite ou à gauche, comme on voudra.

Convenons, pour faciliter l'écriture, de considérer $f(\alpha)$ et sa dérivée comme nulles en dehors de l'intervalle $(0,2\pi)$; l'expression précédente (sauf le signe) peut s'écrire

$$\frac{1}{\pi p}\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(\alpha-\frac{\xi}{p}\right)\sin p\alpha d\alpha$$

et, par le partage de l'intervalle d'intégration en intervalles consécutifs δ_k par les points $k\frac{\pi}{p}$ (où k varie de $-\infty$ à $+\infty$),

$$\frac{1}{\pi p}\sum_k\int_{k\frac{\pi}{p}}^{(k+1)\frac{\pi}{p}} f'\left(\alpha-\frac{\xi}{p}\right)\sin p\alpha\, d\alpha.$$

Désignons par μ_k une valeur moyenne de $f'\left(\alpha-\frac{\xi}{p}\right)$ dans l'intégrale qui précède ou dans l'intervalle δ_k. Nous pouvons appliquer le théorème de la moyenne à cette intégrale, car $\sin p\alpha$ a un signe invariable. Notre expression prend la forme

$$\frac{1}{\pi p}\sum_k \mu_k\int_{k\frac{\pi}{p}}^{(k+1)\frac{\pi}{p}}\sin p\alpha\, d\alpha=\frac{2\sigma}{\pi p^2},$$

en posant

$$\sigma = \sum_k (-1)^k \mu_k.$$

Nous allons former une expression qui surpasse (ou égale) σ en valeur absolue. Il suffit pour cela de remplacer, dans σ, chaque terme par une quantité plus grande (ou égale) si σ est positif, plus petite (ou égale) si σ est négatif.

Puisque μ_k est une valeur moyenne de $f'(x)$ dans l'intervalle δ_k, on peut toujours trouver, dans cet invervalle, des points où $f'(x)$ est $\geqslant \mu_k$ et des points où $f'(x)$ est $\leqslant \mu_k$. On peut donc toujours trouver dans δ_k un point ξ_k satisfaisant à la condition

$$(-1)^k f'(\xi_k) \geqslant (-1)^k \mu_k$$

si σ est positif, ou à la relation inverse si σ est négatif. Cela fait, la somme σ sera moindre en valeur absolue que

$$\sum_k (-1)^k f'(\xi_k),$$

qui peut s'écrire

$$\frac{1}{2} \sum_k (-1)^k [f'(\xi_k) - f'(\xi_{k-1})]$$

et qui est moindre en valeur absolue que

$$\frac{1}{2} \sum_k | f'(\xi_k) - f'(\xi_{k-1}) |,$$

donc moindre que la variation totale de $f'(x)$ quand x

varie de $-\infty$ à $+\infty$. Cette variation totale est égale à la variation totale V de $f'(x)$ *dans l'intérieur* de l'intervalle $(0,2\pi)$ augmentée de la somme des valeurs absolues extrêmes

$$\mu = |f'(+0)| + |f'(2\pi - 0)|.$$

Il vient donc $\sigma < (V + \mu) : 2$ et

$$|(a_p \cos \xi + b_p \sin \xi)| < \frac{V + \mu}{\pi p^2}.$$

53. Limite supérieure de (b_p). — Nous supposons le cas d'une fonction $f(x)$ impaire qui reprend les mêmes valeurs aux points $x = 0$ et $x = \pi$; nous avons alors, en intégrant par parties,

$$b_p = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha) \sin p\alpha \, d\alpha = \frac{2}{p\pi}\int_0^\pi f'(\alpha) \cos p\alpha \, d\alpha.$$

Décomposons l'intervalle d'intégration en $p + 1$ parties consécutives

$$\delta_0, \ \delta_1, \ \delta_2, \ \ldots \ldots \ \delta_p$$

par les points

$$0, \frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{2p} + \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{2p} + 2\frac{\pi}{p}, \ldots \frac{\pi}{2p} + (p-1)\frac{\pi}{p}, \pi.$$

Décomposons l'intégrale de la même manière en une somme d'autres, où $\cos p\alpha$ ne change pas de signe et auxquelles nous pouvons appliquer le théorème de la

moyenne. Il viendra, μ_k étant une valeur moyenne de $f'(\alpha)$ dans δ_k,

$$b_p = \frac{2}{p^2\pi}(\mu_0 - 2\mu_1 + 2\mu_2 - \cdots \pm 2\mu_{p-1} \mp \mu_p).$$

On peut, comme nous l'avons expliqué dans la démonstration précédente, forcer la valeur absolue de b_p en remplaçant μ_k par une valeur convenable $f'(\xi_k)$ de $f'(x)$ dans l'intervalle δ_k. Supposons donc tout de suite que μ_k représente cette valeur et écrivons la parenthèse $(\mu_0 - 2\mu_1 + \ldots)$ comme suit :

$$(\mu_0 - \mu_1) - (\mu_1 - \mu_2) + (\mu_2 - \mu_3) - \cdots;$$

nous voyons que sa valeur absolue est moindre que

$$|\mu_0 - \mu_1| + |\mu_1 - \mu_2| + |\mu_2 - \mu_3| + \cdots$$

donc moindre que la variation totale V de $f'(x)$ DANS L'INTÉRIEUR de l'intervalle $(0, \pi)$.

Nous avons ainsi obtenu

$$|b_p| < \frac{2V}{\pi p^2}.$$

54. Approximation obtenue dans le cas d'un nombre impair de subdivisions de 2π. — Supposons qu'on emploie la formule d'interpolation relative à un nombre impair $\mu = 2n + 1$ de subdivisions. L'erreur commise dans la formule d'interpolation résulte de la règle énoncée plus haut (n° 50). Elle est égale à la

variation de l'expression

$$\sum_{n+1}^{\infty}(a_p \cos px + b_p \sin px),$$

quand on y remplace le coefficient p de x par son plus petit résidu (mod. μ). Cette variation sera donc la différence de deux sommes de la forme

$$\sum_{n+1}^{\infty}(a_p \cos \xi_p + b_p \sin \xi_p),$$

dont chacune a sa valeur absolue moindre que

$$\frac{V+\mu}{\pi}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{p^2} < \frac{V+\mu}{\pi n},$$

en vertu de la limite supérieure de chaque terme trouvée précédemment. La valeur absolue de la différence ou l'erreur commise sera donc moindre que $\frac{2(V+\mu)}{\pi n}$.

De là le théorème suivant :

Si l'on interpole avec $2n+1$ *subdivisions dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$ *une fonction* $f(x)$ *qui reprend la même valeur aux deux limites et qui a une dérivée à variation bornée dans cet intervalle, la différence entre* $f(x)$ *et la valeur fournie par la formule d'interpolation* $\Phi_1(x)$ *ne surpassera pas*

$$2\frac{V+\mu}{\pi n}$$

dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. *On désigne par* V *la variation totale de la dérivée* $f'(x)$ *dans* L'INTÉRIEUR *de cet intervalle et par* μ *la somme des valeurs absolues de* $f'(+0)$ *et* $f'(2\pi - 0)$.

On arriverait à un résultat analogue dans le cas d'un nombre pair de subdivisions de 2π. Mais nous ne recom-

mencerons pas un calcul tout semblable au précédent. Nous allons considérer le cas où l'on interpole par une suite de sinus seulement, et le résultat prend alors une forme nouvelle.

55. Approximation obtenue dans l'interpolation par série de sinus seulement. — Dans ce cas, on suppose que la fonction $f(x)$ s'annule aux deux limites 0 et π et on l'interpole dans l'intervalle $(0, \pi)$ avec n subdivisions.

Admettons donc que $f(x)$ ait une dérivée à variation bornée dans l'intervalle $(0, \pi)$ et soit V la variation totale de $f(x)$ *dans l'intérieur* de l'intervalle $(0, \pi)$.

On a, par la formule de Fourier, dans cet intervalle,

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

D'après la règle du n° 50, la formule d'interpolation s'en déduit par une altération des arcs dans les sinus de la série

$$\sum_{n}^{\infty} b_p \sin px.$$

Le premier terme $b_n \sin nx$ est remplacé par 0, d'où une altération inférieure à (b_n), donc inférieure à

$$\frac{2V}{\pi n^2}.$$

L'altération due à la modification des autres termes sera moindre que

$$2\sum_{n+1}^{\infty} |b_p| < \frac{4V}{\pi}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{p^2} < \frac{4V}{\pi n}.$$

La différence entre $f(x)$ et la formule d'interpolation $\Phi(x)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ ne surpassera donc pas

$$\frac{4V}{\pi n}\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

D'où ce théorème :

Si l'on interpole en série limitée de sinus et avec n *subdivisions de l'intervalle* $(0, \pi)$ *une fonction continue qui s'annule à ces deux limites et qui possède une dérivée à variation bornée, la différence entre* f(x) *et la valeur fournie par la formule d'interpolation ne surpassera pas*

$$\frac{4V}{\pi n}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

dans l'intervalle $(0, \pi)$. *On désigne par* V *la variation totale de la dérivée dans l'*INTÉRIEUR *de l'intervalle* $(0, \pi)$.

56. Comparaison avec l'ordonnée d'un polygone inscrit dans la courbe $y = f(x)$. Application au cas où les données sont fournies par l'observation. — Les formules d'interpolation trigonométriques sont très employées. Les limites trouvées dans les théorèmes précédents sont des limites de l'écart entre la courbe $y = \Phi(x)$ fournie par l'interpolation et le polygone inscrit commun aux deux courbes, $y = f$ et $y = \Phi$, ainsi qu'on l'a expliqué pour la formule $F(x)$ du chapitre précédent (n° 22), les quantités V et μ pouvant se calculer pour la ligne polygonale.

Si les données sont fournies par l'observation, on peut construire cette ligne polygonale et calculer l'écart; la formule d'interpolation ne méritera la confiance que si

cet écart n'est pas trop grand, ainsi que nous l'avons expliqué au n° 23.

Si on laisse aux fonctions leur généralité, la comparaison avec le théorème V du n° 21 paraît donner l'avantage, au point de vue de l'approximation, à la formule d'interpolation du premier chapitre.

CHAPITRE III.

Interpolation parabolique.

§ *unique.* — *Construction d'une formule d'interpolation convergente.*

57. Problème à résoudre. — Le problème de trouver un polynôme qui prend des valeurs données pour une série de valeurs de x en progression arithmétique est résolu par la formule de Lagrange.

Si ces valeurs sont celles d'une fonction $f(x)$, on sait que la formule de Lagrange ne converge pas nécessairement vers $f(x)$ dans l'intervalle de l'interpolation quand les points de coïncidence se rapprochent indéfiniment les uns des autres.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) et $2m + 1$ un nombre impair qui augmente indéfiniment. Proposons-nous le problème suivant :

Définir un polynôme qui coïncide avec $f(x)$ *pour* $2m + 1$ *valeurs de* x *en progression arithmétique :*

$$a \quad a + h \quad a + 2h, \ldots \quad a + 2mh = b,$$

mais qui tende uniformément vers f(x) *dans l'intervalle* (a, b) *quand* m *tend vers l'infini.*

La possibilité de définir un polynôme semblable se démontre à priori sans aucune difficulté.

Pour plus de facilité, désignons les $2m + 1$ valeurs de x en progression arithmétique par

$$x_0, x_1, x_2 \ldots x_{2m}.$$

Soit alors $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m, \ldots$ une suite de quantités positives ayant pour limite O.

Désignons par $f_m(x)$ une fonction *dérivable* (ayant une dérivée unique) qui coïncide avec $f(x)$ aux points x_0, $x_1, \ldots x_{2m}$ et diffère de $f(x)$ de moins de ε_m dans l'intervalle (a, b); par Q_m le polynôme de degré $2m$ qui coïncide avec $f(x)$ aux mêmes points : c'est le polynôme de Lagrange.

La fonction

$$\frac{f_m(x) - Q_m}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{2m})}$$

est continue dans l'intervalle (a, b). Soit M le maximum de son dénominateur dans cet intervalle. Soit P_m un polynôme qui représente cette fonction, à moins de $\frac{\varepsilon_m}{M}$ près, dans le même intervalle.

On aura, à moins de ε_m près, dans l'intervalle (a, b) :

$$f_m(x) = Q_m + (x - x_1) \ldots (x - x_{2m}) P_m,$$

et, à moins de $2\varepsilon_m$ près :

$$f(x) = Q_m + (x - x_1) \ldots (x - x_{2m}) P_m.$$

Donc le second membre de cette équation est un polynôme qui répond à la question.

Mais cette solution générale que nous venons d'esquisser ne présente qu'un intérêt très médiocre.

Elle ne nous donne, en effet, aucun renseignement sur la manière dont le degré du polynôme ainsi obtenu doit croître avec m.

Or c'est là que réside vraiment l'intérêt de la question.

Toutefois, la question ainsi posée ne peut pas être traitée d'une manière précise sans introduire des restrictions. Nous supposerons donc que la fonction à interpoler $f(x)$ soit une de celles pour lesquelles la formule d'interpolation $F(x)$ du premier chapitre est uniformément convergente.

Comme on le sait (n° 19), il suffit pour cela que la fonction continue $f(x)$ soit à variation bornée et reprenne la même valeur aux deux limites de l'intervalle (a, b).

Cette dernière restriction n'en est pas une au point de vue qui nous occupe, car on peut toujours la réaliser en soustrayant de $f(x)$ un polynôme du premier degré.

58. Construction d'une formule d'interpolation parabolique. — Nous supposerons que l'intervalle (a, b) d'interpolation soit l'intervalle $(-\pi, +\pi)$.

Cette hypothèse est légitime, parce que tout autre intervalle se ramène à celui-là par un changement linéaire de variables.

Posons, en général,

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{m}.$$

Nous connaissons une formule générale d'interpola-

tion convergeant vers $f(x)$ dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$: c'est

$$F(x) = \frac{\sin mx}{m} \sum_{k=-m}^{+m} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

Mais elle ne donne pas un polynôme. Il s'agit donc d'en faire sortir un polynôme jouissant des mêmes propriétés de convergence.

Posons, à cet effet,

$$P = x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{m^2 x^2}{k^2 \pi^2}\right),$$

$$Q = \prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{m^2 x^2}{k^2 \pi^2}\right),$$

d'où

$$\frac{\sin mx}{m} = PQ;$$

P est un polynôme divisible par tous les dénominateurs de la formule $F(x)$ et Q est une fonction entière.

Développons Q en série de Maclaurin suivant les puissances de x^2; soient S la somme d'un nombre fini de termes (à déterminer) et R le reste (donc S est un polynôme).

Désignons par Q_k, S_k et R_k ce que deviennent Q, R et S au point $x = \alpha_k$.

Posons enfin

$$F_1(x) = PS \sum_{k=-m}^{m} (-1)_k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k} \frac{Q_k}{S_k}.$$

La fonction F_1 coïncide avec F et f pour tous les

points α_k, mais, cette fois, F_1 est un polynôme, car tous les dénominateurs $(x - \alpha_k)$ divisent P. Donc $F_1(x)$ est une formule d'interpolation parabolique.

Cette formule fournit une infinité de polynômes différents, en modifiant S. Celle de Lagrange y est comprise par la réduction de S à son premier terme 1. Mais nous nous proposons maintenant de choisir S de manière à rendre la formule convergente, c'est-à-dire de manière que F_1 ait la même limite que F quand m tend vers l'infini, le degré de S restant le plus bas possible.

Il suffira pour cela de réaliser une condition suffisante de convergence que nous allons indiquer.

59. Condition suffisante de convergence. — Il s'agit de faire en sorte que F_1 et F aient la même limite pour $m = \infty$. A cet effet, considérons la différence

$$\Delta = F(x) - F_1(x).$$

En observant les relations

$$\frac{\sin mx}{m} = PQ = P(S + R),$$

il vient

$$\Delta = \frac{\sin mx}{m} \sum (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k} \left(1 - \frac{S}{S + R} \frac{S_k + R_k}{S_k}\right),$$

ou

$$\Delta = \frac{\sin mx}{m} \sum (-1)_k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k} \left(\frac{R}{S + R} - \frac{S}{S + R} \frac{R_k}{S_k}\right).$$

Pour que Δ tende uniformément vers 0 quand m tend

vers l'infini, je vais montrer qu'*il suffit que le quotient* R : S *soit un infiniment petit d'ordre égal ou supérieur à* $\frac{1}{m\sqrt{m}}$.

En effet, dans ce cas, chaque parenthèse de l'expression de Δ est un infiniment petit de cet ordre, et aussi chaque terme de Δ, car le facteur

$$(-1)_k \frac{\sin mx}{m(x-\alpha_k)} = \frac{\sin m(x-\alpha_k)}{m(x-\alpha_k)}$$

ne surpasse pas l'unité. Mais le nombre des termes de Δ est égal à $2m+1$, donc Δ lui-même est de l'ordre de $1 : \sqrt{m}$ pour $m = \infty$.

Nous sommes ainsi ramenés à choisir S et R de manière que le rapport R : S soit un infiniment petit d'ordre égal ou supérieur à $\frac{1}{m\sqrt{m}}$. Pour cela, il faut calculer une limite inférieure de $Q = S + R$ et une limite supérieure de R. C'est ce que nous allons faire.

60. Limite inférieure de Q. — Posons $Q = e^{-\sigma}$ et cherchons une limite supérieure de

$$\sigma = \sum_{m+1}^{\infty} -\log\left(1 - \frac{m^2x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Comme x^2 reste $\leqslant \pi^2$, on a

$$\sigma < \sum_{m+1}^{\infty} -\log\left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right) < -\int_0^{\infty} \log\left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right) dt,$$

car, pour $t \geqslant m$, la fonction $-\log\left(1 - \frac{m^2}{t^2}\right)$ est une fonc-

tion de t positive et décroissante. Une intégration par parties donne, sans difficulté,

$$\int \log\left(1-\right)\frac{m^2}{t^2}\,dt = (t-m)\log\left(1-\frac{m}{t}\right)+(t+m)\log\left(1+\frac{m}{t}\right)$$

$$\int_m^\infty \log\left(1-\frac{m^2}{t^2}\right)dt = -2m\log 2;$$

d'où $\sigma < 2m\log 2$ et

$$Q = e^{-\sigma} > \frac{1}{4^m}.$$

61. Limite supérieure de R. — Nous avons posé (n° 58)

$$Q = \prod_{m+1}^{\infty}\left(1-\frac{m^2x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

tandis que

$$\frac{\sin mx}{mx} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{m^2x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

En effectuant, de part et d'autre, les produits indiqués, on obtient respectivement deux développements en séries potentielles (le second bien connu) de la forme

$$Q = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p a_p (mx)^{2p}$$

$$\frac{\sin mx}{mx} = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{(mx)^{2p}}{(2p+1)!}.$$

On aperçoit immédiatement que le coefficient positif

a_p satisfait à la condition

$$a_p < \frac{1}{(2p+1)!},$$

parce que, dans les produits effectués, a_p se présente comme une somme de termes de même signe et $\frac{1}{(2p+1)!}$ aussi, mais tous les termes qui composent a_p entrent aussi dans la composition de $\frac{1}{(2p+1)!}$.

D'autre part, nous allons montrer que, si le reste de la série Q après le terme de degré $2p$ n'est pas nul, il a le même signe que le terme suivant, pourvu que $|x|$ soit $\leqslant \pi$. A cet effet, posons (t restant $\leqslant m^2$)

$$t = \frac{m^2 x^2}{\pi^2}, \qquad Q = \varphi(t) = \prod_{m+1}^{\infty}\left(1 - \frac{t}{k^2}\right)$$

et développons $\varphi(t)$ par la formule de Maclaurin; le terme qui suit celui de degré p en t (ou $2p$ en x) et le reste de la série après ce même terme sont respectivement

$$\frac{t^{p+1}}{(p+1)!}\varphi^{(p+1)}(0) \quad \text{et} \quad \frac{t^{p+1}}{(p+1)!}\varphi^{(p+1)}(\theta t),$$

où $(0 < \theta < 1)$. Ces deux expressions ne seront pas de signes contraires si $\varphi^{(p+1)}(t)$ ne change pas de signe dans l'intervalle de 0 à m^2. Je dis qu'il en est bien ainsi.

En effet, si $\varphi^{(p+1)}(t)$ changeait de signe pour $t < m^2$, la dérivée du même ordre du polynôme

$$\prod_{m+1}^{n}\left(1 - \frac{t}{k^2}\right),$$

dérivée qui converge uniformément vers celle de $\varphi(t)$ quand N tend vers l'infini, devrait aussi changer de signe dès que N serait suffisamment grand. Or, ceci n'a pas lieu, car, ce polynôme ayant toutes ses racines réelles, inégales et $> m^2$, les racines de ces dérivées sont dans le même cas.

Nous avons ainsi établi que le reste de la série Q, s'il n'est pas nul, a le même signe que le premier terme négligé. Il en résulte qu'il sera égal à une fraction seulement de ce terme, car, la série Q étant à termes de signes alternés, l'erreur change de signe quand on prend un terme de plus.

Soit donc S la somme des termes de la série Q de degrés $\leqslant 2p$ en x, et R le reste. On aura, $|x|$ étant $\leqslant \pi$,

$$Q = S + R$$

$$|R| < a_{p+1}(m\pi)^{2p+2} < \frac{(m\pi)^{2p+2}}{(2p+3)!}.$$

Comme on a d'ailleurs, par la formule de Stirling,

$$(2p+3)! > \sqrt{2\pi(2p+3)}\left(\frac{2p+3}{e}\right)^{2p+3},$$

il vient, en définitive, pour S de degré $2p$,

$$|R| < \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2p+3)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{m\pi e}{2p+3}\right)^{2p+2}.$$

62. Détermination de S. — Il nous suffit (n° 59)

de choisir S de manière que le rapport R : S soit un infiniment petit d'ordre égal ou supérieur à $1 : m\sqrt{m}$. Mais, Q étant égal à R + S, il suffit pour cela que le rapport R : Q soit de cet ordre. Cette condition est réalisée *uniformément* si l'on a

$$R < \frac{Q}{m\sqrt{m}}.$$

D'après les deux numéros précédents, cette inégalité aura lieu si l'on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(2p+3)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{m\pi e}{2p+3}\right)^{2p+2} \leqslant \frac{1}{m\sqrt{m}\,4^m},$$

et *a fortiori* si l'on a (puisque p sera $> m$)

$$\left(\frac{m\pi e}{2p+2}\right)^{2p+2} \leqslant \frac{1}{4^m} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{2p+2}{m\pi e}\right)^{2p+2} \geqslant 4^m.$$

Telle est la condition qui doit déterminer la valeur de p. A cet effet, posons

$$2p+2, = m\pi e\,.\,h;$$

il viendra, pour déterminer h,

$$h^{\pi e h} \geqslant 4,$$

d'où

$$h \log h \geqslant \frac{\log 4}{e\pi}.$$

Comme $h \log h$ est $> h - 1$, on satisfera à cette condition en posant

$$h - 1 \geqslant \frac{\log 4}{\pi e},$$

d'où

$$2p + 2 \geqslant m(\pi e + \log 4).$$

On peut donc prendre pour degré 2p *de* S *le plus grand nombre pair inférieur à la quantité* m $(\pi e + \log 4)$.

Cette condition détermine le polynôme S : il est formé de la somme de tous les termes du développement de Q en série potentielle dont le degré ne surpasse pas $2p$.

63. Degré de la formule d'interpolation. — Revenons à notre formule d'interpolation parabolique

$$F_1(x) = PS \sum_{k=-m}^{+m} (-1)^k \frac{f(\alpha_k)}{x - \alpha_k} \frac{Q_k}{S_k},$$

où l'on a

$$P = x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_k^2}\right), \qquad Q = \prod_{k=m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_k^2}\right)$$

et où S est la somme des termes de degrés inférieurs à $m(\pi e + \log 4)$ dans le développement de Q en série potentielle. Q_k et S_k sont des constantes (valeurs de Q et S au point α_k).

Le degré de P est $2m + 1$; celui de S est $< m(\pi e + \log 4) < 9{,}92\ldots m < 10\,m$; donc le degré de F_1 est inférieur à

$$(2m + 1) + (10m) - 1 = 12m.$$

De là le théorème suivant qui servira de conclusion à ce chapitre :

64. Théorème. — *Si* f(x) *est une fonction continue*

et à variation bornée dans l'intervalle (a, b), *on peut définir un polynôme de degré* $< 12\,m$ *qui coïncide avec* $f(x)$ *pour* $2m + 1$ *valeurs de* x *en progression arithmétique* (*de la valeur* a *à la valeur b*) *et qui tend uniformément vers* $f(x)$ *dans cet intervalle quand* m *tend vers l'infini.*

Ce polynôme est donc de degré environ six fois plus élevé que celui de Lagrange.

NOTE

sur l'approximation par un polynôme d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée (*).

65. — Nous voulons rattacher, en terminant, aux calculs exposés dans les pages précédentes la solution d'une question intéressante : *Avec quelle approximation*

(*) Cette note se rattache au mémoire que nous venons de présenter sur l'approximation des fonctions par des polynômes et qui a paru dans le numéro précédent du *Bulletin*. Quand on emploie la méthode de WEIERSTRASS, la nôtre ou celle de M. LEBESGUE (voir les *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, de M. E. BOREL, chapitre IV. Paris, G. V., 1905), on trouve pour un polynôme de degré n une approximation de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Les méthodes basées sur l'emploi des séries trigonométriques comme celles de MM. LERCH, VOLTERRA, PICARD, pourraient conduire à une approximation de l'ordre de $1 : n$. L'approximation à laquelle nous arrivons dans cette note est aussi de l'ordre $1 : n$, mais elle est beaucoup meilleure que les précédentes. Je ne pense pas que l'on se soit déjà occupé de la comparaison des diverses méthodes au point de vue que nous indiquons ici. Il serait très intéressant de savoir s'il est impossible de représenter l'ordonnée d'une ligne polygonale avec une approximation d'ordre supérieur à $1 : n$ par un polynôme de degré n. Nous posons la question sans la résoudre.

peut-on représenter, dans un intervalle donné, une fonction également donnée, par un polynôme dont le degré ne surpasse pas une limite assignée $2n$?

On peut donner à cette question une réponse satisfaisante dans le cas où la fonction à représenter $f(x)$ possède une dérivée à variation bornée (n° 6) dans l'intervalle (a, b).

Cette réponse s'appuie sur un théorème intéressant par lui-même et que nous allons préalablement démontrer.

Soit $f(x)$ une fonction continue de x dans l'intervalle (a, b) et qui s'annule aux deux limites a et b. Nous supposons qu'elle s'annule partout en dehors de cet intervalle. Nous supposons aussi qu'elle a une dérivée à variation bornée dans l'intervalle (a, b) et nous désignons par V la variation totale de cette dérivée dans *l'intérieur* (n° 8) de cet intervalle. Dans ces cas, la variation totale de la dérivée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ est égale à

$$V + \mu,$$

en désignant par μ la somme des valeurs absolues de $f'(a + 0)$ et $f'(b - 0)$.

On a alors le théorème suivant :

66. Théorème. — *Quel que soit* x, *la différence entre* f(x) *et l'intégrale*

$$I = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(\alpha)\,\frac{\sin m(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha,$$

où m *est une quantité positive d'ailleurs quelconque, ne*

surpasse pas, en valeur absolue, la limite

$$\frac{V + \mu}{\pi m}.$$

Comme on suppose $f(x)$ nulle en dehors de (a, b), on a

$$I = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\frac{\sin m(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha + x)\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

De cette relation, soustrayons la suivante multipliée par $f(x)$:

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\,d\alpha;$$

il vient

$$I - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin m\alpha\,d\alpha,$$

où l'on a posé, en abrégé,

$$\varphi(\alpha) = \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}.$$

Rappelons-nous que la variation totale de $\varphi(\alpha)$ ne surpasse pas celle de la dérivée $f'(\alpha)$ dans le même intervalle (n° 9). Écrivons alors

$$I - f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{k\frac{\pi}{m}}^{(k+1)\frac{\pi}{m}}\varphi(\alpha)\sin m\alpha\,d\alpha$$

et appliquons le théorème de la moyenne; μ_k désignant une valeur de $\varphi(\alpha)$ en un point de l'intervalle de $k\frac{\pi}{m}$ à $(k+1)\frac{\pi}{m}$, il vient

$$\begin{aligned} I - f(x) &= \frac{2}{\pi m}\sum_k (-1)^k \mu_k \\ &= \frac{1}{\pi m}\sum_k (\mu_{2k} - \mu_{2k-1}) \end{aligned}$$

$$\left| I - f(x) \right| < \frac{1}{\pi m}\sum_k \left| \mu_{2k} - \mu_{2k-1} \right| < \frac{V + \mu}{\pi m},$$

car la dernière somme $\sum_k$ ne surpasse pas la variation totale de $\varphi(\alpha)$, donc celle de f', dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

67. Approximation de I par un polynôme. — Nous allons maintenant chercher l'expression approchée de I par un polynôme *dans l'intervalle* (a, b) d'amplitude Δ.

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\xi = \alpha - x;$$

il vient

$$I = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(\alpha)\frac{\sin m\xi}{\xi}\,d\alpha.$$

Développons $\sin m\xi$ en série potentielle uniformément convergente; il vient

$$I = \frac{m}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_a^b f(\alpha)(m\xi)^{2k}\,d\alpha + R_n,$$

où l'on a

$$R_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k m^{2k+1}}{(2k+1)!} \int_a^b f(\alpha) \xi^{2k} d\alpha.$$

Les termes qui précèdent R_n forment un polynôme P_n en x de degré $2n$. Donc R_n est la différence entre I et ce polynôme. La question proposée est donc ramenée à l'évaluation de R_n.

Faisons une intégration par parties sur $\xi^{2k} = (x-\alpha)^{2k}$ et observons que $f(x)$ s'annule aux limites; il vient

$$R_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f'(\alpha) d\alpha \sum_{n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{(m\xi)^{2k+1}}{(2k+1).(2k+1)!}.$$

Cette dernière série est à termes de signes alternés et décroissants si l'on suppose (comme nous le ferons) que $|m\xi|$ est $< 2n+3$. Elle est alors égale à une fraction de son premier terme et l'on peut écrire, θ étant une fonction comprise entre 0 et 1,

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} m^{2n+3}}{(2n+3).(2n+3)!} \frac{1}{\pi} \int_a^b f'(\alpha) \theta \xi^{2n+3} d\alpha.$$

Mais ξ est positif avec $x-\alpha$ entre a et x, négatif entre x et b. Soit M le maximum absolu de $f(x)$ entre a et b; il vient, par le théorème de la moyenne,

$$\left| \int_a^b f(\alpha) \theta \xi^{2n+3} d\alpha \right| < M \left[\int_a^x - \int_x^b \xi^{2n+3} d\alpha \right]$$

$$< M \frac{(x-a)^{2n+4} + (b-x)^{2n+4}}{2n+4}.$$

Mais l'amplitude $b - a = \Delta$ et x est compris entre a et b; par conséquent,

$$(x - a)^{2n+4} + (b - x)^{2n+4} < \Delta^{2n+4}.$$

Il vient donc

$$|R_n| < \frac{M}{\pi m(2n+3)} \frac{(m\Delta)^{2n+4}}{(2n+4)!}$$

et, par la formule de Stirling,

$$|R_n| < \frac{M}{\pi m(2n+3)\sqrt{2\pi(2n+4)}} \left(\frac{m\Delta e}{2n+4}\right)^{2n+4}.$$

Il suffit donc que n soit suffisamment grand pour que R_n soit aussi petit qu'on veut.

68. Cas particulier. — Supposons que l'amplitude Δ de l'intervalle (a, b) soit $< \frac{1}{e}$ et prenons

$$m = 2n + 4;$$

il vient *a fortiori*

$$|R_n| < \frac{M}{\pi(2n+3)(2n+4)} < \frac{V + \mu}{\pi(2n+3)(2n+4)},$$

car le maximum absolu de la dérivée $f(\alpha)$ ne surpasse certainement pas sa variation totale $V + \mu$ (de 0 à 0).

69. Approximation de $f(x)$ par un polynôme. — 1° Supposons d'abord que l'amplitude de l'intervalle

(a, b) soit $\leqslant 1 : e$. Prenons comme expression approchée de $f(x)$ le polynôme P_n de degré $2n$ défini au n° 67. Faisons

$$m = 2n + 4.$$

La différence entre P_n et I dans l'intervalle (a, b) ne surpassera pas

$$\frac{V + \mu}{\pi(2n + 3)(2n + 4)};$$

celle entre I et $f(x)$ ne surpassera pas

$$\frac{V + \mu}{\pi m} = \frac{V + \mu}{\pi(2n + 4)}.$$

Donc la différence entre $f(x)$ et P_n ne surpassera pas la somme de ces deux limites :

$$\frac{V + \mu}{\pi(2n + 4)}\left[1 + \frac{1}{2n + 3}\right] = \frac{V + \mu}{\pi(2n + 3)}$$

dans l'intervalle $(a, b.)$

2° Supposons maintenant qu'il faille représenter $f(x)$ par un polynôme de degré $2n$ dans un intervalle d'amplitude Δ quelconque. Par la substitution linéaire

$$x = \Delta e y$$

on est ramené à représenter la fonction par un polynôme en y dans un intervalle d'amplitude $1 : e$. Mais ce changement multiplie la dérivée par Δe, donc aussi sa variation totale.

Le polynôme P_n de degré $2n$ en $y = \frac{x}{\Delta e}$ représentera $f(x)$ dans l'intervalle considéré avec une erreur moindre que

$$\frac{\Delta e}{\pi} \frac{V + \mu}{2n + 3}.$$

D'où la conclusion suivante :

70. Théorème. — *Si une fonction* f(x) *a une dérivée à variation bornée dans un intervalle* (a, b) *d'amplitude* Δ *et s'annule aux deux limites, elle peut être représentée dans cet intervalle par un polynôme de degré* 2n *avec une erreur absolue moindre que*

$$\frac{\Delta e}{\pi} \frac{V + \mu}{2n + 3},$$

où V *est la variation totale de la dérivée* DANS L'INTÉRIEUR *de l'intervalle et* μ *la somme des valeurs absolues des dérivées extrêmes* $f'(a + 0)$ *et* $f'(b + 0)$.

En particulier, ce théorème s'applique à la représentation par un polynôme de l'ordonnée d'une ligne polygonale.

La démonstration suppose que $f(x)$ s'annule aux deux limites a et b. Si cette condition n'avait pas lieu, on commencera par la réaliser en soustrayant de $f(x)$ un polynôme du premier degré. Ensuite on appliquera le théorème; la valeur de μ seule sera changée.

—

De l'induction de l'énergie sous ses trois formes, mécanique, électrique et électro-magnétique; par P. De Heen, membre de l'Académie.

AVANT-PROPOS.

Dans un récent article relatif à un travail de M. Rey, M. Duhem discute la question suivante : L'hypothèse physique a-t-elle une valeur de savoir (*)? C'est là une simple question de sentiment et tout à fait personnelle. A notre avis, il n'y a donc pas lieu de s'en occuper *si l'on se place au point de vue scientifique*. Que l'on croie ou que l'on ne croie pas à l'hypothèse, peu importe. En parlant *comme physicien*, nous dirons avec M. Duhem que les hypothèses ne sont ni *vraies* ni *fausses*, elles sont *commodes* ou *incommodes*, elles traduisent et relient les faits avec plus ou moins de facilité (**). Nous sommes, sous ce rapport, entièrement de son avis et il est regrettable que des chimistes tels que Sainte-Claire-Deville et Berthelot n'aient pas mieux compris cela; ils n'auraient pas com-

---

(*) *Revue générale des sciences*, janvier 1908.

(**) Nous ne persécuterons donc pas les croyants en la matière, ce qui serait faire preuve d'intolérance. Nous leur disons simplement que pour le classement des phénomènes de la physique il est plus commode de considérer la matière comme si elle était un mode de l'énergie, tout en leur laissant leur chère conviction.

battu la théorie atomique, qui est la théorie chimique la plus commode de toutes. Mais là où nous sommes en contradiction avec M. Duhem, c'est lorsqu'il dit : « Si le physicien juge commode de construire deux chapitres différents de la physique au moyen d'hypothèses qui se contredisent, il est libre de le faire. » C'est là ce que je pourrais appeler un *pis-aller;* s'il n'y a pas moyen de faire autrement, il faut bien passer par là, et c'est en réalité le cas de la physique actuelle. Mais il serait insensé de se résigner à perpétuer un pareil état de choses, et M. Duhem joue ici le rôle du renard de la fable. Si, généralisant la pensée de Duhem, nous disons non pas 2 chapitres, mais n chapitres, n pouvant devenir, du reste, aussi grand que le nombre de faits à relier, l'absurdité de ce raisonnement saute aux yeux, il y aurait autant de théories que de faits à expliquer, et la physique cesserait alors de s'appeler une science. Il est donc bien évident que tous nos efforts doivent tendre à ramener le nombre n à l'unité. Et surtout, il importe de ne pas se décourager et jeter le manche après la cognée, ainsi que les analystes semblent, non seulement le faire, mais le recommander. Ce qui peut paraître singulier, à priori, si l'on admet avec M. Poincaré qu'il existe une infinité de manières de réaliser ce desideratum.

Il vaut mieux adopter une hypothèse difficilement accessible au calcul et ne conduisant pas à des résultats qui se contredisent, que d'en admettre une pouvant se traduire aisément en langage rigoureux, mais conduisant au paradoxe.

C'est, en un mot, au calcul à s'adapter aux phénomènes de la nature, et non à la nature à se plier aux

facilités des calculateurs, de manière à construire une physique fictive et artificielle.

Au lieu de continuer à commenter, à l'aide de calculs transcendants ou autrement, les bases de notre science actuelle, et cela dans une certaine mesure comme le faisaient les commentateurs des textes d'Aristote, il importe maintenant d'examiner *ces bases elles-mêmes* et de voir s'il n'y a pas lieu de les compléter ou de les modifier. Or cela semble bien difficile, sinon impossible, si l'on ne se fait pas une conception *physique* des choses et si l'on cherche à se réfugier dans le ciel sans nuages de l'abstraction. Nous verrons, par exemple, combien une conception physique de la masse facilite la liaison des faits, de même que la conception physique du potentiel.

Ce qui semble caractériser notre époque, si l'on se place au point de vue des sciences physiques, se trouve dans la puissance d'analyse et d'expérimentation des maîtres actuels. Mais, d'autre part, les vues théoriques soumises à ces puissants moyens ne sont pas celles qui s'imposent, si l'on prend pour guide cette pensée que le plan de la nature est *un*, qu'elle ne fait pour ainsi dire que *se répéter* dans des modes ou dans des phases différents, mais analogues.

En adoptant les expressions de Pascal, nous dirons que l'esprit étroit et fort est actuellement fréquent, alors que l'esprit large et faible fait défaut. Les puissants télescopes de l'esprit n'ont plus de chercheurs. La vision de la nature prise dans son ensemble échappe. On peut exprimer ici le regret de voir ces esprits se repousser, alors qu'en réalité ils doivent se compléter, les uns possédant les qualités que les autres ne possèdent pas.

Mais il entre malheureusement trop souvent dans l'esprit humain cette pensée vaniteuse que les qualités que l'on possède sont les seules qui doivent être prises en considération.

Il ne suffit plus à la physique d'*analyser* les synthèses du passé, et la théorie des électrons n'est qu'une espèce de perfectionnement de la théorie des deux fluides. Quelque puissante que puisse être la méthode et quelle que soit la puissance de ces esprits commentateurs, l'épuisement ne tardera pas à se manifester, de même qu'à la lecture des textes d'Aristote. Nos efforts doivent tendre actuellement surtout à imaginer une nouvelle synthèse, capable de faire disparaître l'incohérence de notre physique moderne et à laquelle les analystes semblent se résigner, comme à une chose fatale, par cela que *leur puissante mentalité ne peut s'appliquer qu'à l'analyse de la synthèse elle-même, qu'ils ne peuvent modifier*.

La chaleur, la lumière, l'électricité et le magnétisme, la matière sont des manifestations énergétiques de la *substance*, elles ne possèdent aucune réalité intrinsèque.

Nous pensons que ce sera seulement lorsque cette pensée aura pénétré les esprits des physiciens, qu'il sera possible de réaliser une science physique douée d'une certaine unité.

Le moment est donc venu de fournir aux mathématiciens de nouveaux sujets d'analyse, de nouvelles synthèses, de reprendre pour modèle les illustres maîtres qui ont fourni au calcul ces premières bases actuellement insuffisantes. J'ai nommé les Franklin et les Faraday.

Alors que des esprits éminents, tels que Poincaré, s'imaginent que c'est la physique mathématique, c'est-à-dire l'analyse, qui doit jouer ce rôle dans la science,

l'analyse n'analyse pas les faits, elle analyse les synthèses. Donc, dans le processus de l'évolution de la physique, il y a à considérer : 1° l'expérience ; 2° la synthèse ; 3° l'analyse ; 4° l'expérience confirmatrice.

La synthèse et l'analyse peuvent du reste se succéder dans une seule et même œuvre, il en est par exemple ainsi dans l'œuvre de Fresnel, mais la synthèse doit nécessairement précéder, qu'elle soit apparente ou inapparente, consciente ou inconsciente.

Un exemple simple sera celui d'une courbe reliant plus ou moins une série de points donnés par l'observation. Ce qu'on analyse, ce ne sont pas les points plus ou moins irréguliers fournis par l'expérience, mais la courbe qui les relie d'une manière plus ou moins satisfaisante. Cette courbe représente la synthèse basée sur l'hypothèse et, *au sens rigoureux* du mot, nous pourrions en concevoir une infinité très rapprochées les unes des autres qui satisferaient à la solution du problème, alors qu'*au sens pratique* on pourra se contenter d'une seule, si l'observation offre un degré d'approximation suffisant.

Un grand défaut de l'école à laquelle nous faisons allusion consiste encore à se laisser prendre un peu naïvement aux mirages de la nature, qu'elle se hâte de prendre pour des choses réelles, auxquelles ils appliquent l'abstraction. Tombés ainsi dans le piège, elle aboutit à la création d'une physique incohérente dans laquelle elle se complait, au lieu de chercher d'abord à établir une conception concrète *équivalente* à la réalité, mais ne la conduisant pas immédiatement à des conclusions illogiques. C'est ainsi que nous sommes amené à substituer à la conception concrète de l'électricité une conception concrète du potentiel électrique.

Songeant à la mentalité des physiciens de notre époque, je pense qu'il s'est établi quelque chose d'analogue à la différence qui existe entre l'homme sauvage et l'homme civilisé, si l'on compare la mentalité des premiers maîtres à ceux d'aujourd'hui.

Tout le monde sait jusqu'à quel point l'esprit d'observation et l'adresse sont développés chez le sauvage. Seul vis-à-vis de la nature, ses moyens de lutte et de défense sont rudimentaires, la valeur de l'homme elle-même doit se substituer à la puissance des moyens. Au contraire, l'homme civilisé, armé de ces moyens puissants, se fie bien plus à ceux-ci qu'à lui-même. N'en est-il pas de même pour le physicien d'aujourd'hui? Armé de l'analyse et d'instruments de haute perfection, ce sont pour ainsi dire *ces moyens* qu'il charge de faire évoluer la physique, et l'on voit sa pensée s'atrophier progressivement, ainsi que son sens de perception de la vérité, tel le sauvage qui se civilise progressivement tout en voyant son adresse et la finesse de ses sens s'atténuer. Dans un roman plein de finesse, intitulé *La guerre des mondes*, Wells nous montre les machines des Marsiens comme étant presque plus intelligentes qu'eux-mêmes. Si je ne craignais de froisser mes contemporains, je serais bien tenté d'assimiler les mathématiques appliquées à la physique à ces machines.

La conséquence de ceci est que le sens de perception sera souvent bien plus développé chez un débutant physicien, à la condition que son cerveau ait atteint toute sa maturité. Cela a paru si anormal aux physiciens que, lorsque Gustave Le Bon eut fait l'une des découvertes les plus considérables du siècle, celle de la radioactivité (bien qu'il n'entre nullement dans ma pensée de le sui-

vre dans ses développements sur la mécanique, mais cela n'a rien à voir avec le jugement que je viens de porter), ils se cotisèrent pour lui enlever le mérite et les honneurs qui lui revenaient de plein droit, cela du moins dans la mesure de leurs moyens.

Plus l'homme acquiert ce qu'on pourrait appeler la *civilisation scientifique* et plus aussi il perd la faculté d'orientation dans la science en général, ce qu'on pourrait appeler l'*instinct de la science*. Il ne m'appartient évidemment de porter ce jugement que pour la science dont je m'occupe.

H. Poincaré fait remarquer, en parlant de l'hypothèse, que les physiciens craignent de plus en plus de généraliser par cela que les savants de chaque siècle se moquent des généralisations de leurs prédécesseurs. Je ferai remarquer à ce sujet que cela ne prouve pas pour leur intelligence et que pour ma part je me moque des futurs moqueurs, et éventuellement des présents qui, par hasard, s'occuperaient de mes écrits, et cela pour l'excellente raison que la succession des erreurs à travers les siècles constitue aussi la succession des étapes dans le voyage vers la vérité. Le plus sûr moyen d'enrayer l'évolution des sciences consiste à prendre de pareilles moqueries en considération.

Les généralisations les plus fausses ont rendu des services à la science; les exemples abondent dans l'histoire, et actuellement la théorie des électrons en constitue une nouvelle démonstration, et si on la combat, il faut être assez sérieux pour ne pas en rire, bien qu'en réalité le sort réservé aux corpuscules et aux fluides lumineux et calorifiques eût dû prémunir ses créateurs contre pareille hypothèse.

Qu'on ne suppose pas maintenant qu'il soit entré dans notre pensée que la théorie que nous proposons donnera immédiatement la solution de toutes les questions : nous sommes au contraire certain que celui qui l'étudiera, rencontrera des difficultés nombreuses; des questions qui semblaient simples se présenteront sous un aspect plus compliqué, par exemple la fonction de la température. Nous la proposons uniquement afin d'éviter les absurdités évidentes à priori sur lesquelles nous insisterons, tout en ayant la conviction qu'une étude longuement poursuivie dans cette direction permettra d'aplanir les difficultés inhérentes à toute théorie naissante.

Poincaré fait une réflexion extrêmement juste dans son livre *La science et l'hypothèse*, lorsqu'il dit en parlant de la théorie de la lumière : « Tous ces rapports seraient demeurés inaperçus si l'on s'était douté d'abord de la complexité des objets qu'ils relient. Il y a longtemps qu'on l'a dit : Si Tycho avait eu des instruments dix fois plus précis, il n'y aurait jamais eu ni Kepler, ni Newton, ni Astronomie. C'est un malheur pour une science de prendre naissance trop tard, quand les moyens d'observation sont devenus trop parfaits. »

Nous disons que tel est le cas de la physique, mais, puisque nous sommes avertis, il est de notre devoir de tâcher de faire abstraction des détails pour ne voir que les grandes lignes, sans nous laisser dévier de l'idée maîtresse par le fouillis qui l'encombre. Tâchons donc de procéder pour la physique ainsi que Tycho a procédé (*)

(*) Tout en évitant d'établir une analogie entre la matière et le monde sidéral, piège dans lequel on est trop souvent tombé par suite de la vaine conception d'atomes et de points matériels comparables à de petits corps possédant une série de propriétés mystérieuses.

pour l'astronomie, ou plus exactement ainsi qu'il aurait dû procéder, même s'il avait su. Il faut avoir ce courage qui n'est pas exempt de dangers; mais seul il permet d'espérer le succès, la création d'une physique *une* et cohérente.

Les propriétés intrinsèques et extrinsèques de la matière et la notion de masse.

Une question qui s'impose actuellement est celle qui consiste à se demander quelles sont les propriétés inhérentes à la matière et celles qui ne le sont pas.

L'exemple suivant fera saisir notre pensée. Lorsque nous considérons la matière au-dessus du zéro absolu, elle possède une certaine quantité d'énergie thermique. C'est là une propriété *intrinsèque*, que l'on pourrait encore désigner sous le nom de *propriété réelle*, car cette énergie est bien renfermée *dans* la matière elle-même. Mais lorsque nous plaçons le doigt sur la surface d'un corps et que nous le qualifions de *froid* ou de *chaud*, la propriété de froid ou de chaud est une propriété *extrinsèque*, par cela qu'elle est une fonction de l'ambiance. Si le doigt est plus chaud que la surface, il y a écoulement de l'énergie chaleur du doigt vers la surface et nous disons que la surface est *froide*, et réciproquement si elle est *chaude*. On pourrait aussi désigner ces propriétés sous le nom de *propriétés virtuelles*.

Nous avons montré que le potentiel électrique constituait également une propriété intrinsèque de la matière, mais que l'état électrique constituait une propriété virtuelle ou extrinsèque de même que le chaud et le froid.

C'est en cela que nous nous trouvons en opposition formelle avec presque tous les physiciens de l'époque, non seulement parce qu'il nous répugne d'admettre une absence complète d'unité dans le plan de la nature, mais aussi parce qu'on ne peut rattacher la théorie du potentiel électrostatique à la conception des corpuscules négatifs et positifs, qui sont les analogues de corpuscules de froid et de chaud.

Mais s'il est important de distinguer ce qui est *réel* de ce qui est *virtuel* pour la chaleur et pour l'électricité, il n'est pas moins intéressant de poser la même question lorsqu'il s'agit de l'*inertie*.

Nous sommes si accoutumés à constater que lorsque nous jetons une pierre ou un objet quelconque il faut dépenser de l'énergie, qu'il répugne d'imaginer une *substance* dont l'existence serait aussi réelle que celle de la pierre, mais qui ne serait pas douée de cette propriété. On peut même se demander si la terminologie *matière* convient encore à un pareil état, et cependant tout nous porte à croire que l'inertie n'est qu'une propriété *virtuelle* ou *extrinsèque* de ce que nous appelons matière. Si, en un mot, nous considérons un volume donné de substance *absolument* isolée ou libre dans l'espace, on ne pourra plus dire d'elle qu'elle est incapable de modifier par elle-même son état de repos ou de mouvement; ou plus exactement une force aussi petite qu'on le voudra, sera capable de modifier, d'une manière indéfiniment grande, l'état de repos ou de mouvement d'une quantité indéfiniment grande de substance.

Un bloc de pierre, par exemple, *n'est pas doué de masse* lorsqu'il est à l'état de repos ou à l'état de mouvement; la masse ne *prend naissance* que lorsque nous

voulons modifier l'état de repos ou l'état de mouvement, et il ne s'agit ici nullement d'une simple différence de manière de s'exprimer.

Avant de montrer quelle est la cause possible de la qualité de la matière que l'on appelle *inertie*, il importe d'appeler toujours l'attention du lecteur sur la nécessité d'une semblable recherche. Le but de la science physique n'est nullement d'établir une croyance ou une hypothèse plus ou moins vraisemblable, mais surtout de tendre à la réalisation d'une physique présentant une certaine unité. Nous définirons la science physique comme consistant dans *l'art d'établir une liaison entre les faits que la nature nous présente et d'en prévoir de nouveaux*. Les faits pouvant du reste se diviser en deux grandes classes : les faits qualitatifs (par exemple les propriétés des rayons X) et les faits quantitatifs, la connaissance de la qualité devant nécessairement précéder la connaissance de la quantité. On ne peut mesurer la superficie d'une île qu'après sa découverte, et beaucoup de physiciens semblent croire qu'il n'y a plus d'île à découvrir, à l'instar des philosophes qui ont eu l'illusion de croire que les écrits d'Aristote renfermaient toutes les connaissances.

Il importe d'abord de diminuer dans la mesure du possible l'incohérence qui caractérise la physique actuellement.

C'est ainsi que nous voyons, d'une part, la nécessité d'attribuer à l'espace éthéré une cohérence telle que l'acier le plus dur ne peut nous en fournir qu'une faible image. Sans quoi, comment interpréter la vitesse excessive de propagation de l'onde lumineuse? Lodge, par exemple, pense que la densité de l'éther doit être dix milliards de fois plus forte que celle du platine. Mais

alors comment se fait-il que les corps célestes circulent dans l'espace sans rencontrer de résistance apparente? Il résulte de cette dernière considération que presque tous les physiciens ont attribué, au contraire, à l'éther une densité d'une faiblesse extrême. Mais encore, en admettant cette dernière hypothèse, on se demande comment l'attraction newtonienne peut se transmettre par l'intermédiaire d'un milieu aussi rare. L'attraction que le soleil exerce sur notre globe est capable, comme le fait remarquer Guillaume, de briser un câble d'acier de 5,000 kilomètres de diamètre.

Il importe donc d'abord de rechercher une hypothèse capable de faire disparaître ces contradictions. Il est indifférent, du reste, qu'on puisse en imaginer plusieurs, mais il est *indispensable* d'en imaginer *une* d'abord.

Dans la lecture de cette note, le lecteur devra s'habituer à concevoir les notions de masse et de quantité de matière, comme étant de natures complètement différentes, bien que la notion de masse puisse être utilisée à la mesure de la quantité de matière, au même titre qu'une tension superficielle peut, par exemple, être utilisée pour la mesure d'une différence de potentiel ou que le frottement déterminé par le mouvement de billes égales entre elles et se déplaçant dans un milieu visqueux, peut servir à la mesure ou à la détermination du nombre de ces billes. En un mot, la masse n'étant pas l'équivalent de la quantité de matière, n'en représentera plus qu'une fonction.

La matière, ainsi que nous l'avons dit, ne renferme pas la masse en elle-même, mais la masse prend naissance lorsque l'on détermine une variation de l'état de mouvement.

Au lieu de partir de la considération de la matière à laquelle on attribue des propriétés fictives telles que celles d'exercer une action à distance et de posséder également en elle-même la propriété d'inertie, il est préférable, en se plaçant au point de vue de l'homogénéité de la science physique, de partir de la considération de la *substance* universelle remplissant tout l'univers et de l'*énergie*.

Les deux entités irréductibles ne sont pas *force* et *matière*, mais bien *force* et *substance*.

L'*éther* étant de la *substance* qui a déjà assimilé de l'énergie, la *matière* se manifestant dans le milieu éthéré lorsque l'énergie s'y manifeste en quantité telle qu'elle détermine la rupture de ce milieu.

Il est un fait qui frappe à première vue l'attention : c'est celui de l'*induction* électro-magnétique ou électrique, que l'on considère celle produite par une demi-oscillation, ou celle déterminée par un grand nombre d'oscillations, et qui correspond au rayonnement.

Ces phénomènes constituent la base du mode de transmission de l'énergie électrique (*) ou électro-magnétique dans l'éther.

(*) Déjà en 1814 le génie de Fresnel avait parfaitement conscience de l'analogie qui existe entre le mode de transmission de l'énergie électrique et la transmission de l'énergie lumineuse et calorifique. Écrivant à son frère Léonor, il disait : « En attendant, je t'avoue que je suis fort tenté de croire aux vibrations d'un fluide particulier pour la transmission de la lumière et de la chaleur. On expliquerait l'uniformité de la vitesse de la lumière comme on explique celle du son: *et l'on verrait peut-être dans les dérangements d'équilibre de ce fluide la cause des phénomènes électriques....* »

Telle est la pensée qui nous a porté à ériger en principe que *l'énergie ne peut se transmettre dans le milieu éthéré* (se dissiper ou devenir utilisable) *sous une forme quelconque, à moins qu'il ne se produise une variation de mouvement.*

Le processus de la communication ou de l'induction de l'énergie mécanique, par ce qu'on appelle *masse matérielle*, sera le même que si l'on considérait la forme électrique ou électro-magnétique de l'énergie.

Nous pouvons maintenant préciser davantage la propriété qu'il faut attribuer à l'éther ou à la substance pour mettre les faits en concordance.

Considérons deux tranches d'éther ou plus généralement de *substance* primordiale glissant l'une sur l'autre et animées d'une vitesse relative v, que nous supposerons uniforme. L'espace parcouru étant e après un temps t,

$$v = \frac{de}{dt},$$

et si nous représentons par f le frottement que ces deux tranches d'éther exercent l'une sur l'autre, le travail développé pendant l'unité de temps aura pour mesure

$$T = vf = f\frac{de}{dt}.$$

Si nous considérons la matière comme une manifestation de l'énergie dans la substance ou comme un tourbillon développé (avec rupture) dans celle-ci, nous voyons d'une part que ce tourbillon ne peut se conserver, ou, en d'autres termes, que la matière ne peut être

considérée pratiquement comme immuable qu'à la condition de poser $f = 0$ et $T = 0$. La même condition est du reste exigée par l'observation de l'absence de frottement sensible lorsque la matière se déplace dans l'espace dit vide.

Considérons donc l'éther comme un milieu dont le frottement intérieur est nul, tel serait par exemple un liquide indéfiniment fluide, soumis à une forte pression et au sein duquel se développerait un mouvement gyrostatique, capable d'amener la rupture de ce liquide.

Le tourbillon creux ainsi obtenu représentera l'image de la matière. Si on le suppose animé d'un mouvement de déplacement *uniforme*, ce transport se fera également sans frottement.

C'est ici maintenant qu'intervient la propriété fondamentale qu'il faut attribuer à la substance; elle peut s'exprimer en disant que si son frottement intérieur est nul dans le cas d'un déplacement relatif uniforme, il atteint par contre des dimensions colossales s'il se produit une *variation* de cet état de mouvement. Cette *espèce* de frottement différentiel φ sera proportionnelle à la variation de la vitesse et nous pourrons écrire

$$\varphi = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2e}{dt^2},$$

m représentant une constante que l'on désigne sous le nom de *masse*.

Ce frottement s'évanouit donc si v devient constant.

La force destinée à vaincre le frottement différentiel et nécessaire pour faire passer le mobile, le tourbillon t

(fig. 1), de la vitesse relative V à la vitesse relative V+v est égale à la force nécessaire pour faire revenir la vitesse relative V+v à la vitesse relative V.

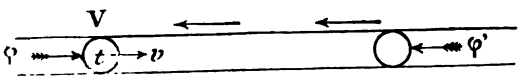


FIG. 1.

Dans cette opération, il n'y a pas lieu de faire intervenir la masse comme propriété *intrinsèque*, elle intervient simplement comme force déterminant la *variation* de vitesse relative à laquelle correspond l'équivalent d'un *certain* frottement.

Le frottement *différentiel* est donc un phénomène réversible, il est susceptible de rendre l'énergie qu'il a absorbée, alors que le frottement normal a pour conséquence une dissipation de l'énergie qui a été communiquée.

$$\frac{dv}{dt} = 1 \qquad \varphi = m.$$

La masse d'un corps n'est autre chose que le frottement intérieur différentiel qu'il faut vaincre pour faire varier sa vitesse d'une unité (1 centimètre) *pendant l'unité de temps* (1 seconde).

Lorsque nous écrivons pour un corps animé d'une vitesse uniforme que la quantité de mouvement est égale à mv, cela ne veut nullement dire que *pendant* cet état de mouvement uniforme la matière est douée d'une masse, mais bien qu'il a fallu vaincre une force mv au

début de l'expérience afin de réaliser la vitesse v, ou égale à m si cette vitesse avait été égale à l'unité, force qui réapparaîtra en signe contraire lorsque nous ramènerons la vitesse à zéro. Mais pendant l'état de mouvement uniforme, pas plus que pendant l'état de repos, la masse n'intervient, *elle est non existante.*

La force totale a donc pour mesure le produit de force m par unité vitesse communiquée, par le nombre de ces unités v.

En réalité, masse, coefficient de frottement différentiel, coefficient de transmissibilité ou de dissipation de l'énergie, résistance électrique, sont des appellations synonymes.

Lorsqu'il s'agit du courant électrique, un état vibratoire établit pour ainsi dire une *masse permanente* R, ou un frottement normal, les choses se passent comme si un volant animé d'une vitesse uniforme éprouvait un certain frottement. Dans ces conditions, le travail aura pour mesure le produit de la force Ri multiplié par le chemin parcouru i, soit Ri^2, i étant désigné sous le nom d'intensité.

La masse perd maintenant sa signification vague de *quantité de matière*, elle cesse d'autre part de ne représenter qu'un coefficient abstrait dénué de toute signification physique. Elle peut se manifester en l'absence de toute matière lorsque l'on considère deux tranches successives de substance. Mais cette notion de masse nous fournit un moyen de mesurer la quantité de matière.

Lorsque l'on pose la question de savoir si l'éther possède une masse, on peut répondre sans hésitation que cette masse est énorme. C'est grâce à cette masse que l'induction est capable de transmettre l'énergie.

Mais il faut bien se garder d'attribuer à ce mot un *sens intrinsèque*, car si une portion d'*éther* ou de *substance* se trouvait isolée dans l'espace, celle-ci prise dans son ensemble n'offrirait aucune résistance à une variation de mouvement, elle serait dénuée de masse, elle cesserait de posséder le principal attribut de la matière.

Il est curieux de remarquer que Faraday déjà ne croyait plus à l'existence de la matière : « Ce qu'on appelle matière n'était à ses yeux qu'un assemblage de centres de force », J.-B. Dumas.

Nous voyons que c'est en admettant cette manière de voir que l'*induction de l'énergie de mouvement* dans la matière devient un cas particulier de l'induction en général, laquelle nécessite toujours une variation. La loi de Lentz s'applique à l'induction de l'énergie mécanique ou de mouvement.

La résistance qui s'observe lorsqu'on modifie l'état de mouvement d'un corps est toujours due à l'ambiance, ce mot étant du reste pris dans son sens le plus large, car on doit considérer les éléments matériels ou les tourbillons de rupture comme étant si espacés les uns des autres, que chacun d'eux subit l'action du milieu comme s'il était absolument libre.

Lorsque l'on observe la résistance qu'un champ magnétique oppose au mouvement d'un disque en cuivre tournant, par exemple, il se produit l'analogue de ce qui se passerait si l'on accroissait la masse ou le frottement différentiel ; nous avons induit de l'énergie électro-magnétique, et cette énergie joue un rôle analogue à celui que jouerait l'*énergie-matière* dans une phase différente.

La substance est donc douée d'un frottement intérieur nul, excepté peut-être, ainsi que nous allons le voir, si

la différence des vitesses de deux tranches voisines se rapproche de la vitesse de la lumière. Elle n'est pas douée d'inertie, mais possède sans doute des propriétés transcendantes que nous serons toujours condamnés à ignorer. C'est au seuil de l'examen relatif à la nature de cette substance que s'arrête le savoir de l'homme. Nous sommes obligés d'attribuer à celle-ci certaines propriétés, afin de rendre les sciences physiques cohérentes. Mais on ne pourra sans doute jamais fournir de ces propriétés une interprétation plausible. D'autre part, nous avons reculé notre point de départ qui n'est plus la *matière*, mais bien cette *substance*. Lorsque l'énergie s'y localise, elle produit les éléments constitutifs de l'éther et de la matière. Ce sont les prolongements de l'énergie matière dans la substance environnante qui déterminent les trois champs *que nous connaissons* (bien qu'il en existe sans doute un plus grand nombre).

Une question intéressante se pose actuellement. La notion de la masse est réduite à un frottement différentiel, et la notion de quantité de matière est réduite à celle de quantité d'énergie de mouvement gyrostatique.

Dans ces conditions, peut-on dire que la grandeur de la masse mesure la quantité d'énergie-matière?

Considérons une substance déterminée, par exemple du plomb. Cette énergie-matière déterminera, en se prolongeant dans l'espace, le champ newtonien, la pesanteur.

Un certain poids correspond donc à une certaine quantité d'énergie-matière et à une certaine masse, à un certain frottement différentiel.

Ici il est évident que si nous doublons le nombre

d'éléments énergétiques nous doublerons aussi le poids et la masse.

Mais la question est moins simple si nous considérons des substances différentes, par exemple du plomb et du cuivre.

Nous pouvons maintenant concevoir deux systèmes énergétiques différents, mais en quantité telle qu'ils déterminent le même champ newtonien, c'est-à-dire qu'ils ont même poids.

Or l'expérience montre, ce qui n'était nullement évident *ni même probable* à priori, que ces systèmes différents soumis par hypothèse à la même action de la pesanteur, subissent la même accélération, possèdent donc le même frottement intérieur différentiel.

Il est bien difficile d'admettre qu'il puisse en être ainsi, à moins de supposer qu'en réalité les éléments de la phase I matière, qui déterminent le champ newtonien, ne soient tous identiques les uns aux autres.

Cette conclusion est actuellement pour ainsi dire vérifiée par l'expérience, car on ne conçoit pas, s'il en avait été autrement, comment des corps simples pourraient se transformer les uns dans les autres ainsi que Ramsay vient de le démontrer.

Les choses se passent comme si des cordes identiques étaient susceptibles de s'enrouler différemment.

Voici par exemple comment on pourrait concevoir la transformation de l'élément cuivre en élément lithium. Considérons une fibre matière *ab* possédant une quantité d'énergie de gyration toujours la même, autour de l'axe *ab* (fig. 2). Cette fibre *ab* est susceptible de s'enrouler en hélice de manière à réaliser l'*ion*, lequel est

donc doué d'une deuxième énergie de gyration autour de l'axe *a'b'* (fig. 3). Ce serait cette dernière énergie seule qui serait susceptible de se modifier par les moyens dont nous disposons actuellement. Ce serait cette variation qui présiderait non seulement à la transformation des corps simples, mais sans doute aussi aux variations allotropiques qui se réalisent plus aisément, mais qui sont probablement les mêmes. On ne voit pas, par exemple, pourquoi le phosphore rouge différerait moins du phosphore blanc que le soufre du sélénium.

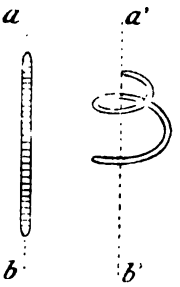


FIG. 2 et 3.

Nous considérons ici les ions constitutifs de l'atome tourbillon de troisième ordre (fig. 4). Ce qui différencierait les atomes serait donc l'énergie électromagnétique.

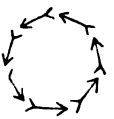


FIG. 4.

Nous pourrions encore concevoir que la fibre *ab* (fig. 2) se comporte à peu près comme la corde capable d'émettre un son fondamental et une série d'harmoniques. Considérons alors la fibre *ab* (fig. *4bis*) pliée de manière à réaliser une double hélice du moment où son mouvement s'établit autour de l'axe *mn*. Dans ces conditions, l'ion affectera la forme fondamentale A, soit une forme harmonique telle que B.

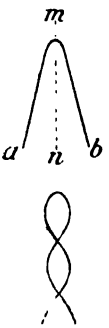


FIG. 4bis.

Ce ne sont là évidemment que des possibilités qui nécessiteront une analyse ultérieure.

Il est facile de voir que le *frottement différentiel* ou la

masse qui s'exerce sur cette hélice *ion* (fig. 3) si l'on met celui-ci en mouvement, sera indépendante du sens de ce déplacement dans l'espace. En un mot, la masse mécanique n'est pas une grandeur vectorielle. La masse d'un cristal est la même, que l'on mette celui-ci en mouvement suivant le sens de son axe ou suivant une direction quelconque. Nous n'avons à considérer ici que le tourbillon matière de premier ordre *ab* (fig. 2) enroulé en hélice.

Mais le mouvement gyratoire de l'hélice autour de l'axe *a'b'* engendre un tourbillon de second ordre (fig. 3).

Cela étant, considérons deux ions *a'* et *b'* placés l'un vis-à-vis de l'autre (fig. 5); ils possèdent la même quantité

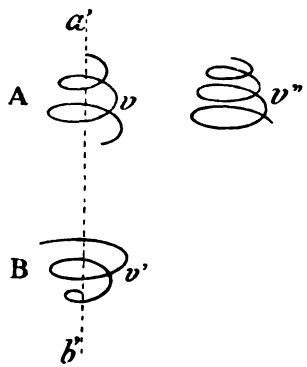


Fig. 5.

d'énergie-matière, mais leur énergie de gyration autour de l'axe *a'b'* est différente. L'un possède une vitesse de gyration *v* par hypothèse plus grande que *v'*.

Dans ces conditions, tant que la différence de vitesse entre *v* et *v'* sera constante, ces deux ions ne pourront exercer aucune action l'un sur l'autre, *v* ne pourra pas

modifier v'. Mais si à un moment donné il se produit une variation de v, l'action de *masse* ou le frottement différentiel se manifestera et chaque tourbillon prendra la moitié de la somme des deux énergies.

La masse ainsi considérée est la *masse électrique*, elle est vectorielle et longitudinale. C'est elle qui préside au nouveau phénomène que nous avons montré par l'expérience, l'*induction électrique*.

Quand Maxwell dit que lorsqu'un conducteur est soumis à l'influence il y a un courant instantané, il a *absolument* raison, et le mécanisme de ce courant *est le même* que celui de *tout autre*. Il n'y a ni courant de convection, ni courant de transport, ni courant électrolytique, il *n'y en a qu'un seul*, celui qui correspond à la manifestation de la masse électrique. Dans la théorie des électrons, actuellement si en honneur, on suppose que des corpuscules énergétiques (?) sont transportés de A à B ou réciproquement, et l'on ne voit pas du tout comment cela peut se manifester au travers d'un diélectrique, lequel, par hypothèse, s'oppose précisément au transport de ces électrons. Nous verrons, dans la seconde note, quelles sont les circonstances dans lesquelles cette théorie des électrons devient un véritable paradoxe.

Si nous pouvons concevoir une masse vectorielle électrique dans le sens longitudinal, nous pourrons également concevoir une masse vectorielle dans le sens transversal. Si, en effet, nous considérons un ion en v'' (fig. 4), celui-ci pourra transmettre son énergie gyrostatique à v et réciproquement au moment où ceux-ci ou l'un de ceux-ci subiront une variation d'énergie. Nous aurons ainsi la conception de la masse électro-magnétique.

Si nous considérons un corps matériel soumis simultanément, par suite de variations, aux trois actions que nous venons de considérer, nous pourrons écrire

$$F = m\frac{d^2e}{dt^2} + \mu\frac{d^2e'}{dt^2} + \nu\frac{d^2e''}{dt^2}.$$

Dans cette expression, m, μ et ν représentent les masses mécanique, électrique et électro-magnétique.

Nous pouvons conclure actuellement que ces trois masses ont même origine; la masse dite mécanique, de même que les autres, est une propriété *extrinsèque* ou apparente de la matière.

Demandons-nous maintenant si ces frottements intérieurs différentiels, ou masses, dépendent de la vitesse. Des expériences tendent à montrer que la masse électro-magnétique dépend de la vitesse lorsque celle-ci se rapproche de la vitesse de la lumière. Cependant, l'interprétation de ce fait n'est pas aussi simple qu'elle le parait au premier abord. En effet, il se peut que la masse ne s'accroisse qu'en apparence et il s'ajouterait alors au frottement différentiel un frottement réel et F se mettrait alors sous la forme

$$F = m\frac{d^2e}{dt^2} + \mu\frac{d^2e'}{dt^2} + \nu\frac{d^2e''}{dt^2} + (f_m + f_\mu + f_\nu).$$

f_m, f_μ et f_ν représentant des frottements réels correspondant aux déplacements mécanique, électrique et électro-magnétique.

Mais à priori rien ne nous empêche d'écrire

$$m\frac{d^2e}{dt^2} + \mu\frac{d^2e'}{dt^2} + \nu\frac{d^2e''}{dt^2} + (f_m + f_\mu + f_\nu) = m_1\frac{d^2e}{dt^2} + \mu_1\frac{d^2e'}{dt^2} + \nu_1\frac{d^2e''}{dt^2}$$

et dans ces conditions il y aurait réellement accroissement de masse ou de frottement différentiel puisque l'on aurait

$$m_1 > m, \qquad \mu_1 > \mu \qquad \text{et} \qquad \nu_1 > \nu.$$

Il n'est pas absolument impossible de résoudre cette question par l'expérience, car si m_1, μ_1, ν_1 sont réversibles, il y aura bien accroissement de masse; si, au contraire, elles ne sont que partiellement réversibles, une partie de cette grandeur devra être attribuée à un frottement normal. Cette note montre donc que la notion de masse et la notion de quantité de matière ou mieux de quantité d'*énergie-matière* sont parfaitement indépendantes l'une de l'autre.

C'est ainsi que pour concevoir le frottement intérieur d'un liquide, nous n'avons pas besoin de concevoir un solide qui s'y déplace. De même pour concevoir dans la substance le frottement différentiel qui représente la masse, il est entièrement inutile d'introduire la considération de la matière qui s'y déplace également.

Si l'on considère le mot *masse* dans un sens restreint, comme synonyme de quantité de matière ou de quantité d'énergie-matière, il est évident que celle-ci ne peut pas plus varier avec la vitesse que la quantité d'énergie-chaleur d'une chaudière que l'on déplacerait avec une vitesse plus ou moins grande, mais il en est tout autrement dans le sens plus large que nous lui attribuons. Puisque la matière n'a pas de masse par elle-même, il serait plus exact de dire que les actions dites à distance s'exercent en raison directe du produit des *quantités pondérables* de matière, et non en raison directe du produit des masses ou de choses qui n'existent pas,

lorsque la matière est à l'état de repos ou de mouvement uniforme.

Telle est la conception généralisée du mot *masse*, qui, pour nous, entre en jeu suivant les mêmes lois, dans des phases différentes : *Elle ne représente plus que le moyen employé par la nature pour transmettre ou dissiper l'énergie.*

Cette question n'intéresse en aucune manière la mécanique, qui reste ce qu'elle était, elle n'intéresse que la physique.

Remarquons enfin que si la considération de la *masse* ou du frottement différentiel entraîne avec elle la conception d'un phénomène réversible correspondant à l'emmagasinement et à la restitution de l'énergie, la *masse permanente* ou le frottement proprement dit, engendré par la vibration, entraîne la conception de l'irréversibilité correspondant cependant à une succession d'éléments réversibles.

L'induction électrique alternante et non alternante.

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué précédemment, la théorie des phénomènes électriques que nous proposons se trouve nettement en opposition avec celle qui est admise par les physiciens actuels, et il ne s'agit nullement d'une simple différence de manière de s'exprimer, les résultats expérimentaux auxquels elle conduit étant, du reste, en contradiction avec la théorie des électrons.

Deux raisons nous ont porté à défendre notre manière de voir : la première est d'ordre philosophique, la deuxième est d'ordre pratique.

La raison d'ordre philosophique se trouve dans l'unité de conception du plan de la nature; on n'induit pas de l'électricité ou on ne modifie pas la répartition d'électrons positifs ou négatifs dans un conducteur, pas plus qu'on ne modifie la répartition de corpuscules de froid ou de chaud lorsque l'on approche d'un corps un autre corps à haute température. On induit un potentiel de même qu'on induit une température, et c'est tout.

Quant au deuxième ordre de motifs, il se trouve dans cette question de fait que la théorie corpusculaire est en contradiction avec l'observation, au même titre que l'était la théorie des corpuscules lumineux.

Or, vouloir substituer une théorie ondulatoire à la théorie des corpuscules électriques constitue une transition aussi importante que celle qui s'est produite pour la chaleur et pour la lumière, lorsque la théorie de Huyghens et Fresnel a été substituée à celle de Newton. Il importe peu maintenant que cette transition se fasse par notre génération ou par la suivante, il suffit de savoir si elle devra nécessairement se réaliser un jour.

Les considérations que nous venons de développer sur la nature de la masse en général nous permettent de prévoir dans quelles conditions l'énergie gyrostatique de deuxième ordre de l'ion, ou l'énergie électrique, sera capable de se transmettre d'un ion à un autre. Nous pouvons dire que cela arrivera chaque fois que l'ion subit une variation de vitesse de gyration ou d'énergie gyrostatique, ou de potentiel électrique, ou, ce qui reviendrait au même, si la distance de deux ions considérés vient à varier. Ce sera dans ces conditions seulement que l'énergie gyrostatique pourra se transmettre. Il y aura alors manifestation de masse.

Considérons un conducteur A (fig. 1) auquel nous communiquerons à un moment donné un certain potentiel électrique correspondant par exemple à un accroissement d'énergie gyrostatique. Cet accroissement d'énergie se transmettra partiellement à B, grâce à la manifestation de masse dans le tourbillon transmetteur *au moment* où le potentiel de A a varié.

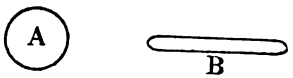


Fig. 1.

Mettons maintenant B en communication avec le sol; il reprend le zéro conventionnel, et si ensuite on supprime ce contact, ce zéro subsistera en B, car A ne variant pas par suite de la suppression de ce contact, il ne pourra se produire aucune action de masse, aucune communication d'énergie.

Supposons en dernier lieu que l'on décharge A : son énergie diminue. Il y a maintenant manifestation de masse et cette diminution d'énergie ou de vitesse se transmettra partiellement à B au même titre que l'accroissement d'énergie dans la première phase de l'expérience. B possédera une quantité d'énergie gyrostatique inférieure à celle de l'espace. Il sera donc, par rapport à ce milieu, dans une situation inverse de celle qui correspond à la première phase.

Les potentiels de B sont donc alternants. Il s'agit de l'expérience classique que l'on désigne sous le nom d'*influence* et que nous désignerons sous le nom d'*induction alternante*.

Mais ne pouvons-nous pas attribuer à A la faculté de

communiquer à B son énergie d'une manière permanente, de produire d'une manière pour ainsi dire non interrompue l'action de masse? Rien ne sera évidemment plus facile : il suffira pour cela de communiquer au potentiel de A un mouvement vibratoire, même de *faible amplitude*, mais suffisamment rapide. L'action de masse se manifestera alors d'une manière pour ainsi dire continue. Pour employer une image de mécanicien, les ions de A seront constamment *embrayés* avec les ions de B.

S'il en est ainsi, la première phase de l'expérience se produira de même que dans le cas précédent, mais il en sera tout autrement dans la deuxième phase. Lorsque B cessera d'être à la terre, il reprendra spontanément le potentiel du milieu créé par A et nous pourrons capter autant de fois que nous le voudrons l'énergie transmise par A. En un mot, l'espace diélectrique compris entre A et B sera devenu conducteur de l'énergie.

Le *courant d'énergie* manifesté par le moyen qui le produit *dans tous les cas* s'est établi. Ce moyen est la manifestation de masse dans l'éther ou la manifestation du frottement différentiel. La dernière phase de l'expérience sera la même que dans le premier cas, A est toujours embrayé avec B. Si l'énergie de A devient normale lorsqu'on le décharge, B redeviendra également normal. Les choses se passeront comme si, dans la première expérience, B n'avait pas été mis à la terre.

Telle est l'induction électrique non alternante, car dans le cours de ces opérations le potentiel de B a toujours été de même signe que celui de A.

Remarque. — Il importe ici de faire une remarque

importante. Le milieu compris entre A et B n'est jamais un conducteur parfait, ce qui, du reste, n'existe pas; il n'y a pas de substances infiniment conductrices de l'énergie. Il résulte de ceci que B ne prend le potentiel qui correspond au milieu qu'après un temps appréciable. Ceci nous fournit l'interprétation de la possibilité de développer sur l'induit une charge résiduelle, de même signe que l'inducteur et se maintenant après la suppression de ce dernier. Ce phénomène s'observe en faisant usage d'un induit très développé, par exemple une grande feuille d'étain placée à plusieurs mètres de l'inducteur pulsant.

On remarque dans ces conditions que le temps nécessaire pour amener l'induit à son potentiel maximum est relativement long; il résulte de ceci que pendant le temps *très court* de la décharge, l'induction en sens contraire n'a pas le temps de se produire, et, dès lors, l'induit conserve une charge résiduelle.

Le deuxième fait qui résulte de la même circonstance est très important parce qu'il va nous permettre de montrer un fait sans réplique possible à la théorie électronique. Il représente l'inverse du premier. Si, avant d'avoir donné à B le temps de se recharger, nous déchargeons ou nous éloignons A, B prendra par induction un potentiel de signe contaire à celui de A. Les choses se passeront alors de la même manière que dans l'induction alternante après que B a été en contact avec le sol.

Cette remarque va nous permettre de construire une machine *absolument* ininterprétable à l'aide de la théorie régnante. L'*induction électrique non alternante*, que nous avions désignée sous le nom d'*induction électrostatique*, y est démontrée sans prêter le flanc aux hypothèses compliquées que l'on pourrait faire sur les perturbations

possibles d'un diélectrique, afin d'expliquer qu'ils peuvent se comporter comme un conducteur dans la théorie des électrons.

Un condensateur *c* (fig. 2) est mis en contact avec un conducteur *a*, lequel est muni d'un balai *b* frottant contre le disque en verre D, sur lequel on a collé une série de petits conducteurs *n*. Deux balais *b'*, *b''* mettent le disque à la terre; enfin un balai *b'''* établit le contact avec un électroscope E.

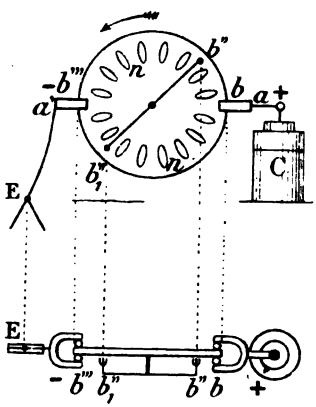


FIG. 2.

Quel sera le résultat possible dans la théorie actuelle si l'on détermine la rotation du disque dans le sens de la flèche? Tout ce que l'on peut concevoir, c'est qu'une certaine quantité d'électricité fournie par le balai *b* au disque D échappe au balai *b''* et que cette quantité d'électricité positive est transportée par convection en *a'* ou à l'électroscope. Ce résultat sera du

reste exactement le même si la rotation s'exécute en sens inverse.

En réalité, il est tout différent : la rotation rapide du disque vis-à-vis du balai b rend le potentiel de c et du secteur ab'' vibrant et capable de déterminer l'induction non alternante. Mais d'après la remarque que nous venons de faire, les points du secteur $b''a'$ qui s'éloignent de a et du secteur ab'' positifs, prennent un potentiel négatif, et en s'approchant de a' déterminent également sur ce dernier conducteur un potentiel négatif; l'effet inverse tend à se produire pour le secteur $a'b''$, mais celui-ci étant plus petit que le premier, il n'y a pas compensation et a conserve une charge négative.

Le même mécanisme s'opère dans le sens positif pour la demi-circonférence $b''ab''$.

Si maintenant nous déterminons la rotation en sens contraire, l'inverse se produira également, et les éléments $a'b''$ négatifs en s'écartant de a' négatif tendent à rendre ce dernier positif, et l'action exercée par les éléments positifs ab'', qui s'approchent de a', sera la même. En résumé, l'électroscope E retombe.

Une machine de Wimshurst à un plateau se trouve ainsi réalisée.

Le courant qui détermine la transmission de l'énergie électrique est donc dû à un gyrostat orienté, propulsif et aspirant, doué d'un mouvement oscillatoire longitudinal comparable à celui qui détermine le son.

Lorsque cette oscillation determine la transmission de l'énergie gyrostatique latéralement, elle s'appelle oscillation électro-magnétique.

Il y a donc à considérer trois énergies de mouvement

qu ise superposent : 1° l'énergie oscillatoire, relativement très faible et qui ne constitue pour ainsi dire que le *moyen* permettant de *réaliser* la masse et la transmission ; 2° des énergies gyrostatiques propulsives, lesquelles représentent la presque totalité de l'énergie mise en jeu ; 3° l'énergie de propulsion et d'aspiration.

L'image qui synthétise le mieux l'idée que l'on doit se faire du courant est celle-ci : Imaginons un tube sonore muni à chacune de ses extrémités d'une embouchure ; chacune de celles-ci est soumise à une succion ou à une dépression, mais dans une mesure inégale. Dans ces conditions, nous aurons à considérer d'abord le courant d'air se dirigeant de l'embouchure la moins déprimée à l'embouchure la plus déprimée et ensuite la vibration résultant de ce mouvement. Dans le phénomène électrique, la cause de la dépression se trouve dans le mouvement de rotation de l'ion hélicoïdal, la cause de la vibration, qui permet la transmission de l'énergie gyrostatique ou du potentiel d'une embouchure à l'autre, se trouve dans l'état de mouvement des ions. Cet état de mouvement peut être développé artificiellement dans les diélectriques, il se produit spontanément dans les conducteurs.

On n'a considéré jusqu'à présent dans l'éther que l'oscillation transversale électro-magnétique ; l'oscillation longitudinale ou électrique n'est jamais entrée en jeu dans l'interprétation des phénomènes généraux de la nature.

Voici comment nous avons encore montré l'existence de l'induction électrique. Nous faisions à cet effet usage de deux appareils permettant de déceler l'existence d'ondes développant des phénomènes électriques, d'un tube à

limaille et d'un tube à vide de Plücher susceptible de devenir luminescent.

Cela étant, l'un des pôles d'une puissante bobine était mis en communication avec une longue tige de laiton qui se prolongeait jusque dans l'appartement voisin. On avait de plus pris la précaution d'entourer cette tige d'un long tube en verre.

Voici maintenant la succession des expériences :

1° La tige en laiton est simplement en communication avec l'un des pôles *sans que la bobine soit le siège de décharges oscillantes*. Dans ces conditions, le tube à limaille placé dans le voisinage de la tige ne fonctionne pas, mais, d'autre part, le tube à vide tenu à la main s'illumine.

On serait déjà tenté de tirer de cette première observation cette conclusion que les oscillations mises en jeu n'activant pas le tube à limaille, elles ne sont pas de nature électro-magnétique, mais cette conclusion donnerait lieu à l'objection suivante : le tube à limaille, de même que l'œil, n'est sensible qu'à des oscillations électro-magnétiques de certaines longueurs d'onde ; et ceci est absolument établi, car s'il en était autrement, le tube à limaille deviendrait conducteur lorsqu'il est soumis aux petites longueurs d'ondes caloriques ou lumineuses, de même il serait sensible à une série de courants alternants de faible fréquence, ce qui n'est pas le cas.

Afin d'éliminer cette objection, quelques fils métalliques ont été tendus longitudinalement sur le tube en verre renfermant le conducteur métallique ; ces fils étaient, de plus, mis à la terre. Dans ces conditions, quelle que pût être la longueur d'onde des oscillations électro-magnétiques, celles-ci ne pouvaient être arrêtées d'une manière sensible par ces quelques fils ; et cependant,

toute luminescence du tube disparaît. Nous pouvons déjà conclure maintenant que les oscillations mises en jeu ne sont pas de nature électro-magnétique, mais bien de nature électrique.

Supposons maintenant que la bobine devienne le siège d'une décharge oscillante. Alors la longueur d'onde est convenable pour activer le radio-conducteur, et celui-ci fonctionne d'une manière aussi parfaite, que les fils métalliques soient tendus ou ne le soient pas (on s'était assuré que l'étincelle qui jaillissait dans l'appartement voisin n'avait pas d'action à travers le mur). Mais le résultat obtenu par le tube à vide est toujours le même; il cesse de fonctionner lorsque les fils sont tendus, par cela qu'ils absorbent les oscillations électriques. Notre conclusion sera donc la même que dans le premier cas.

Mais est-ce simplement une différence de longueur d'onde qui fait que l'oscillation électro-magnétique qui émane de la tige agit sur le radio-conducteur lorsque l'étincelle jaillit, et n'agit pas dans le cas contraire? Nous ne le pensons pas. Il nous paraît plus vraisemblable de supposer que dans le premier cas la propagation de l'énergie se fait suivant le mode qui correspond à la propagation de l'onde calorique, alors que dans le deuxième cas elle ne se fait que suivant le mode qui correspond à la propagation de la lumière. Nous verrons dans la note suivante en quoi consiste cette différence qui paraît ininterprétable si l'on se borne à concevoir une énergie oscillante.

Une autre question peut également trouver une interprétation facile : celle qui est relative à l'entraînement de l'éther par la matière. Elle peut se résoudre par cette

phrase qui n'est qu'un corollaire de ce que nous avons dit : Si l'éther est doué d'un mouvement oscillatoire, il sera entraîné, puisqu'il y a manifestation de masse, comme l'indique l'expérience de Fizeau. Dans le cas contraire, comme la matière ne peut exercer aucun frottement sur l'éther, il ne peut y avoir entraînement, toute manifestation de masse ayant cessé d'exister.

Il est donc inutile de se livrer à de longs calculs et à des réflexions transcendantes pour reconnaître que la théorie des électrons est *complètement insuffisante* pour établir le classement ou pour prévoir les faits les plus simples et les plus facilement observables. Si donc on nous accusait de faire de la fantasmagorie, il nous serait aisé de répondre que la théorie des électrons en constitue peut-être l'exemple le plus remarquable.

Les notes suivantes feront encore voir que l'incapacité de cette théorie s'accuse chaque jour davantage.

Quelle conclusion pouvons-nous tirer de ces considérations? Les mouvements dont nous avons parlé sont-ils réels ou fictifs? Nous pensons qu'ils sont réels, car nous voyons souvent les phénomènes électriques accompagnés de mouvements tourbillonnaires, et Zenger déjà avait la conscience profonde que l'électricité devait trouver son origine dans ces mouvements tourbillonnaires. Mais si nous faisons abstraction de tout cela et si nous admettons pour un instant qu'il s'agisse uniquement de mouvements fictifs, ceux-ci ne nous auront pas moins servi à classer des phénomènes, et, ce qui est beaucoup plus important encore, à en prévoir. Il ne serait, en effet, venu à la pensée de personne prenant pour base de classification la théorie des électrons, de se demander si une machine de Wimshurst à un plateau était capable de fonctionner;

l'induction électrique non alternante permettait seule de le prévoir, et cette induction elle-même est en opposition avec la théorie des électrons.

Pour les partisans de cette théorie, l'induction non alternante ne s'interprète que par le transport d'électrons dans un conducteur, alors que pour nous cette transmission d'énergie peut se réaliser dans les diélectriques et, d'autre part, l'action d'une charge, à distance, sur un corps neutre ne peut produire sur ce dernier qu'une inégale répartition des électrons, c'est-à-dire l'induction alternante.

De la possibilité théorique de transformer l'énergie de l'espace en énergie mécanique.

Nous disons énergie de l'espace au lieu d'énergie-matière, car, ainsi que nous l'avons montré, cette énergie n'est pas plus limitée à la surface matérielle apparente, que l'énergie d'un tourbillon de rupture n'est limitée à la surface de rupture elle-même.

Paradoxe de la théorie électronique. — La théorie des électrons nous enseigne que l'énergie électro-magnétique transmise par l'éther et assimilée par le récepteur, énergie dont le rayonnement calorifique ne constitue qu'un cas particulier, et ne représente autre chose que l'énergie du mouvement oscillatoire déterminée sous l'action du sillage produit par le mouvement circulaire d'un électron, la vitesse angulaire étant une fonction de la température. Lorsque cette énergie oscillatoire atteint le récepteur, elle y détermine un mouvement

d'agitation électronique, lequel ne semble avoir *aucune analogie* avec le mouvement circulaire du transmetteur.

On peut dès lors se demander comment il se fait que ce mouvement circulaire ne finit pas par s'amortir, ne pouvant être activé que par des mouvements incapables de le faire. On voit bien comment la chaleur peut être émise par un électron, mais on ne sait pas comment elle est absorbée. Nous sommes donc bien loin de pouvoir demander à cette théorie pourquoi le pouvoir absorbant est égal au pouvoir émissif. Mais on se trouve en face d'une circonstance bien autrement paradoxale si l'on examine les choses de plus près.

Partons de l'hypothèse admise que l'énergie transmise par un rayon calorifique, par exemple, est due uniquement à une énergie oscillatoire. Cette énergie oscillatoire détermine sur l'œil l'impression du rouge, par exemple ; sur le thermomètre, un accroissement de température. *Donc une quantité donnée d'énergie oscillatoire rouge produira toujours le même résultat, quelle que soit du reste son origine.*

Faisons maintenant l'expérience suivante : Prenons un prisme de sel gemme sur lequel nous dirigerons un faisceau de rayons émis par un corps incandescent, par exemple du fer au rouge, et introduisons dans un photomètre une portion donnée de ce rouge. Réalisons ensuite la même expérience avec du spath d'Islande introduit dans un tube de Crookes, lequel, de même que le fer incandescent, émet de la lumière rouge. Réglons enfin les choses de manière que l'intensité rouge soit la même sur les deux parties du verre dépoli. *Alors nous pouvons assurer, d'après la théorie électronique, que la quantité d'énergie est la même de part et d'autre,* ce à

quoi l'expérience donne un démenti formel. La quantité de chaleur recueillie dans le rouge émis par le spath d'Islande est nulle ou négligeable, alors que la quantité de chaleur renfermée dans le rouge du corps incandescent représente environ le dixième de la chaleur totale rayonnée.

Gustave Le Bon désigne ces manifestations luminescentes sous le nom de lumière froide. On peut en effet concentrer au foyer d'un grand miroir la lumière émise par des corps phosphorescents sans que l'on puisse déceler la moindre trace de chaleur.

Dans l'expérience faite avec le spath d'Islande, le verre dépoli reçoit presque exclusivement de l'énergie oscillatoire, énergie très faible, qui constitue le *moyen* de transmission de l'énergie calorifique ou gyrostatique.

Mais si le verre dépoli et le corps luminescent sont à la même température, possèdent des quantités équivalentes d'énergie gyrostatique, le *moyen*, *la masse ou le frottement differentiel* aura beau exister, il ne pourra pas servir à transmettre quoi que ce soit; mais il en sera tout autrement du rouge émis par le fer, dont les éléments sont doués d'énergie de gyration beaucoup plus grande, eu égard à la température élevée; là le *moyen oscillatoire* servira à transmettre de l'énergie gyrostatique, c'est-à-dire de la chaleur au verre dépoli.

Deux corps sont donc en équilibre de température lorsqu'étant tous deux doués de l'énergie de moyen ils possèdent des quantités d'énergie gyrostatique *équivalentes*, quantités qui peuvent varier avec la nature ou l'état physique du corps.

Mais nous pouvons concevoir dans une même molécule des gyrostats qui possèdent l'énergie de moyen et d'autres

qui ne la possèdent pas; dans ce dernier cas, il y aura emmagasinement d'énergie latente. Il suffira de communiquer une vibration pour que l'équilibre se rétablisse, soit avec dégagement de chaleur dans les combinaisons endothermiques, soit avec absorption de chaleur dans les combinaisons exothermiques, suivant que l'énergie de l'élément est plus petite ou plus grande que celle de l'espace. On sait qu'un simple choc suffit dans les combinaisons instables pour obtenir ce résultat.

Quelle signification devons-nous maintenant attribuer au zéro absolu? C'est la température à laquelle il n'y a plus manifestation de masse ou de vibrations, à laquelle il n'y a plus possibilité de transmission d'énergie. Quant au zéro absolu *réel*, lequel implique l'absence d'énergie, il correspondrait à l'évanouissement de ce que nous appelons matière.

L'égalité du pouvoir absorbant et du pouvoir émissif, dont il ne faut pas songer à chercher une interprétation dans la théorie électronique, se montre ici d'une manière aussi évidente que la faculté d'un diapason d'émettre et de recevoir la même note.

Considérons en effet deux ions *a* et *b* capables de vibrer synchroniquement, mais dont l'un, le transmetteur, possède une quantité de chaleur ou d'énergie gyrostatique plus grande que l'autre, le récepteur. Du moment où ce dernier recevra les vibrations du premier, le synchronisme des vibrations s'établira, *les deux ions seront embrayés*, et l'énergie gyrostatique du premier se transmettra au second jusqu'à ce que l'équilibre s'établisse. C'est là évidemment un phénomène réversible, car le transmetteur peut jouer le rôle de récepteur et réciproquement, et cela, comme nous le disions, de la

même manière que deux diapasons accordés dont le pouvoir absorbant pour le son est égal au pouvoir émissif.

Mais si les ions ne sont pas susceptibles de vibrer synchroniquement, le transmetteur n'exercera aucune action sur le récepteur, il n'y aura pas embrayage, et la chaleur, au lieu d'être absorbée, sera *diffusée*.

Nous voyons maintenant quelle est la cause de la couleur des corps.

Le cas le plus simple est celui des gaz, par exemple de l'air atmosphérique. La fibre atomique absorbe (nous verrons plus loin comment cet amortissement du mouvement oscillatoire peut se produire) certaines longueurs d'onde et *diffuse* les autres qui correspondent au bleu, de telle manière que l'air est bleu par transparence et par réflexion, et il en est de même des liquides. Ces corps se comportent donc comme des milieux troubles. La couleur vue par transparence serait donc pour ces corps toujours le résultat d'une espèce de diffusion atomique. Ce qui semble accorder les conceptions en apparence opposées de Lord Rayleigh et de Spring. Remarquons que si nous comparons ici les ions transmetteurs et récepteurs à des diapasons, l'ion récepteur cesse de vibrer en même temps que le milieu qui l'actionne.

La fibre ionique n'est donc nullement comparable à un petit corps opaque pour certaines radiations, mais à un fil qui diffuserait radicalement les radiations, qu'il n'absorbe pas. Nous pouvons donc appliquer à la matière transparente le principe d'Huyghens, d'après lequel chaque élément de l'espace se comporte comme un foyer d'ébranlement. Si les éléments sont suffisamment rapprochés, le milieu sera parfaitement interférent et, par

conséquent, le milieu sera transparent; il en est ainsi des solides et des liquides qui peuvent être optiquement vides, ainsi que le fait observer Spring, mais si les éléments sont très éloignés, l'interférence ne sera plus parfaite et le milieu sera comparable à un milieu trouble; ce sera le cas des gaz tels que l'air atmosphérique (*).

L'éther doit être considéré comme un milieu dont les éléments absorbent et émettent instantanément l'énergie qu'ils reçoivent, alors que pour l'élément matière l'énergie non assimilée est seule instantanément restituée au milieu, l'énergie absorbée ou assimilée n'est émise en général (sauf pour les surfaces métalliques polies) que lentement, sous forme d'émission de chaleur.

C'est donc là ce qui caractériserait la différence qui existe entre la conductibilité calorifique et le rayonnement calorifique.

La réflexion produite par la surface de séparation de deux milieux, lorsqu'il s'agit de diélectriques, est très intéressante par cela que le nombre d'éléments occupant la surface géométrique est insuffisant pour produire la sélection dont nous avons parlé, et qui se produit lorsque les rayons traversent une grande épaisseur. Il en résulte que cette surface se comporte d'une manière passive. De même qu'un mur qui réfléchirait indistinctement toutes les ondes liquides, ces surfaces réfléchissent indistinctement tous les rayons, quelle que soit la couleur du corps, ainsi que nous l'avons démontré par l'expérience.

(*) Spring pense que l'absence d'homogénéité de l'air peut amener le même résultat; dans ces conditions, le bleu du ciel serait d'autant plus sensible que l'air est plus agité. Il ne semble pas impossible de résoudre cette question par l'expérience.

Il en est en apparence autrement lorsqu'il s'agit de substances translucides et non transparentes, parce que, dans ce cas, des rayons réfléchis émanent d'une certaine profondeur.

Mais les métaux et, en général, toutes les substances à *éclat métallique* sont très intéressants, car il faut admettre pour ces corps que la vibration des ions ne cesse pas en même temps que celle du milieu transmetteur. L'amortissement n'est pas instantané, ainsi que dans les diélectriques, mais la vibration se propage longitudinalement le long de la fibre ionique. Nous voyons donc apparaître ici un mode de transmission de la vibration lumineuse, tout différent du mode de transmission *transversal* tel qu'il se produit dans l'éther. La propagation de l'énergie lumineuse devient l'analogue de la propagation de l'énergie électrique, avec cette différence toutefois que nous n'avons pas à faire intervenir ici l'orientation ionique. Donc : 1° plus la masse permanente ou la conductibilité de la chaîne ionique sera grande et plus également la vitesse de propagation de la vibration lumineuse sera grande; 2° les vibrations lumineuses qui se propageront le plus rapidement seront celles qui ont pour effet d'accroître le plus la masse permanente ou la conductibilité de la fibre. Ce sont les plus courtes. Le spectre sera donc renversé, nous obtenons la *dispersion anormale*.

Considérons par exemple de la lumière blanche tombant sur une lame d'or. L'ion or vibre de préférence à l'unisson avec la partie la plus réfrangible du spectre; du moment où l'une des faces reçoit cette vibration, elle traverse l'épaisseur de l'or et apparaît par transparence, de même que le son produit par un coup de marteau à l'extrémité d'une barre métallique ne tarde pas à se

communiquer à l'autre extrémité. Quant à l'autre partie des vibrations qui ne peut se transmettre, elle sera nécessairement réfléchie.

Les substances fluorescentes présentent les mêmes caractères que les métaux, mais lorsque l'épaisseur de ces derniers dépasse une certaine limite, l'amortissement ou la transformation de l'énergie de vibration en énergie de gyration finit par se produire.

L'énergie qui correspond au mouvement oscillatoire, si faible qu'elle soit, et que nous désignons sous le nom d'*énergie de moyen*, parce qu'elle constitue le moyen employé par la nature pour transmettre l'énergie de gyration incomparablement plus grande dans les manifestations de rayonnement calorifique, cette énergie de moyen, dis-je, que nous avons négligée, est cependant appréciable; elle préside aux réactions chimiques ainsi qu'au pouvoir ionisant d'une radiation. En effet, nous savons que c'est elle qui, d'après l'expérience de Bjerckness, détermine l'action répulsive de deux éléments ioniques consécutifs vibrant synchroniquement.

Cette action est donc celle qui produira le décalage ionique, c'est-à-dire la faculté réactionnelle de l'atome, ainsi que l'ionisation, et qui fournit la possibilité de transformer l'atome.

Le *rayonnement froid* exerce sur la plaque photographique une action analogue à celle du rayonnement qui entraîne la chaleur, c'est-à-dire de l'énergie de gyration.

Remarquons encore que l'énergie oscillatoire de moyen est très inégalement capable de transmettre l'énergie de gyration. Cette capacité dépendra évidemment de la longueur d'onde. Lorsque celles-ci sont trop petites, elles transmettent mal, ou même d'une manière inappréciable,

l'énergie-chaleur. Lorsqu'elles sont trop grandes, elles transmettent encore l'énergie de gyration, mais celle-ci se manifeste alors sous des formes variables, électrique ou électro-magnétique, suivant les circonstances de l'expérience, mais toujours transformables en énergie-chaleur.

Nous pouvons préciser davantage la question en distinguant les cas suivants :

A. La matière est en état d'équilibre gyrostatique avec le milieu ambiant. Nous pourrons dans ces conditions considérer trois cas : *a*) celui où les gyrostats ne sont pas doués de mouvements vibratoires. Alors ils ne pourront nécessairement émettre en aucun cas de l'énergie, attendu qu'il n'y a pas manifestation de masse; *b*) celui où une partie de ces gyrostats est douée d'un mouvement vibratoire très rapide, de manière à émettre la lumière froide du corps phosphorescent de Gustave Le Bon; *c*) celui où ces gyrostats sont doués d'un mouvement oscillatoire relativement très lent et très ample, l'oscillation électro-magnétique.

B. Supposons maintenant l'élément matériel dans un état de non-équilibre gyrostatique avec le milieu ambiant. S'il n'y a pas vibration, cette énergie sera inapparente, de même que dans le cas *a* l'énergie est latente, puisqu'il n'y a pas manifestation de masse. Si, au contraire, il y a vibration rapide, il y aura manifestation de masse et transmission d'énergie gyrostatique; ce sera le cas du fer rouge dans l'exemple que nous avons donné et de la combinaison exothermique ou endothermique, suivant que l'énergie du système est plus grande ou plus petite que celle du milieu.

Il y a ici une distinction à établir entre l'oscillation

électro-magnétique oscillante, à basse température, et l'oscillation électro-magnétique émanant de l'étincelle. L'oscillation hertzienne, oscillante à haute température, émet de l'énergie oscillatoire en même temps que de l'énergie de gyration, car ce que nous avons dit pour les petites longueurs d'onde s'applique évidemment aux grandes.

Lorsqu'un ion vibre, la variation de l'angle au sommet comporte une variation correspondante de l'énergie de gyration. Nous pouvons donc dire que l'oscillation de l'énergie de gyration donne naissance à un mouvement v (fig. 1), à une manifestation de masse normalement au mouvement gyrostatique. Donc, lorsqu'une oscillation de l'énergie de gyration se produit dans l'ion, les choses ne se bornent pas à cette manifestation, mais les mouvements oscillatoires v alternants donnent nécessairement lieu à une dissipation d'énergie. Cette *énergie de moyen* pourra être très petite par rapport à l'énergie gyrostatique transmise, ainsi que nous venons de le voir. Mais dans le cas de grandes oscillations, elle peut devenir très importante.

Fig. 1.

En résumé, lorsqu'il y a transmission d'énergie de gyration grâce à l'énergie de moyen, nous développons comme conséquence dans le récepteur des variations d'actions propulsives, et réciproquement, si nous utilisons l'énergie de moyen comme mode de transmission, l'énergie de propulsion acquise par le récepteur développera réciproquement, comme conséquence, de l'énergie de gyration pendant chaque demi-oscillation lors de la production de chaque courant alternatif induit.

Il est aisé de concevoir comment l'énergie condensée

dans la matière peut se libérer par suite de l'oscillation ou de l'apparition de la masse. Considérons (fig. 2) deux systèmes A, B à l'état d'équilibre énergétique; aucune transmission d'énergie n'est possible, les mouvements sont continus, il n'y a pas apparition de masse. Supposons que, à un moment donné, nous renversions le sens du mouvement de α, par exemple en retournant le système. L'apparition de masse qui en résultera aura pour effet d'amortir une partie de cette énergie, laquelle se dissipera dans la substance ambiante et amortira partiellement α' sans modifier la valeur de α'', ou en l'accroissant; un courant tendra donc à s'établir dans le sens de la flèche F.

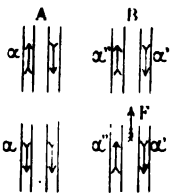


Fig. 2.

En un mot, nous aurons libéré une partie de l'énergie de A par un simple changement d'orientation. A joue donc le rôle de transformateur de l'énergie de l'espace.

Le renversement du courant induit peut s'exécuter de deux manières différentes : 1° il peut se produire avec renversement ionique *aa'* (fig. 3), ce qui est le cas habituel, et dans ce cas la propulsion α, développée par l'inducteur, détermine nécessairement un accroissement d'énergie de gyration dans le sens V (fig. 3) (les choses se passent comme si un tire-bouchon s'enfonçait plus rapidement); 2° sans renversement. Supposons que l'impulsion déterminée par l'inducteur se produise en sens inverse de la propulsion produite par l'ion, tout en lui étant supérieure (fig. 4). Dans ces conditions, le courant déterminera une diminution du mouvement gyrostatique;

Fig. 3.

Fig. 4.

il en sera ainsi lorsque l'ion ne peut se retourner par suite d'une espèce de calage, tel que celui que l'on doit admettre dans la soudure de deux métaux différents. Le premier cas correspondra à un échauffement instantané de l'induit, le deuxième cas à un refroidissement instantané.

Si nous nous reportons maintenant à ce que nous avons dit de la couleur des corps, nous voyons que l'amortissement ou la transformation de l'énergie de vibration en énergie de gyration de l'ion ne peut se faire qu'à la condition que chaque demi-oscillation détermine un renversement de l'ion.

Nous demanderons encore ici aux électronistes l'idée qu'ils se font dans leur théorie de courants produisant soit du froid, soit du chaud.

Nous voyons donc que l'énergie de moyen, qui pouvait être considérée comme négligeable dans le phénomène de la phosphorescence (bien que n'étant jamais nulle puisqu'elle agit sur une plaque photographique), est, au contraire, fondamentale dans les phénomènes électromagnétiques. Posons maintenant cette question qui présente une importance fondamentale : *Le deuxième principe de la thermodynamique est-il applicable à la fois au cas* A *et au cas* B?

En réalité, le deuxième principe doit se poser d'une manière plus large de la façon suivante : Étant donnés deux systèmes énergétiques A et B, chacun d'eux renfermant diverses formes de l'énergie, est-il possible que A puisse accroître la somme des énergies de B, si l'on suppose que B est le plus énergétique? On suppose la température de B plus élevée que celle de A.

L'expérience suivante montre la possibilité de cette opération.

Il résulte de ce que nous avons dit d'un corps *incandescent* rouge B et d'un corps *luminescent* rouge A que deux corps émettant la même radiation avec la même intensité, ne sont pas en équilibre de température.

Considérons un corps chaud émettant normalement des radiations, disposé dans une enceinte formée de lames thermochroïques incapables de leur livrer passage. Mais supposons qu'à l'extérieur de cette enveloppe se trouve un corps phosphorescent émettant des vibrations très rapides pour lesquelles l'enveloppe soit parfaitement transparente.

Il est évident que, dans ces conditions, le corps chaud, qui ne perd aucune énergie par son rayonnement, voit son énergie s'accroître par l'absorption des rayons émis par le corps phosphorescent froid.

Une deuxième question se pose maintenant. Cet accroissement d'énergie étant acquis par B sous une forme différente de l'énergie-chaleur, est-il possible de la ramener à cette forme?

En d'autres termes, si un corps froid ne peut accroître *directement* la température d'un corps chaud, est-il possible de réaliser cette opération *indirectement?*

La réponse à cette question est évidente. Considérons deux soudures thermo-électriques : il est évident qu'elles pourront élever la température du fil conducteur à une température plus élevée que celle des soudures. Ou encore, si, au lieu de considérer des oscillations très courtes, nous considérons des oscillations électro-magnétiques très longues, les courants induits pourront transformer l'énergie reçue en chaleur.

Nous concluons donc que si le deuxième principe de la thermo-dynamique est exact lorsque l'on ne considère que l'énergie-chaleur, il cesse de l'être pour l'énergie en général.

Le travail devient libérable alors même qu'il n'y a pas chute d'énergie.

En résumé : 1° lorsque deux ions ne sont pas en état d'équilibre gyrostatique et lorsque l'un communique à l'autre son excès d'énergie, grâce à l'*énergie de moyen*, le deuxième principe de la thermo-dynamique est applicable; 2° lorsque deux ions sont à l'état d'équilibre gyrostatique et lorsque l'un d'eux est doué d'un mouvement oscillatoire différent, il communique de l'énergie au deuxième, mais le second principe de la thermo-dynamique n'est plus applicable, car ils sont en équilibre de température.

Si donc le deuxième principe n'est pas toujours applicable, rien ne nous empêche d'émettre la possibilité de la transformation de l'énergie de l'espace en énergie mécanique sans dépense de travail.

Le deuxième principe nous obligeait à établir une différence de niveau thermique, d'où dépense d'une quantité de travail égale à celle recueillie lorsque le niveau se rétablit. Dans le cas contraire, rien ne nous force à exécuter ce premier travail, afin de recueillir ou de transformer l'énergie du milieu et de ne recueillir qu'une quantité d'énergie égale à celle dépensée.

Quel sera maintenant le processus de la transformation de l'énergie du milieu par l'ion?

Considérons à cet effet un ion A doué d'une certaine quantité d'énergie de gyration, et supposons maintenant que, sans rien changer à la quantité d'énergie qu'il pos-

sède, nous lui communiquions un mouvement vibratoire. L'énergie de vibration sera alors nécessairement empruntée à l'énergie de gyration et il en résultera un abaissement de température. Cela étant, deux phénomènes se produiront simultanément : d'une part, l'énergie d'oscillation pourra se communiquer à un récepteur (à la plaque photographique dans la phosphorescence, à l'induit dans l'induction électro-magnétique); d'autre part, l'abaissement de température qui tend à se réaliser continuellement est aussi continuellement compensé par l'énergie du milieu.

Concluons donc en disant qu'il suffit de donner à l'énergie de l'espace la forme vibrante ou la masse, au lieu de lui laisser la forme simplement gyrostatique, afin de voir apparaître l'énergie sous une forme sensible et de la rendre utilisable en quantité indéfinie.

Pour pouvoir libérer l'énergie du champ énergétique, il faut donc simplement transformer une partie de son énergie de gyration en énergie de vibration; le champ A deviendra alors le champ B.

Lorsqu'on soumet un rayon cathodique à un champ magnétique, en dirigeant ce rayon suivant la direction des lignes de force, on le voit s'enrouler et la température du tube s'accroît notablement. Quelle est l'énergie ici mise en jeu, pour déterminer cet accroissement de température? Est-ce l énergie du courant ou l'énergie de l'aimant? Il paraît difficile d'admettre que ce soit l'énergie du courant, car puisque la résistance croît par suite de l'allongement du circuit dû à l'enroulement, l'intensité du courant diminue, la force électro-motrice restant constante, donc le travail Ei diminue. Il semble donc bien ici qu'il y ait libération de l'énergie de l'aimant due à la manifestation de masse dans le rayon cathodique.

Nous considérons donc la possibilité de la libération de l'énergie-matière comme possible, en nous plaçant au point de vue théorique et expérimental.

Cette expérience, de même que le phénomène de Zeeman, présente, au point de vue qui nous occupe, une importance considérable, parce qu'elle nous montre la cause de la confusion à laquelle les électronistes devaient être fatalement amenés, entre le champ énergétique sans dissipation avec le champ de dissipation ou radiant. Nous voyons ici se produire la transformation de la première classe de champs en la deuxième. Le champ qui ne dissipait pas son énergie la dissipe par cela qu'on lui communique une masse permanente. Le rayon cathodique, ou la flamme dans le phénomène de Zeeman, se comporte comme des transformateurs de l'énergie latente en énergie apparente.

Lorsque l'on place le rayon cathodique dans le champ magnétique, ce rayon dépenserait donc l'énergie de ce dernier et, par conséquent, celle de l'aimant, mais d'une manière bien différente de celle qu'on serait tenté d'admettre à priori.

L'aimantation est le résultat de l'orientation des énergies gyrostatiques de l'aimant, et le rayon cathodique enroulé, bien loin de collaborer à la désorientation ou à la destruction de l'aimant, tend au contraire à le conserver, de même que le ferait une armature. Ce qui se détruit alors dans l'aimant, ce n'est donc pas l'orientation des atomes, mais le courant atomique, *c'est-à-dire l'atome*. Mais des milliers d'années seraient sans doute nécessaires pour reconnaître la perte de matière dégagée de l'aimant sous la forme ionique. Nous voyons ici se libérer l'énergie-matière ainsi que Gustave Le Bon l'avait si génialement prévu.

Considérons donc :

A. Le champ simplement énergétique, qui constitue en réalité le prolongement de l'énergie-matière dans l'espace environnant dans lequel ne se manifeste aucune dissipation d'énergie, à moins que l'on n'y produise une perturbation. Ce champ est le siège de mouvements gyrostatiques continus, sans aucune manifestation de masse ou de frottement différentiel ;

B. Le même champ énergétique constitué également par des éléments gyrostatiques auxquels mouvements s'ajoute le mouvement vibratoire, c'est-à-dire la masse permanente. Ce champ, à l'inverse du premier, est un champ de dissipation ou de radiation.

C'est ici encore que les électronistes se trouvent acculés à une impossibilité, par cela qu'ils confondent complètement ces deux ordres de choses.

D'après eux, l'électron tournant ne produit pas le champ simplement énergétique et capable de déterminer les actions dites à distance, mais bien le champ de radiation ou de dissipation. Le mouvement de gyration engendre une oscillation *o* (fig. 5) par suite d'une espèce de sillage dû au frottement de l'électron sur l'éther. Or il est évident que, grâce à ce frottement, l'énergie de gyration des électrons α s'amortira après un certain temps, à moins que cette énergie ne soit constamment compensée.

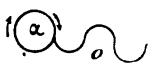


Fig. 5.

Et par quoi peut-elle l'être? Uniquement par une oscillation comparable à celle qui est émise, ce qui est évidemment impossible. Car si dans les conditions indiquées la gyration engendre l'oscillation, celle-ci ne peut engendrer la gyration, pas plus que les vagues de la mer ne peuvent faire tourner une roue de moulin.

L'aimant serait donc bien vite ramené au zéro absolu, sinon à son anéantissement.

Et ensuite la faculté d'émettre des radiations et la faculté de produire un champ magnétique devront donc être intimement liées, et ce dernier devrait donc s'évanouir progressivement à mesure que la température s'abaisse, pour devenir nulle au zéro absolu, alors que l'observation nous montre des variations toutes différentes.

Considérons maintenant par exemple l'expérience du disque en cuivre tournant et placé entre les deux mâchoires d'un aimant. Les énergies gyratoires de l'aimant et du cuivre sont équivalentes, de manière à réaliser la même température. Mais si nous déterminons la rotation du disque, des courants moléculaires prennent naissance. Il y a résistance, succession de chutes négatives, oscillation et dégagement de chaleur.

Il y a donc, dans cette expérience, consommation de travail mécanique avec dégagement de chaleur.

Si ce phénomène était réversible, il y aurait production de travail mécanique avec abaissement de température.

Cela est-il possible? Il n'entre évidemment pas dans notre pensée de contester la loi de Lentz, mais qu'il s'agisse de courants induits ou d'autres, dans cette expérience, cela importe peu.

Si le principe fondamental qui est actuellement admis et qui gouverne l'induction, avait été exact, il eût été pratiquement possible d'obtenir la réversibilité, mais il nous a induits en erreur.

Toute la science de l'électro-technique peut pour ainsi dire se condenser dans le fait suivant.

Considérons un conducteur AB (fig. 6) parcouru par

un courant; un deuxième conducteur *ab* peut tourner autour d'un axe *b* normal à la figure. Pendant la rotation

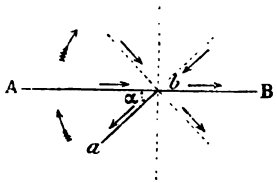


FIG. 6.

indiquée par le sens de la flèche, une succession de courants induits se manifestent dans le conducteur *ab*, ainsi que cela est indiqué, et réciproquement si nous lançons des courants dans le sens de ces flèches, le système fournira un travail exactement égal à celui qui avait été dépensé pendant la première phase de l'expérience, avec développement de forces électro-motrices dirigées en sens inverse de celles du courant fourni à l'appareil.

En résumé, la base de cette conception se trouve dans le rapprochement et dans l'éloignement de conducteurs parcourus par des courants, de manière à déterminer l'induction.

Nous désignerons cette induction sous le nom d'*induction de variation*.

Considérons maintenant un circuit circulaire AB (fig. 7), ainsi que le conducteur *ab*, et reproduisons l'expérience précédente; il se produira encore un courant induit dans le circuit *ab*, bien qu'il ne se produise pas de variation de distance, et c'est là où se trouve la contradiction, ainsi que nous le verrons; il y a *induction d'invariation apparente*

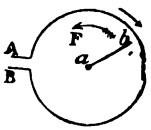


FIG. 7

et le sens du courant sera tel que si la rotation du courant *ab* s'établit sous l'action d'un deuxième courant AB, le sens du courant induit tendra à se produire en sens inverse de celui des courants établis, en un mot il se produira une force contre-électro-motrice, de même que dans la première expérience. S'il en était autrement, l'énergie devrait nécessairement être fournie par l'espace dans l'expérience de la rotation d'un courant par un courant.

Mais s'il se produit une force contre-électro-motrice, l'intensité des courants diminue et il en résulte un *abaissement de température* des circuits. Ou inversement, si nous déterminions la rotation de *ab* en sens inverse, il en résulterait un *échauffement*.

L'expérience du disque tournant est rendue ici *artificiellement* réversible, mais, comme nous le voyons, la dépense de travail est égale au travail recueilli. Si nous pouvions la rendre *naturellement* réversible, nous posséderions le moyen de soutirer à l'espace une quantité d'énergie aussi grande que nous le voudrions. Or cela est *théoriquement* réalisable ; il suffit, pour cela, de substituer aux courants développés artificiellement, avec dépense d'énergie, les *courants-matière* eux-mêmes, lesquels, en s'orientant, produisent l'aimant.

Si donc il était possible de disposer des courants-aimant de telle manière que leur rotation mutuelle s'établisse, ce système subirait un refroidissement permanent et la chaleur perdue serait constamment compensée par le milieu ambiant.

En réalité, nous connaissons donc le moyen d'utiliser l'énergie-matière, mais il nous est impossible de le faire uniquement par suite de circonstances secondaires et

tout à fait indépendantes des principes généraux qui régissent l'univers.

Dans nos opérations, nous libérons également l'énergie-matière, mais uniquement la quantité que nous lui avions communiquée.

Notre *induction d'invariation apparente* pourrait tout aussi bien se désigner sous le nom d'*induction de variation permanente*, car si nous prenons *ab* (fig. 8) pour inducteur, nous voyons ce courant s'éloigner perpétuellement en tournant, de portions de circuits telles que $\alpha\beta$, en déterminant un courant de sens contraire, et s'approcher perpétuellement de portions telles que $\alpha'\beta'$, en déterminant un courant de même sens.

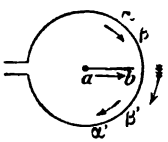


FIG. 8.

Il semble cependant bien difficile de mettre ce phénomène d'accord avec la loi fondamentale de l'induction telle qu'elle est actuellement formulée, qui dit *qu'il n'y a courant induit que lorsqu'il y a variation du nombre des lignes magnétiques qui passent à travers le circuit;* or, si nous prenons le circuit circulaire pour inducteur et le circuit rectiligne *ab* pour induit, on voit immédiatement que le nombre de lignes qui traversent ce circuit est invariable, *et cependant l'expérience montre qu'il y a induction.*

Cette machine est réversible en y introduisant des courants; on réalise l'expérience classique d'Ampère de la rotation d'un courant par un courant, avec production d'une force contre-électro-motrice.

Remarque sur la signification des lignes magnétiques. — Nous voyons encore ici les physiciens poursuivre les

conclusions d'une conception abstraite sans se donner, au moins en général, la peine de distinguer les choses qui peuvent correspondre à une réalité physique de celles qui ne le peuvent pas, car, en fait, *jamais des lignes circulaires magnétiques n'ont existé autour d'un courant rectiligne.* Mais, *en général*, les choses se passent comme si elles existaient.

Quelle est, en effet, la genèse d'une ligne de force magnétique? Imaginons d'abord un courant rectiligne agissant sur un autre courant rectiligne, et désignons sous le nom de lignes *électro-dynamiques* les directions $\alpha\beta$, suivant lesquelles ces actions mutuelles se produisent et qui s'étendent *radialement* autour du courant.

Supposons, en second lieu, que nous donnions à nos deux courants la forme circulaire. Nos lignes *électro-dynamiques* continueront à être ce qu'elles étaient, mais il apparaîtra maintenant une ligne nouvelle, l'axe du cylindre construit en prenant pour directrice les deux circonférences considérées. Cet axe représente la ligne magnétique *et celle-ci ne correspond donc à une réalité que s'il existe un enroulement, et ne correspond à rien si cet enroulement n'existe pas.*

Si nous nous exprimons d'une *manière physique*, nous dirons que la ligne magnétique est l'axe du tourbillon d'éther déterminé par un courant circulaire de cette substance et que les lignes électro-dynamiques représentent une *infinité* de directions azimutales suivant lesquelles peuvent s'exercer des actions sur d'autres courants.

L'action de ces lignes considérées normalement au courant est maxima et diminue avec l'inclinaison suivant la loi du cosinus.

Mais il est facile de voir la cause de ces confusions. Si

dans le *champ électro-dynamique* qui entoure un courant nous introduisons une substance magnétique, par exemple de la limaille de fer, nous orientons les courants circulaires de cette substance elle-même et *nous donnons naissance à des lignes de force magnétiques qui n'existaient pas*.

Les lignes magnétiques que l'on conçoit circulaires autour d'un conducteur parcouru par un courant sont donc des lignes *virtuelles*, alors que les lignes magnétiques qui émanent d'un aimant sont des lignes *réelles*, par cela qu'elles sont produites par un très grand nombre de petits courants circulaires, les courants atomiques.

Nous pouvons conclure de la manière suivante :

Tous les phénomènes électriques se développent suivant trois directions rectangulaires, *oe*, *od* et *om*, correspondant respectivement aux actions électriques, électro-dynamiques et électro-magnétiques.

Nous pourrons dire qu'il y a induction électro-dynamique chaque fois qu'il se produit une variation de l'action de ces lignes sur tout circuit induit.

L'induction implique donc une variation d'action des lignes qui émanent d'un point fixe ou de la succession des points fixes de l'inducteur sur l'induit supposé mobile, ou inversement. Le résultat étant évidemment le même si, au lieu de supposer la mobilité des conducteurs, on suppose une variation de l'intensité de cet inducteur. Elle ne nécessite nullement une variation du nombre des lignes magnétiques (qui peuvent, du reste, ne pas exister) dans l'induit, ainsi que cela est admis actuellement; en effet, dans le cas de l'induction de non-variation apparente, le nombre des lignes magnétiques réelles ou virtuelles qui traversent l'induit, est constant, mais il y

a sur l'induit, d'une part, accroissement permanent de l'action des lignes électro-dynamiques, et, d'autre part, diminution permanente de l'action de ces lignes dans la même mesure, de manière à réaliser des forces électromotrices qui s'ajoutent.

Actuellement, l'expérience est conforme à la théorie, alors qu'elle ne l'est pas si l'on part de la considération des lignes magnétiques.

Le sens de l'induit est de sens contraire s'il y a accroissement d'action et de même sens s'il y a diminution.

La loi fondamentale d'après laquelle l'induction exige qu'il y ait variation du nombre des lignes magnétiques dans l'induit, est donc fausse; mais ce qui varie, c'est l'action des diverses parties du circuit fixe sur le circuit mobile.

L'impossibilité de la conception des lignes magnétiques circulaires saute aux yeux si l'on considère l'induction développée par un conducteur rectiligne indéfiniment long sur un conducteur normal se déplaçant dans le sens de la flèche F (fig. 9). Dans ces conditions, il ne peut y avoir induction, non seulement par cela que le nombre de lignes coupées est absolument invariable, ce à quoi on a répondu en modifiant l'énoncé, mais encore parce que *les coupures ne se font pas*, le conducteur devant être considéré comme étant enveloppé d'une série de surfaces cylindriques dont les lignes magnétiques représentent la trace sur un plan normal au conducteur. Dans le déplacement de l'induit, chacun de ses points ne fait que suivre les génératrices de ces cylindres continus, donc sans rien couper.

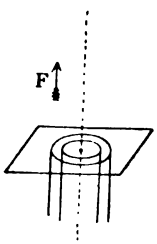


Fig. 9

Le résultat est, du reste, le même dans le cas du conducteur circulaire que nous avons considéré.

La seule objection que l'on pourrait faire à ce dernier raisonnement serait que le courant n'est pas continu. Mais cette hypothèse devient insoutenable dans le courant aimant, et si l'induction ne se produisait pas dans ces conditions, l'action réciproque de deux aimants serait nécessairement nulle.

Nous pouvons donc conclure que *la conception des lignes magnétiques circulaires autour du courant conduit à cette conclusion paradoxale que l'induction électro-magnétique peut se produire sans qu'il y ait variation.*

En supposant qu'il y ait quelque chose de coupé, les praticiens ont éludé la difficulté de l'énoncé en admettant que le nombre de lignes magnétiques coupées pouvait être toujours le même, ce qu'ils expriment par la relation

$$\frac{dn}{dt} = H \frac{d\alpha}{dt},$$

n représentant la force électro-motrice, α l'angle correspondant au déplacement et H l'intensité du champ.

Ce sont là, sans doute, des *recettes* qui peuvent être très commodes et très utiles pour les besoins de la pratique, mais qui n'ont pas le moindre rapport avec l'étude de la nature, c'est-à-dire avec la physique. Car celui qui veut interpréter ainsi la production d'un courant induit dans un conducteur à l'aide des lignes magnétiques d'un autre conducteur, se comporte comme celui qui voudrait interpréter l'impression photographique produite sur une plaque à l'aide d'une image virtuelle produite derrière un miroir.

Une question se pose maintenant : Les courants circulaires aimants restent-ils individualisés dans le champ, ou bien se fondent-ils en un tourbillon unique?

L'expérience montre que dans le cas de champs qui ne sont pas très puissants, c'est la dernière hypothèse qui se vérifie. En effet, un rayon cathodique introduit dans ce champ suivant la direction des lignes de force, nous montre un tourbillon unique, mais si la puissance du champ croît jusqu'à une certaine limite, les tourbillons s'individualisent et nous voyons apparaître les rayons magnéto-cathodiques.

Ceci nous amène à la conclusion suivante, si nous considérons le phénomène de l'induction : Si les tourbillons aimants se fondent en un tourbillon unique, le sens de la rotation sera le même (*ab*) (fig. 10) que s'il s'agissait d'une bobine parcourue par un courant. Mais si, au contraire, nous supposons les tourbillons individualisés, il est aisé de voir figure 11 que le sens de la rotation (*ba*) sera renversé.

Fig. 10 et 11.

On peut donc dire qu'il doit exister une limite d'intensité du champ à partir de laquelle le sens de la rotation d'un courant par un aimant change.

Conclusion. — Si nous considérons une substance matérielle quelconque, par exemple un morceau de fer, l'énergie qui le constitue dans la substance, par rupture

de celle-ci, ne pouvant être localisée à sa surface apparente, se communique à l'espace ambiant en y développant un champ *apparent* ou *inapparent*.

Dans le cas du simple morceau de fer, le champ électro-magnétique est inapparent, les énergies développées s'équilibrent au même titre que le feraient une série de faisceaux lumineux interférents. Mais il suffit de régler convenablement les sources de manière que ce phénomène ne se produise plus pour voir apparaître l'énergie; de même il suffit d'orienter convenablement les faisceaux énergétiques qui émanaient de la matière, ou, en d'autres termes, d'orienter les gyrostats électro-magnétiques, afin de rendre cette énergie tangible, lors de l'aimantation. Cette énergie actuellement ne se libère pas, *car il n'y a pas manifestation de masse*, mais elle se décèle par l'apparition d'une force attractive ou répulsive agissant sur un autre corps placé à distance.

Supposons maintenant que l'on abandonne ce corps à lui même; à ce moment il y aura manifestation de masse ou libération d'énergie du milieu, laquelle se transformera par exemple en chaleur au moment de la rencontre avec l'aimant.

La conception théorique de la réalisation des *chutes successives* dans la rotation d'un courant aimant par un courant aimant libérerait donc l'énergie du milieu.

En principe, rien ne s'oppose donc à ce que nous puissions un jour libérer l'énergie de la matière et du milieu qui nous imprègne, et il n'existe évidemment aucun rapport entre ces considérations et les pensées absurdes des chercheurs de ce que l'on désignait à tort sous le nom de *mouvement perpétuel*.

Définition du contact apparent et du contact réel des conducteurs et de la signification de la résistance électrique.

Avant d'aborder la question qui nous occupe, il importe de préciser davantage, dans l'image que nous avons adoptée, quelle est la signification des notions suivantes :

1° potentiel absolu, positif ou négatif;
2° potentiel relatif, positif ou négatif.

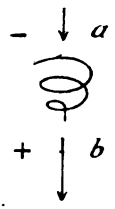


Fig. 1.

Considérons à cet effet un ion libre propulsif et aspirant (fig. 1). Si l'on vient à accroître son énergie de gyration, il deviendra nécessairement à la fois plus propulsif et plus aspirant. Cet ion sera donc *absolument* négatif en *a* et *absolument* positif en *b*.

Fig. 2.

Considérons maintenant un système atomique ou une série de systèmes atomiques constituant un corps, ce qui reviendrait au même, et représentons pour plus de facilité l'ion par un cône dont l'angle au sommet est d'autant plus aigu qu'il a assimilé une plus grande quantité d'énergie de gyration (fig. 2), que son potentiel est plus élevé.

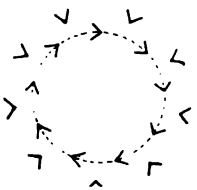


Fig. 3.

Supposons maintenant qu'un certain nombre de ces ions, constituant un atome (fig. 3), subissent, au moins partiellement, un décalage négatif. Nous pourrons dire que le potentiel de cet atome est *absolument* négatif, mais il est facile

de voir qu'il pourra être *relativement* positif. En effet, disposons cet atome dans le voisinage d'un autre atome *plus negatif* ou *plus aspirant* que le premier, il arrivera un moment où les gyrostats ioniques se raccorderont (au potentiel critique) (*), et, à partir de ce moment, bien qu'étant tous deux *absolument* aspirants, le second seul continuera à jouer ce rôle d'élément aspirant, alors que le premier jouera le rôle d'élément propulsif. Il sera *relativement positif*, bien qu'étant *absolument négatif*.

Il est probable que le décalage ionique se fait toujours de manière à rendre l'atome *absolument* négatif, par cela que le mouvement hélicoïdal est dans ces conditions favorable à la tendance au départ des ions. Dans ces conditions, nous voyons que tout accroissement d'énergie de gyration tend à rendre l'atome plus négatif, toute diminution d'énergie de gyration tend à le rendre relativement plus positif.

On doit admettre que les choses se passent ainsi, sans quoi on serait amené à une conclusion contraire à l'expérience.

Fig. 4.

Considérons, en effet, un conducteur A (fig. 4) chargé à un potentiel fortement positif et absolu; prenons

(*) De Heen, *L'énergie-matière*. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique (Classe des sciences), 1907, p. 436.)

ensuite un conducteur faiblement négatif, ces déformations étant maintenant absolues.

L'énergie de gyration tendra à se communiquer à B; en s'accroissant sur ce conducteur, elle tendra à accentuer le potentiel *négatif* qu'il possédait déjà, ce qui est l'inverse de l'observation.

Si, au contraire, nous supposons A et B comme étant toujours absolument négatifs, mais pouvant être relativement positifs ou négatifs, suivant l'état du milieu, ce paradoxe disparaît et la théorie devient conforme à l'expérience.

En résumé, nous pourrons faire usage de deux espèces de notations :

1° De la *notation* POTENTIELLE *absolue ou réelle*, qui comporte implicitement une variation de l'état du milieu (fig. 5), l'angle α_0 définissant le potentiel de l'espace,

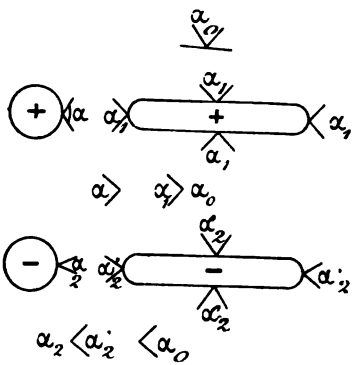


FIG. 5.

α et α^1 définissant les potentiels d'un corps influençant et d'un corps influencé, ce dernier potentiel étant positif; α_2 et α'_2 correspondant au contraire à des potentiels négatifs;

2° De la *notation* ÉLECTRIQUE *relative ou apparente* (fig. 6).

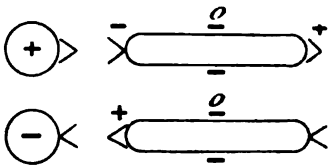


FIG. 6.

On induit un potentiel *en réalité* de même qu'on induit une température. On induit de l'électricité *en apparence* de même qu'on induit en apparence du froid et du chaud.

Dans beaucoup de cas, ces notations sont équivalentes ; on s'est, du reste, contenté de cette dernière apparence jusqu'à présent. Mais dans d'autres cas, il est indispensable d'établir une distinction.

Examinons maintenant d'une manière détaillée le rôle que chacune des énergies de mouvement va jouer.

Remarquons d'abord que lorsqu'un mobile est animé d'un mouvement uniforme dans le milieu éther, il n'y a pas plus manifestation de masse que s'il était à l'état de repos. Il ne peut y avoir libération d'énergie. Ce serait le cas du courant atomique (fig. 7). La résistance au mouvement est nulle, ou, ce qui revient au même, la résistance électrique est nulle. Il n'y aura pas communication ni dissipation d'énergie.

FIG. 7.

Ceci est le cas du diélectrique *parfait*, dont nous ne connaissons du reste pas d'exemple dans la nature, mais dont on se rapproche dans une mesure plus ou moins

grande; *il ne possède pas de résistance.* Un pareil système matériel serait de plus absolument transparent pour toutes les radiations; son pouvoir absorbant eté missif serait donc nul.

Dans ce diélectrique, le courant sera exclusivement localisé à l'atome, dont les ions, ne vibrant pas, sont d'une passivité absolue.

Considérons maintenant la substance *dite conductrice*, non pas, parce que le courant électrique ou d'éther s'y déplace sans résistance de même que dans l'atome, mais bien, *au contraire*, parce qu'elle est capable de transmettre de l'énergie. Ces substances sont composées d'atomes formés de fibres atomiques de même que les précédentes, mais reliés entre eux par des fibres ioniques, pour ainsi dire déroulées.

Ce sont ces fibres ioniques qui sont seules capables de vibrer et, lorsque le courant les traverse, il y a apparition de *résistance* par cela qu'il y a transmission ou dissipation d'énergie, due à la vibration, c'est-à-dire apparition de *masse permanente*. Alors nous voyons la matière acquérir la faculté d'absorber et d'émettre des oscillations électro-magnétiques de toute longueur d'onde, de même d'absorber et d'émettre des oscillations électriques ou longitudinales.

Mais quelle est la cause de cette vibration ionique ou de cette masse permanente qui permet la transmission de l'énergie par chaîne ionique, par exemple de α à α' (fig. 8)?

Fig. 8.

Cette cause peut être naturelle ou artificielle; elle est artificielle, par exemple, lorsque nous déterminons ou que nous accroissons le mouvement vibratoire ionique en dirigeant sur la matière

un faisceau de radiations; tel est le cas du sélénium sous l'action de la lumière.

Mais la cause fondamentale dans les métaux est évidemment naturelle, et il faut admettre que pour les métaux même supposés au zéro absolu, l'énergie de vibration des chaînes ioniques n'est jamais nulle, mais que la longueur de ces ondes serait d'une petitesse extrême. Ce sont de plus ces ondes qui présideraient à la radioactivité des corps, laquelle n'est que lointainement liée à la température, comme on le sait.

Et faisons maintenant cette remarque importante, c'est qu'en pleine matière, à l'opposé de ce qui se passe lorsque l'on considère des surfaces libres, et dans l'influence, les déformations *absolues* de nom contraire dans la chaîne ionique s'emboîtent de telle manière qu'un accroissement de potentiel absolument positif de α, par exemple, déterminera ici un accroissement du potentiel absolument négatif de α'. C'est, comme nous le verrons, ce qui distingue le contact métallique en pleine matière du contact apparent.

Si nous considérons la surface limite d'un conducteur, nous remarquerons que les fibres sont coupées et, d'après ce que nous avons dit, le brin, à sa coupure, doit toujours nécessairement posséder un potentiel absolu unique, nous le supposons de préférence négatif.

Toute variation d'énergie de gyration communiquée en une région donnée à la fibre ionique se communiquera grâce à la manifestation de masse entre deux ions consécutifs, à l'ensemble du volume matériel considéré.

Cette variation d'énergie de gyration peut être communiquée transversalement par induction électro-magnétique en développant le rayonnement ou la conductibilité

calorifique ou longitudinalement, par un corps électrisé, au travers du milieu diélectrique ainsi que nous l'avons montré.

Le principe de la transmission de l'énergie électrique dans un conducteur et dans un diélectrique est toujours le même; il se trouve dans la manifestation (naturelle ou produite artificiellement) de la masse résultant d'une variation d'énergie de gyration. La seule différence est que dans un conducteur l'énergie de gyration se communique du *plus absolu* au *moins absolu*, alors que dans le diélectrique elle se communique d'un *moins* absolu à un autre *moins* absolu, ou, mieux, d'un *moins* absolu à un *plus* relatif ou réciproquement.

Quelle conclusion pratique pouvons-nous tirer de ces réflexions?

Mettons deux métaux simplement en contact dans les conditions ordinaires; les surfaces polies auront eu le temps d'assimiler de l'air, et de se comporter en général comme une couche diélectrique. Les chaînes ioniques sont donc interrompues. *Nous dirons alors qu'il y a contact apparent.*

Si par un procédé quelconque nous parvenons à déformer les ions du contact apparent de manière à les emboîter de même qu'en pleine matière, nous aurons réalisé une véritable soudure, nous dirons qu'il y a *contact réel.*

La déformation potentielle est supposée maintenant celle de l'espace. En A B le contact est *apparent*, alors qu'en *ab*, ou *a'b'*, là où les ions sont emboîtés les uns dans les autres, nous disons qu'il y a *contact réel* (fig. 9).

Dans le cas des soudures, le contact réel doit s'établir sur toute l'étendue de la surface. Mais si nous nous pla-

çons au point de vue de la résistance électrique, il suffira que quelques points privilégiés des surfaces en présence soient en *contact réel* pour permettre le passage du courant. S'il n'en est pas ainsi, la résistance devient énorme.

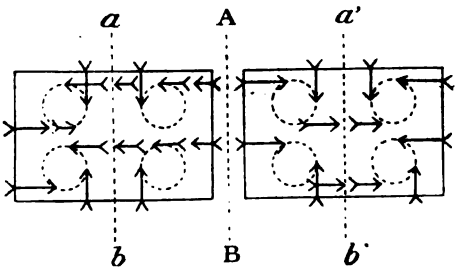


Fig. 9.

Deux surfaces de cuivre en présence sont toujours *suffisamment* en contact réel, mais il n'en est pas de même pour d'autres métaux : tel est le nickel. L'oscillation électro-magnétique suffit, comme on le sait, pour établir ce contact; la vague éthérée en passant sur les chaînes ioniques tend à orienter les ions dans le même sens, à *souder* les métaux en présence. Cela ne se produit évidemment qu'en quelques points, mais cela suffit.

Telle serait donc l'interprétation qu'il faut donner au fonctionnement du tube à limaille, et nous voyons également la cause du succès des belles expériences de Spring relatives à la soudure des surfaces métalliques fraîches.

Revenons maintenant à l'étude de la résistance et considérons le cas le plus général. Supposons qu'il s'agisse de transmettre l'énergie électrique de *a* à *b*

(fig. 10); la région *aa'* est occupée par le vide ou par un diélectrique; *a'b'* représente un conducteur long et résistant, *bb'* également un diélectrique.

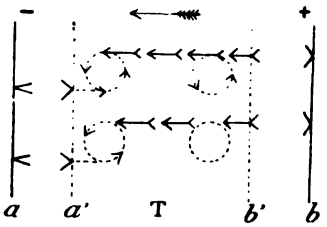


Fig. 10.

Pour transmettre l'énergie dans les diélectriques, il faut développer la masse, il faut communiquer artificiellement une vibration aux ions de manière à produire l'*induction électrique* non alternante, mais les potentiels superficiels sont absolument négatifs. Dans le conducteur, l'action de masse est toujours suffisante pour transmettre l'énergie de gyration d'ion à ion.

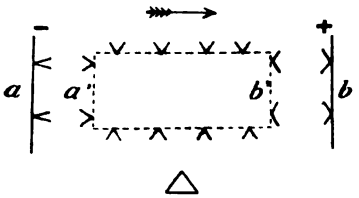


Fig. 11.

Remarquons que la superposition des deux cas que nous venons de considérer est cependant plus théorique que réelle, car dans le cas de la vibration artificielle que

nous réalisons, la transmission ne se produit pas en pleine matière dans le conducteur, elle se produit superficiellement par induction *électro-magnétique*, c'est-à-dire transversalement avec la vitesse de propagation qui la caractérise, ou avec la vitesse de la lumière (fig. 11).

Le lien qui unit la théorie de l'émission de Newton à la théorie des électrons devient très intéressant. Nous voyons en effet la projection de ces corpuscules se faire avec la vitesse de la lumière, et l'on doit conclure que l'adoption de la théorie des électrons entraîne avec elle le retour à la théorie des corpuscules lumineux. Il importe de ne pas confondre la vitesse de propagation du courant avec la vitesse de propagation de l'oscillation électrique, cas dans lequel notre conclusion serait voilée.

Il y a donc deux courants à considérer : le courant Γ, *électrique ou longitudinal, et le courant* Δ, *électro-magnétique ou transversal.*

Une question intéressante se pose ici : Le courant Δ qu'Ampère considérait comme un courant ouvert possède-t-il nécessairement les propriétés que lui assigne Maxwell ?

L'action réciproque de deux courants Δ est-elle la même que celle de deux courants Γ? Cette question n'est pas résolue par l'expérience, qui serait ici d'un grand intérêt.

Faisons encore cette remarque que le courant peut prendre naissance dans un circuit conducteur par suite de deux causes :

1° La cause initiale peut être une différence d'énergie gyrostatique entre a' et b' (fig. 10), laquelle différence détermine une propulsion d'éther dans le sens de la

flèche. Ce sera, par exemple, le cas du courant déterminé par la pile ;

2° La cause initiale peut être la propulsion qui aura réciproquement pour résultat de déterminer une variation de l'énergie gyrostatique. Tel sera le cas du courant induit, ainsi que nous l'avons montré dans la précédente note.

Mais le mot *résistance* prête à ambiguïté. C'est ainsi que l'on peut dire indifféremment que la résistance d'un diélectrique est nulle ou infinie, suivant le point de vue auquel on se place, suivant qu'il s'agit de la transmission du courant ou de la transmission de l'énergie. Le courant traverse parfaitement un diélectrique, comme le dit Maxwell.

La simple image que nous avons adoptée va nous faire comprendre immédiatement la cause de cette contradiction apparente.

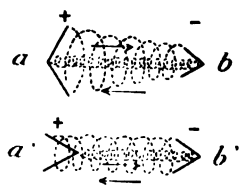


Fig. 12.

Considérons deux éléments a, a' (fig. 12), l'un relativement positif par rapport à b, l'autre absolument positif par rapport à b'. Au moment où ils prendront l'état de mouvement qui les caractérise, il y aura apparition de masse et les états de mouvement de a et de b, de a' et de b' tiendront à s'égaliser par cela qu'il y a embrayage.

A ce moment, mais à ce moment seulement, il y aura

transmission d'énergie : c'est ce qui se passe dans l'influence; puis, en apparence, la résistance devient infinie par cela qu'il n'y a plus manifestation de masse. Tous les mouvements sont devenus uniformes, il n'y a plus possibilité de transmission d'énergie. Nous pouvons donc dire, en nous plaçant au point de vue de la transmissibilité permanente de l'énergie, que la résistance devient infinie.

En nous plaçant au point de vue de la transmission du courant, nous pouvons dire qu'elle est *nulle*, et cela au même titre que la résistance qu'oppose le milieu dit vide au mouvement d'un corps est nulle.

Pendant tout le temps que ce mouvement demeure invariable, il n'y a pas transmission ni communication d'énergie possible.

Supposons donc qu'on maintienne les déformations a, b et a', b' permanentes. Un courant en partie double n'a pas tardé à s'établir entre les deux éléments; le courant gyrostatique axial d'aller est égal au courant périphérique de retour tant que le circuit n'est pas *apparemment* fermé. Lorsque deux conducteurs électrisés sont, par exemple, en présence et réunis par des lignes de force, il n'y a pas seulement courant fermé au moment de l'induction, comme le dit Maxwell, mais *le courant fermé ne cesse jamais d'exister*, il est *compensé*, à l'inverse du courant aimant, mais comme ce dernier il ne communique ni ne dissipe de l'énergie. Mais si l'on suppose le circuit apparemment fermé, ce qui est le cas pour le courant atomique, ou aimant, dont les éléments sont supposés également sans vibration, nous nous trouvons exactement dans le même cas que celui du courant dans le diélectrique. Il sera en partie simple, donc non compensé,

mais il est aussi incapable de communiquer son énergie, que la terre en se mouvant autour du soleil, ou qu'un courant liquide circulant sans frottement dans un tube circulaire. L'énergie est transmise sans dissipation ni utilisation possible.

En résumé, si nous nous plaçons au point de vue de la possibilité de consommer l'énergie, lorsque le régime dynamique est établi, *la résistance d'un diélectrique et la résistance du courant* atomique, supposé en dehors de toute vibration, *sont infinies*.

C'est donc par la vibration que prend naissance le phénomène de la conductibilité tel qu'il est généralement compris, c'est-à-dire la conductibilité pour l'énergie et non pas pour le courant. Mais il est intéressant de remarquer que c'est précisément la cause qui détermine cette transmission ou cette *conductibilité* longitudinale qui détermine également la dissipation transversale ou la *résistance*, c'est-à-dire deux effets en apparence opposés, si l'on ne tient pas compte de la confusion que nous venons d'indiquer. Les corps peuvent se diviser en deux grandes classes : 1° ceux qui ne sont pas doués de masse permanente et qui ne peuvent acquérir la *conductibilité d'énergie* que si on communique artificiellement cette masse (induction électrique non alternante), ou les diélectriques ; 2° ceux qui sont naturellement doués d'une masse permanente et qui sont donc par eux-mêmes des *conducteurs d'énergie*. En quoi consiste cette masse permanente des conducteurs ? Il n'est pas douteux, comme nous l'avons dit, qu'elle doive être attribuée à une oscillation excessivement rapide de leurs ions, ne pouvant donc produire que des oscillations électro-magnétiques très loin dans l'ultra-violet qui s'amortissent immédiatement,

mais auxquelles correspondent également des vibrations longitudinales qui ont pour résultat de provoquer éventuellement (en cas de décalage) la radioactivité, et Gustave Le Bon a montré que ce phénomène est tout à fait général.

Un conducteur d'énergie parfait transmettra donc longitudinalement la totalité de l'énergie électrique sans dissipation transversale sensible, par cela que les très petites oscillations transversales sont très amortissables. Mais si le conducteur est imparfait, ce qui est toujours vrai dans une certaine mesure, la transmission de l'énergie ne pourra se faire dans la proportion commandée par l'intensité du courant qu'à la condition que celui-ci, par son passage, ne détermine une masse permanente complémentaire, apparaissant sous forme de vibrations plus longues avec dissipation transversale sous la forme lumineuse ou calorifique.

Donc, nous considérons la conductibilité pour le courant et la conductibilité pour l'énergie, de même que nous considérons les champs de non-dissipation dénués de masse et recélant l'énergie à l'état potentiel et les champs de dissipation, ou radiants, doués de mouvements vibratoires ou de masse permanente.

L'image de la première conductibilité sera fournie par une série ionique dont les éléments successifs n'exercent aucun frottement réciproque, de même qu'un courant liquide circulant dans un tube sans frottement, ou encore de même qu'une série de parties d'un arbre de transmission tournant sans frottement, non embrayées, il n'y a pas de masse permanente.

L'image de la deuxième conductibilité sera fournie par la même série dans laquelle cette action existe, grâce à

la vibration, ainsi que le seraient diverses parties d'un arbre de transmission embrayées les unes aux autres.

Nous pourrons classer les choses de la manière suivante :

1° Le courant compensé du diélectrique et, par conséquent, non apparent, lequel se produit sans résistance (de même que le courant aimant non compensé), et dont l'axe représente la ligne de force électrique;

2° Les ions *a* et *b* sont doués d'un état vibratoire, ou d'une masse permanente ou de frottement, il y a manifestation de résistance.

Il se produira maintenant une dissipation ou une transmission de l'énergie. Cette transmission pourra se faire : *a*) transversalement en donnant naissance à une oscillation électro-magnétique, par exemple à de la chaleur; *b*) longitudinalement en amenant l'équilibre énergétique entre les ions *a* et *b*.

Ensuite :

1° Le courant électrique ou d'éther gyrostatique est constitué par des éléments qui ne sont pas plus *nécessairement* énergétiques en eux-mêmes que le seraient, par exemple, les éléments d'un courant liquide, contrairement à la conception électroniste qui suppose un courant d'électrons énergétiques en eux-mêmes;

2° Le courant dans les conditions normales ne consomme, ne dissipe aucune énergie, de même que cela se passerait si l'on considérait un courant liquide se produisant sans frottement dans un tube, par exemple, circulaire.

Il en est ainsi dans le courant aimant et dans le courant compensé qui constitue la ligne de force électrique.

Ces courants engendrent le champ énergétique sans dissipation, électro-dynamique ou électro-magnétique;

3° Il y a frottement et transmission d'énergie sous la forme d'induction électro-magnétique ou plus exactement électro-dynamique ou de chaleur, chaque fois qu'il y a vibration, c'est à-dire apparition de masse. Cette transmission est transversale;

4° Cette vibration entraîne une variation correspondante de la vitesse de gyration, variation qui permet la transmission de cette vitesse ou de l'action propulsive et aspirante de l'ion, d'où induction électrique longitudinale.

Ces courants dissipateurs d'énergie engendrent les champs de dissipation ou de radiation électrique, électro-dynamique et électro-magnétique, ou calorifiques.

En résumé, le *courant de non-dissipation* comporte le mouvement gyrostatique de l'ion accompagné du courant d'éther qui *a été* produit par la gyration. Lorsqu'il y a *courant de dissipation* ou *courant d'énergie*, à ces mouvements s'ajoute le mouvement vibratoire.

Il existe le même rapport entre le *courant d'énergie* et le courant *dit* électrique, qu'on suppose formé d'électrons, qu'entre la lumière et l'éther.

Ici encore la théorie des électrons, qui suppose que tous les courants sont des courants d'énergie, se montre dans toute son infériorité.

L'image qui rend compte, dans la théorie des électrons, du passage du courant est celle-ci :

Soient a, a', a'', a''' (fig. 13) une série d'atomes constituant un conducteur. La cathode N, par exemple, lance une série de corpuscules négatifs, lesquels, après avoir

tournoyé quelque temps dans les systèmes atomiques a, a', a'', arrivent à l'anode qu'ils neutralisent.

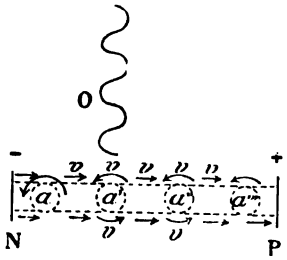


Fig. 13.

Or, comment explique-t-on le rayonnement et l'accroissement de température dû au passage du courant? Les corpuscules constitutifs de l'atome, par suite de leur mouvement de gyration, déterminent dans l'éther un sillage qui engendre l'oscillation o, ainsi que la figure l'indique.

Le mouvement gyratoire devient d'autant plus rapide que les corpuscules arrivant de N sont plus nombreux, et la température et le rayonnement s'accroîtraient donc. Cela est déjà paradoxal, attendu que ces corpuscules émanant de toute la surface de N ne tendent pas à déterminer la rotation de a dans un sens plutôt que dans l'autre. Le courant n'accroîtrait donc pas en réalité la température d'un conducteur. Mais passons sur cette première impossibilité.

Dans tous les cas, les électrons sont émis aux deux pôles ou à l'un d'eux par des atomes dont les éléments possèdent une certaine vitesse de gyration et dont le sens du courant oriente les projections.

Les électronistes ne refuseront donc pas d'admettre avec moi que dans un corps dont les éléments sont au repos, il ne peut y avoir courant. Or l'expérience montre que la conductibilité des métaux croît à mesure que la température s'abaisse et deviendrait indéfiniment grande au zéro absolu, précisément à la température où elle devrait être nécessairement nulle.

S'est-on, du reste, jamais aperçu que le courant aimant diminuait avec la température? Alors que, d'après cette théorie, c'est précisément ce mouvement circulaire électronique qui détermine la radiation calorifique. Et l'on voit ici apparaître la confusion entre le champ de masse ou de radiation avec le champ simplement énergétique et de non-dissipation.

Lorsque le zéro absolu est atteint, il n'y a plus ni vibration ni gyration, et c'est précisément lorsque ces corpuscules sont amenés au repos ou à peu près, que par le fait de leur mouvement ils transportent la plus grande quantité d'énergie! Ce qui dispense de commentaires.

Les électronistes admettent un sillage de l'électron dans l'éther, c'est-à-dire un frottement. Le mouvement gyratoire de l'électron d'un aimant doit dès lors s'amortir alors qu'on le considère comme permanent.

Dans le cas contraire, il devrait y avoir compensation et par quoi? Un mouvement vibratoire calorifique ou lumineux serait incapable de le faire, et, du reste, comme nous le disions, l'aimant conserve ses propriétés aux basses températures, alors que son action devrait diminuer notablement.

On doit à M. Broniski un travail plein d'intérêt sur la conductibilité où il montre que cette propriété est inver-

sement proportionnelle au covolume (*). C'est là une conséquence évidente de notre théorie; en effet, les fibres ioniques reliant les atomes constituent de véritables conducteurs et leur résistance est inversement proportionnelle à leur longueur.

Pour ce qui concerne la conductibilité des diélectriques imparfaits, nous la voyons croître avec la température; en effet, ces corps étant doués d'une masse permanente très faible, la voient s'accroître sensiblement par suite de l'accroissement du mouvement vibratoire qui accompagne l'accroissement de température.

Il est utile d'appeler encore l'attention sur l'absence complète d'unité des interprétations du courant. Dans les uns on voit des charges électriques transportées par des atomes, dans d'autres ce sont les corpuscules qui sont chargés de cette besogne; enfin, dans le courant de transport, c'est encore une tout autre affaire.

Dans les siècles futurs, on pourra écrire dans l'histoire des sciences que *jamais théorie aussi fausse ne s'affubla d'aussi rigoureux apparat.*

Une chose vraie apparaissait cependant dans cette théorie électronique. C'est que *quelque chose* est animé d'un mouvement gyratoire dans l'élément atomique, et cela suffit pour prévoir le phénomène de Zeeman.

(*) *Journal de chimie et de physique,* 31 décembre 1907.

Nouveau paradoxe de la théorie des électrons.

M. Lorentz, dans une conférence faite devant l'*American Philosophical Society* (*), a traité une question pleine d'intérêt relative au phénomène de Hall. L'auteur conclut, d'une part, que ce phénomène ne semble pouvoir s'interpréter (dans la théorie des électrons) qu'en admettant deux espèces d'électrons libres. Et en réalité on ne voit pas comment il serait possible de s'en tirer autrement. Mais quoi qu'il en soit, l'auteur conclut que cette hypothèse devient inadmissible, par cela que l'on serait conduit à la production d'un courant d'électricité neutre, d'un métal à l'autre, ce qui est contraire au principe de Carnot.

Cependant M. Lorentz se propose d'essayer d'interpréter le phénomène de Hall, en admettant que les électrons négatifs soient seuls mobiles à l'intérieur du métal.

Il semble que l'espoir de succès est bien faible et il vaudra peut-être mieux, dans l'intérêt de la théorie des électrons, ne plus en parler; il en a été de même de l'expérience de Pellat, faite en 1905 (**), au sujet de laquelle le dogme des électrons commandait le silence.

Rien n'est cependant plus naturel que de semblables échecs, attendu que ces trois électricités n'existent pas

---

(*) *Jahrbuch der Radioaktivität*, t. IV, p. 129, 1907.

(**) Pellat, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 11 décembre 1905. — De Heen, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), séance du 3 mars 1906, p. 166.

plus que le froid, le chaud et l'*absence* de chaleur sensible, laquelle correspond, en réalité, à l'électricité neutre !

Mais supposons cependant que l'auteur réussisse à interpréter le phénomène de Hall en admettant que les électrons négatifs soient seuls en mouvement dans les métaux ; il est facile de voir que si cette hypothèse parvient à expliquer le phénomène de Hall, elle se trouve en contradiction formelle avec l'expérience.

Considérons en effet le circuit circulaire *ab* (fig. 1) parcouru par un courant, lequel est en réalité constitué, non par un transport d'électricité de *a* à *b*, mais bien par un transport de corpuscules négatifs de *b* vers *a*. Quelle sera l'action de ces corpuscules négatifs en mouvement sur le champ environnant?

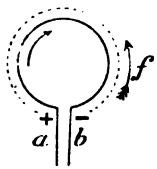


FIG. 1.

Il aura pour résultat l'enroulement de ce milieu *dans le sens de la flèche* f.

Or, d'après l'expérience de Broca, si l'on dispose un rayon cathodique normalement au plan de la figure, on constate que cet enroulement devient sensible, le rayon cathodique s'enroule *dans le sens du courant, c'est-à-dire en sens opposé de la flèche* f.

Nous concluons donc que si le courant doit s'interpréter par le transport de corpuscules, ce transport devra *surtout* s'effectuer en sens inverse de la flèche *f*.

A la rigueur, si un partisan de la théorie des électrons daignait répondre à cette objection, il pourrait dire : « Bien qu'il nous ait paru jusqu'à présent que les électrons négatifs étaient particulièrement mobiles, nous admettrons que dans les métaux ce sont les électrons

positifs qui jouissent plus particulièrement de cette mobilité. »

Cette deuxième manière de concevoir les choses conduit à un paradoxe tout aussi évident.

Afin de rendre notre pensée claire, considérons deux plateaux électrisés (*) de signes contraires A et B (fig. 2) et abandonnons entre ceux-ci une feuille d'or *f* munie de

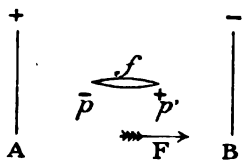


Fig. 2.

pointes. Celles-ci engendreront l'aigrette qui rendra l'air conducteur en l'ionisant, et, dès lors, la feuille *f* jouera le rôle d'un élément du conducteur parcouru par un courant. Grâce à la mobilité plus grande des électrons négatifs, un plus grand nombre s'échapperont de la pointe *p* que de la pointe *p'*, d'où il résulte que la réaction due aux projections de *p* entraîne la feuille, c'est-à-dire le conducteur lui-même, dans le sens de la flèche F. (Nous vérifierons plus loin l'expérience avec un conducteur proprement dit.)

Donc, d'après cette expérience, ce seraient bien les corpuscules négatifs qui jouissent de la plus grande mobilité, mais, d'autre part, le sens de l'enroulement du rayon cathodique rend cette conclusion inadmissible.

(*) De Heen, *Prodrôme de la théorie mécanique de l'électricité*, pp. 22 et 23 et p. 43.

Nous pouvons maintenant supposer l'inverse, la plus grande mobilité des électrons positifs. Dans ces conditions, on se mettra d'accord avec le sens de l'enroulement du rayon cathodique, mais on se trouvera en opposition formelle avec le sens du déplacement de la feuille d'or.

On pourrait peut-être, en dernier lieu, objecter qu'il n'y a pas identité entre la feuille d'or et un élément du courant.

On peut reconnaître que les choses se passent de la même manière par l'expérience suivante. Considérons un conducteur léger *c* (fig. 3) construit en aluminium,

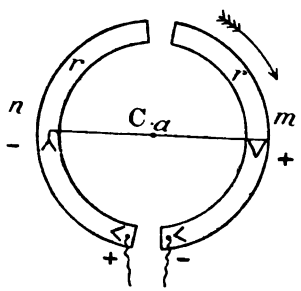


Fig. 3.

pouvant tourner autour d'un axe de rotation *a* et flottant en *m* et en *n* sur une surface de mercure renfermé dans des rigoles par l'intermédiaire de fils de platine convenablement recourbés. On constate que, en établissant un courant d'environ quinze ampères, le conducteur se déplace dans le sens de la flèche.

Il est facile de voir que, dans ces conditions, cette rotation ne peut être le résultat des actions réciproques

de deux éléments consécutifs de courant, lesquelles s'équilibrent, ni d'une action magnétique quelconque.

Dans la théorie que nous proposons (*), il n'y a ni électricité ni électrons, il n'y a que l'énergie-matière dont l'élément *ion* est propulsif et aspirant. La déformation potentielle détermine dans certains cas des apparences positive ou négative, de même que la température détermine des apparences de froid et de chaud.

Le courant n'est pas un courant d'électricité ni de corpuscules électriques, il s'agit d'une oscillation orientée de l'éther, comparable à celle du son, dans un tube sonore, que l'on pourrait supposer muni de deux embouchures, l'une aspirante, l'autre propulsive.

L'ion hélicoïdal détermine l'aspiration et la propulsion; son mouvement de translation et ses déformations déterminent la vibration.

Si dès lors nous supposons la matière formée d'atomes constitués par ces ions, par exemple la feuille d'or dont

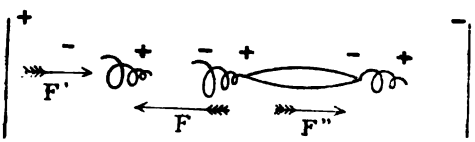


Fig. 4.

nous parlions plus haut, le mouvement de vis déterminera une succession de départs ioniques dans les sens de la flèche F (fig. 4), lesquels détermineront d'abord une

(*) De Heen, *La matière*. (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 3e sér., t. VI, 1905 [pp. 82 et 84 de l'extrait].)

succession de vibrations longitudinales et ensuite un courant d'éther dirigé suivant le sens du courant, suivant F'.

Nous avons utilisé ici la notation relative afin de faciliter la compréhension; le résultat est évidemment le même si l'on considère les déformations absolues qui comportent une variation du milieu ambiant.

Nous voyons maintenant disparaître le paradoxe auquel aboutit la théorie électronique. L'ion agit sur l'atome ou sur la matière, et l'éther agit sur l'ion. La réaction due au départ des ions détermine le déplacement du conducteur dans le sens F'', c'est-à-dire dans le sens du courant ; ensuite le courant d'éther F' de même sens détermine, dans le cas du courant circulaire, la gyration du rayon cathodique dans le même sens.

Il est facile de voir que dans la théorie des électrons on confond le mouvement des soi-disant électrons avec le mouvement des ions orientés négativement. Ceux-ci ne *constituent* pas le courant, *mais le déterminent* en sens inverse.

Les conséquences en opposition avec l'observation ne peuvent manquer de continuer à s'accumuler dans la théorie des électrons, mais leur nombre atteindra sans doute un chiffre beaucoup plus élevé avant qu'elles ne parviennent à vaincre ce que l'on pourrait appeler l'inertie de la pensée des collectivités. Ce phénomène, qui s'est du reste produit lorsqu'il s'est agi de la lumière, ne peut manquer de se manifester en toute circonstance analogue; elle est la conséquence de la confusion qui existe entre ce que doit être la prise en considération de la pensée d'un homme éminent et l'espèce de fétichisme que l'on y substitue.

De la capacité électrique.

Lorsque l'on aborde l'étude des phénomènes électriques, on est d'abord frappé par la simplicité de l'interprétation des phénomènes fournie par la théorie des fluides, dont la théorie des électrons dérive directement.

Mais à cette première impression ne tarde pas à en succéder une tout opposée lorsqu'on demande de superposer à la conception du *zéro électrique*, ou de l'électricité neutre, la conception du *zéro de potentiel* et lorsque l'on montre que ces deux zéros ne coïncident pas nécessairement. Mais la chose s'aggrave encore singulièrement lorsque, considérant l'électron comme étant l'origine de l'action électrique dite à distance, on montre que cette action existe même lorsque l'électron n'existe pas dans le cas de la surface plane. Cette même surface ne fournit aucune électricité au plan d'épreuve, d'où l'on conclut qu'elle n'existe pas; mais si l'on met cette surface en communication, à l'aide d'un fil long et fin, avec un électroscope, on en retrouve. Jouant alors sur les mots, on dit que ce n'est pas de l'électricité, mais un potentiel électrique qui se manifeste là, on ne sait pourquoi, puisque la cause supposée est l'électron en excès, et que celui-ci n'existe plus.

C'est ainsi que nous voyons la théorie des électrons étayée sur des considérations à la base desquelles on suppose des effets sans cause! Les électrons constituent non seulement une hypothèse fort incommode pour relier les faits, ainsi que nous l'avons montré, mais ils constituent en plus une conception essentiellement absurde,

c'est-à-dire en contradiction avec la première loi de la logique.

Nous pouvons donc conclure qu'il n'y a à cela qu'un seul remède à apporter, celui qui consiste à renverser les rôles. Considérer l'électricité comme un effet et non comme une cause et considérer le potentiel comme une cause capable de produire, *dans certains cas*, des apparences électriques, de même qu'une température peut produire des apparences de chaud ou de froid.

Si donc nous voulons construire une *théorie physique*, CE QUI EST LE BUT DE LA PHYSIQUE, il faudra faire la théorie physique du potentiel et non celle de l'électricité qu'on appelle théorie des électrons.

Certains esprits trouveront peut-être qu'il est inutile de créer une théorie physique et qu'il est superflu de s'occuper de cette science. Je demanderai alors à ceux-là comment ils peuvent porter le moindre intérêt à la théorie de la lumière dont les équations dérivent de la conception de choses tout aussi concrètes que les objets de formes diverses dont découlent les abstractions géométriques. Il n'y a pas d'abstraction possible si l'on ne part de la conception d'une chose concrète, ainsi que le dit l'étymologie du mot lui-même.

Lorsque nous développons un potentiel à la surface d'un conducteur, nous produisons une déformation ionique capable d'*extérioriser* une certaine quantité d'*énergie-matière* Φ, et afin de déterminer cette déformation, nous dépensons un travail T équivalent à une énergie électrique Q, toujours plus petite que Φ. C'est cette énergie Q qui est seule libérable et qui correspond à ce qu'on appelle *électricité*. L'énergie Φ est celle qui est développée dans le champ que nous avons désigné sous le nom de

champ d'action. C'est elle qui détermine les actions dites à distance.

La quantité Q, pour une déformation potentielle Γ donnée, devient d'autant plus petite que le rayon de courbure est plus grand. De telle manière que l'on peut écrire

$$Q = \frac{\Gamma}{r} = \Delta$$

pour l'unité de surface, r représentant le rayon de courbure, Δ représentant la densité électrique apparente (*).

Cette quantité d'énergie est celle que l'on peut retirer d'un conducteur possédant un potentiel électrique déterminé, par exemple à l'aide de ce que l'on appelle le *plan d'épreuve*.

Lorsque nous déchargeons une sphère électrisée, par exemple, la quantité d'énergie Q est donc libérée et la quantité d'énergie Φ — Q est restituée à la matière.

Il résulte également de ces considérations que l'énergie électrique Φ ou Q ne se trouve nullement localisée à la surface du conducteur, mais qu'elle constitue pour ainsi dire une atmosphère énergétique enveloppant celui-ci.

Donc, lorsque nous exprimerons la quantité d'énergie libérable en fonction de la déformation Γ, cela supposera implicitement que le milieu environnant la sphère est illimité. Mais si nous limitons cet espace à l'aide d'une enveloppe sphérique concentrique par exemple, de manière à réaliser un condensateur, les choses se passe-

---

(*) De Heen, *L'énergie-matière*. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique (Classe des sciences), p. 427, 1907.)

ront *comme si* nous avions substitué à la valeur de Γ une autre valeur Γ_1.

Considérons deux sphères de rayons r et r', réunies à l'aide d'un fil conducteur long et fin. Si nous représentons respectivement par Q et par Q' les quantités d'énergie libérables correspondant à la valeur de e, nous aurons

$$Q = k\frac{Q}{r}; \qquad Q' = k'\frac{Q'}{r'},$$

k et k' représentant les capacités.

Mais nous pouvons également exprimer la quantité Q en fonction de l'énergie libérable par unité de surface égale à $\frac{\Gamma}{r}$.

Nous aurons alors

$$Q = 4\pi r^2\frac{\Gamma}{r}; \qquad Q' = 4\pi r'^2\frac{\Gamma}{r'}.$$

La quantité Γ, ainsi que nous l'avons démontré (*), est indépendante du rayon de courbure et l'on sait qu'il en est de même de $\frac{Q}{r}$, puisque le *potentiel* PARTIEL est constant à la surface d'un conducteur.

Les physiciens qui estiment que le potentiel peut subsister alors que la quantité Q d'électricité est absente, seront certainement de mon avis que ce potentiel ne peut être le potentiel total. Ceux qui pensent au contraire que la totalité du potentiel a pour mesure $\frac{Q}{r}$ sont conduits à cette conclusion nécessaire et contraire à l'observation, que ce potentiel doit toujours être nul pour une surface

(*) *L'énergie-matière*, p. 448.

plane découpée dans une surface plane illimitée ou pour la surface plane d'un des plateaux de l'électromètre de Lord Kelvin, munie de son anneau de garde.

En effet, si l'on représente par s cette surface, par δ la densité électrique et par a une constante, on a

$$\frac{Q}{r} = \frac{\delta . s}{r} = \frac{s\frac{a}{r}}{r} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

Nous avons donc simplement substitué à la considération du *travail potentiel partiel* la considération de la *déformation potentielle* Γ.

Nous pouvons donc écrire :

$$Q = r \times \frac{Q}{r}; \qquad Q' = r' \frac{Q'}{r'};$$

$$Q = 4\pi r \times \Gamma; \qquad Q' = 4\pi r' \times \Gamma,$$

puisque $\frac{Q}{r}$ est égal à $\frac{Q'}{r'}$.

Si donc on veut exprimer la quantité d'énergie libérable Q en fonction de la déformation potentielle au lieu de l'exprimer en fonction du travail potentiel $\frac{Q}{r}$, il suffit de diviser cette dernière grandeur par 4π :

$$\Gamma = \frac{Q}{r} \cdot \frac{1}{4\pi}.$$

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, ceci suppose que l'atmosphère énergétique du champ n'a pas été modifiée, car si l'on disposait une deuxième sphère concentrique, les choses se passeraient comme si l'on avait modifié la valeur de Γ en la multipliant par une constante,

attendu que nous aurions modifié également l'énergie du champ auquel une valeur déterminée de Γ donne naissance.

Il faudra donc alors substituer à la valeur *réelle* de Γ une valeur *fictive* Γ_1, telle que l'on a

$$\Gamma_1 = \Gamma \,.\, A,$$

A représentant une constante.

Cette constante se détermine aisément à l'aide de la fonction potentielle.

Enveloppons notre sphère chargée de rayon r d'une deuxième sphère conductrice de rayon r_1 (fig. 1), que nous amènerons au potentiel zéro de l'espace. Nous devrons, dans ces conditions, substituer à la considération du travail potentiel correspondant au déplacement de l'unité de charge depuis l'infini jusqu'à la surface s, la considération de ce travail dont nous aurons soustrait le travail potentiel correspondant au travail effectué à l'extérieur de la surface s_1, attendu que nous avons supprimé ce champ extérieur c en amenant cette surface au zéro de potentiel.

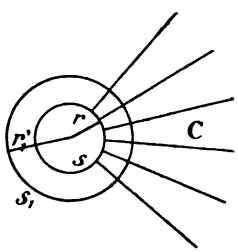


Fig. 1.

Donc au lieu d'écrire

$$k = \frac{Q}{\frac{Q}{r}}$$

nous devons écrire

$$k_1 = \frac{Q}{\frac{Q}{r} - \frac{Q}{r'}} = \frac{rr'}{r' - r}.$$

Calculons maintenant la capacité en partant de la considération de la déformation fictive Γ_1, au lieu de considérer le travail potentiel ; nous aurons alors

$$k_2 = \frac{r\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \cdot 4\pi,$$

et puisque la déformation Γ_2 attribuée à la sphère extérieure est supposée égale à zéro, nous aurons

$$k_2 = 4\pi r,$$

d'où

$$Q_1 = 4\pi r\Gamma_1 = 4\pi r\Gamma \times A.$$

D'autre part, nous avons

$$Q_1 = \frac{rr'}{r'-r}\frac{Q}{r} = \frac{rr'}{r'-r} \cdot 4\pi\Gamma,$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{r'}{r'-r}$$

et

$$Q_1 = \frac{4\pi rr'}{r'-r}\Gamma.$$

En établissant cette deuxième surface, les choses se passent donc comme si nous avions accru la masse ou le frottement différentiel de l'éther.

Représentons par d la distance des deux surfaces $r'-r$ et supposons que cette distance soit très petite par rapport au rayon de courbure r. Nous pouvons écrire alors sans erreur sensible $r' = r$, d'où

$$Q_1 = \frac{4\pi r^2}{d}\Gamma.$$

Nous voyons maintenant que l'énergie libérable est localisée non plus dans un champ de dimension indéfinie, mais bien dans une couche sphérique d'épaisseur très petite d, d'où il résulte que cette énergie est nécessairement proportionnelle à la surface de la sphère $4\pi r^2$.

Si enfin, au lieu de considérer la surface totale de la sphère, nous considérons une surface déterminée S, la quantité Q_1 s'écrira

$$Q_1 = \frac{S}{d}\Gamma.$$

Remarquons maintenant que la capacité r exprimée en fonction du travail potentiel correspond à la capacité $4\pi r$ exprimée en fonction de la déformation potentielle; en d'autres termes, la capacité d'un condensateur plan exprimée en fonction de Γ est égale à $\frac{S}{d}$; si elle est exprimée en fonction du travail potentiel, elle devient $\frac{S}{4\pi d}$, ce qui est l'expression classique.

Si l'on pose $d = \infty$, on a $Q_1 = 0$.

La capacité d'une surface plane limitée découpée dans une surface sphérique de rayon infiniment grand est égale à zéro. Proposition qui n'implique pas la nullité de la capacité d'une surface plane détachée de la surface sphérique infinie considérée.

Conclusions. — *a*) Lorsque l'on communique à un conducteur un potentiel différent de celui de l'espace, la matière extériorise une certaine quantité de son énergie, laquelle est localisée tant à l'intérieur qu'à l'extérieur des conducteurs creux.

b) Cette quantité d'énergie est proportionnelle à la

déformation Γ, qui est indépendante du rayon de courbure.

c) Une fraction vraisemblablement très petite de cette énergie extériorisée est libérable dans certaines conditions régies par la théorie qui détermine la capacité des conducteurs, lorsque l'on ramène le conducteur au potentiel du milieu. C'est cette fraction d'énergie apparente qui a été seule prise jusqu'à présent en considération et qui a été désignée sous le nom de charge électrique.

Quant à l'énergie restante, constituant toujours la très grande part, elle est restituée à la matière au moment de la décharge.

d) L'énergie électrique libérable n'est donc nullement répartie à la surface des conducteurs, ainsi que cela est admis dans la théorie des fluides et des électrons. Cette conception n'est à peu près réalisée que dans un condensateur sphérique, pour lequel l'épaisseur d du diélectrique est relativement très petite. L'énergie libérable est alors localisée entre les deux surfaces sphériques.

e) La quantité d'énergie libérable, toutes choses étant égales, dépend évidemment de la grandeur de l'*énergie-matière* dans laquelle elle se développe ou de la matière diélectrique considérée.

Le potentiel $\frac{Q}{r}$, qui perd toute signification dans le cas de la surface plane, puisque $r = \infty$, en acquiert maintenant une très réelle.

f) Le classement des phénomènes électriques exige que l'on substitue à la considération de la matière (par hypothèse entité irréductible) la considération de l'*énergie-matière*, énergie qui est susceptible de s'extérioriser dans la manifestation du champ.

De l'action dite à distance.

Nous avons montré (*) que les choses se passent comme si le champ émanait de la surface des conducteurs, occupée par les ions. Ceux-ci jouent vis-à-vis du champ un rôle analogue à celui que jouerait un léger tourniquet animé d'un mouvement de rotation vis-à-vis du fluide dans lequel il est plongé.

Si l'on représente toujours par Γ la *densité d'action*, ou la *densité potentielle* de la surface, on trouve dans le cas de la sphère :

$$\Gamma = \left(1 + \frac{D}{R}\right)\sqrt{\frac{F}{4\pi s}},$$

R représentant le rayon de la sphère et D la distance qui sépare la surface de cette sphère de la surface s chargée au même potentiel.

Pour $D = 0$,

$$\Gamma = \sqrt{\frac{F}{4\pi s}}.$$

La densité d'action est donc indépendante du rayon de courbure, elle est encore la même lorsque $R = \infty$, ainsi que la formule le montre.

C'est ici que nous voyons apparaître l'un des faits les plus intéressants au point de vue de l'histoire de la science de l'électricité.

Actuellement les électriciens se débattent pour ainsi dire dans le dilemme suivant : Ou bien les actions élec-

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), p. 445, 1907.

triques sont dues à des fluides *mobiles* à la surface et dans les conducteurs, formés d'éléments qui se repoussent et s'attirent mutuellement, et s'il en est ainsi, la densité électrique est nécessairement nulle sur une surface plane. Or, si les éléments agissants font défaut, deux surfaces planes ne peuvent en aucun cas exercer une action mutuelle à distance.

Cette action existe ou elle n'existe pas ; si elle n'existe pas, la théorie des fluides et des éléments mobiles est exacte, mais si elle existe, ce qui est le cas, il faut bien admettre que les éléments agissants ou électriques subsistent (ce qu'ils admettent du reste après avoir dit le contraire), et alors la théorie des fluides ou des électrons mobiles est nécessairement fausse.

Nous venons au contraire de montrer que les éléments agissants se comportent comme s'ils étaient *fixes* à la surface et que leur densité est indépendante du rayon de courbure, qu'il soit du reste positif ou négatif.

Nous pouvons donc faire deux hypothèses qui sont équivalentes dans beaucoup de cas :

1° Ainsi qu'on l'affirme actuellement, que le travail potentiel $\frac{Q}{r}$ est constant à la surface. Et l'on part à cet effet de l'hypothèse(*) de l'existence d'un *fluide* électrique, lequel engendrera une surface de niveau, ainsi que le ferait une masse liquide, et nous disons alors que le travail est constant à la surface des conducteurs ;

2° Nous pouvons considérer les éléments agissants comme s'ils étaient *fixes* à la surface des conducteurs et leur attribuer une variabilité de *faculté d'action* que nous

(*) L'énergie ne se communique pas par *écoulement* d'un conducteur à l'autre, ainsi que nous l'avons montré, mais par *induction*.

désignons sous le nom de *densité d'action* ou de *densité potentielle*. Mais dans ces conditions, le travail potentiel varie et peut varier avec le rayon de courbure, de même que si nous substituions à la considération de la masse liquide, dont nous avons parlé dans le premier cas, la considération d'une masse solide.

Dans la théorie classique, les quantités supposées en action sont les quantités Q d'électricité apparente ou d'énergie *libérable*. D'autre part, nous avons montré que la densité apparente était égale à la densité potentielle, divisée par le rayon de courbure, soit $\frac{\Gamma}{r}$. La quantité d'électricité apparente Q répartie sur la sphère aura donc pour mesure le produit de la densité par la surface :

$$Q = 4\pi r^2 \frac{\Gamma}{r} = 4\pi r \Gamma,$$

d'où

$$\frac{Q}{r} = 4\pi r^2 \frac{\Gamma}{r^2} = 4\pi \Gamma.$$

Si donc le *potentiel apparent* est constant, Γ l'est également.

Si au lieu de considérer la densité *apparente* nous considérons la quantité d'énergie totale, Φ agissant *réellement* à distance, nous aurons

$$\Phi = 4\pi r^2 \Gamma,$$

et dans ces conditions le *travail potentiel réel* est

$$\frac{\Phi}{r} = 4\pi r \Gamma.$$

Le travail potentiel réel est donc proportionnel au rayon de courbure lorsqu'on suppose les éléments agissants *fixes*.

Or *les actions à distance ne sont pas proportionnelles à* Q, *mais bien à* φ, *c'est-à-dire au carré du rayon de la sphère et non au simple rayon.*

Nous voyons maintenant disparaître cette conclusion *doublement* paradoxale et relative à la surface plane lorsque l'on considère la fonction $\frac{Q}{r}$. D'abord, si l'on remarque que la densité apparente est inversement proportionnelle au rayon, Q est *nécessairement* nul; ensuite, si même on ne supposait pas $Q = 0$, le potentiel le serait nécessairement, puisque $r = \infty$. Or cette surface sans électricité et sans potentiel exerce une action à distance, alors que nous voyons qu'il s'agit uniquement de la densité potentielle Γ qui est la même sur toutes les surfaces.

Si Coulomb, au lieu d'opérer à l'aide d'*une* sphère ayant un rayon déterminé, avait opéré sur des sphères de rayons variables, il aurait constaté cette particularité, *laquelle entraînait comme conséquence rigoureuse l'impossibilité de fournir une interprétation des phénomènes électriques à l'aide de l'hypothèse des fluides et des électrons.*

C'est ainsi qu'une cause en apparence insignifiante a eu pour conséquence de dévoyer les physiciens non seulement depuis l'époque où les expériences de Coulomb ont été réalisées, mais probablement pendant un grand nombre d'années encore si l'on tient compte de la loi qui régit l'intellectualité humaine aussi sûrement que celle qui régit la matière, que l'on pourrait désigner sous le nom de *loi de l'inertie mentale*, en vertu de laquelle une idée régnante, pas plus que la vitesse acquise d'une quantité de matière considérable, ne peut être enrayée qu'au prix des plus grands efforts.

—

Sur l'absence de signification du point critique lorsqu'un liquide n'est pas en contact avec sa vapeur; par P. De Heen, membre de l'Académie.

Le but de cette note est de montrer que l'on est dans l'erreur si l'on définit la température critique comme étant la température à laquelle se produit la volatilisation totale d'un liquide. Cette température n'est *nécessairement* pas unique, mais il en existe une infinité qui dépendent exclusivement de la pression, de même que pour la température d'ébullition. Ce qu'on appelle ordinairement température critique, c'est-à-dire la température à laquelle la tension superficielle disparaît ou encore la température à laquelle l'isotherme ne présente plus la partie rectiligne correspondant à la vapeur saturée, ne présente plus aucune particularité essentielle si l'on considère un liquide qui n'est pas en contact avec sa vapeur.

Rappelons d'abord qu'un gaz ou une vapeur est définie d'une manière générale par l'équation

$$P = k - \pi.$$

Dans cette expression, P représente la force expansive résultante, k l'action calorifique qui tend à produire cette action et π la pression interne qui tend à s'y opposer.

A partir d'une certaine température, $k = \pi$ ou $P = 0$, et si l'on dépasse cette température en descendant l'échelle, π l'emporte sur k, c'est-à-dire que la force expansive devient négative ou, en d'autres termes, elle se transforme en force contractile.

Nous écrirons alors

$$-P = k - \pi.$$

Telle est l'équation qui caractérise les solides et les liquides.

Rien ne nous empêche maintenant de soumettre ces corps à une pression p qui s'ajoutera à la pression interne, et nous aurons alors

$$-(p + P) = k' - (\pi + p).$$

Nous supposons donc dans tout ceci que le liquide n'est pas en contact avec sa vapeur. Or nous pouvons attribuer à p une valeur aussi grande que nous le voulons, de manière à conserver au premier et au deuxième membre une valeur négative même si P est positif, *quelle que soit la fonction de la température* k. Au-dessus de la température critique, nous pourrons encore écrire

$$-p + P = k'' - (\pi + p) < 0.$$

Si $p > P$ en valeur absolue, la substance se comportera comme si elle était douée de force contractile et non de force expansive. (C'est ce qui se passe au-dessus de la température critique.)

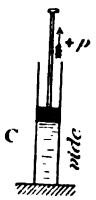


Fig. 1.

Considérons un cylindre c (fig. 1) renfermant un liquide et absolument purgé d'air de manière à empêcher la production de toute surface libre, de toute évaporation, et soumettons le piston à une traction p que nous supposerons invariable dans une opération, et représentons les variations

de p — P (fig. 2) en fonction de la température par les isobares ab, $a'b'$, etc.

Lorsque ces isobares rencontrent l'axe des températures, il y a *rupture* du liquide p — P = 0, et à ce moment apparaît de la vapeur dont la tension peut se représenter par + P.

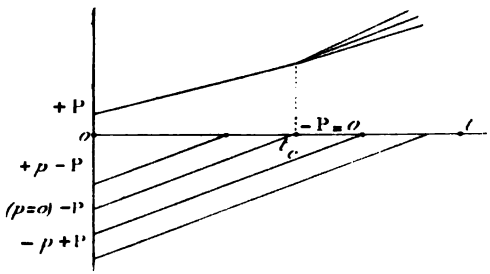


Fig. 2.

Nous voyons alors que le liquide résiste d'autant moins à la rupture que la température est plus élevée, et lorsque celle-ci aura atteint une certaine valeur t_c, la charge de rupture p deviendra nulle.

Mais il est évident qu'à cette température il ne se produit aucune transformation brusque de la constitution du liquide; il n'y a aucune raison pour cela à priori, et l'expérience concorde avec cette manière de voir.

Nous pouvons, en effet, poursuivre sans aucune discontinuité notre tracé d'isobares à la condition de soumettre le liquide à une *pression* constante au lieu de le soumettre à une *traction* constante; nous attribuons alors à p le signe —, et la température à laquelle le *liquide* passera à l'état gazeux, où il y aura toujours *rupture*, sera d'autant plus élevée que la valeur numérique de — p sera

plus grande que la valeur de + p sera plus petite. Mais il n'y a dans tout cela aucune discontinuité, ce en quoi nous ne contredisons pas, je pense, les partisans de la continuité.

On pourra toujours régler la valeur de p afin de conserver la substance à l'état liquide, à une température aussi élevée que l'on voudra. Ce *liquide* prend donc une force expansive croissante et positive à partir de la température critique ou à peu près, mais qui n'a aucun rapport avec une température de changement d'état.

Pour les partisans de la théorie d'Andrews, il doit, au contraire, exister une température, celle où la tension superficielle devient nulle (ou sensiblement), c'est-à-dire t_c et qui correspond à $p = 0$, et pour laquelle cette pression doit passer *très rapidement* de 0 à la pression critique.

Nous avons au contraire montré, en nous basant sur l'expérience, que si l'on opère sur un liquide *pur*, il ne se produit aucune discontinuité à la température critique.

La pression, au lieu de passer brusquement de zéro à la pression critique, croît insensiblement, et il en est de même de la dilatabilité et de la compressibilité.

Au-dessus de l'axe des températures, nous pouvons considérer le deuxième état allotropique, c'est-à-dire le gaz ou la vapeur pour lesquels nous n'avons à considérer qu'une seule valeur de + P pour chaque température au-dessous de la température critique, et une infinité de valeurs de P au-dessus de t_c.

En réalité, le réseau des isothermes tel qu'on le trace généralement est incomplet. Il doit être représenté tel que nous l'indiquons figure 3. La cause de la lacune à laquelle nous faisons allusion se trouve dans cette cir-

constance que l'on a toujours conçu les variations des positions des points figuratifs en commençant par comprimer des vapeurs ou des gaz très détendus. On a donc conçu la suite des variations en partant d'un point *a* par exemple.

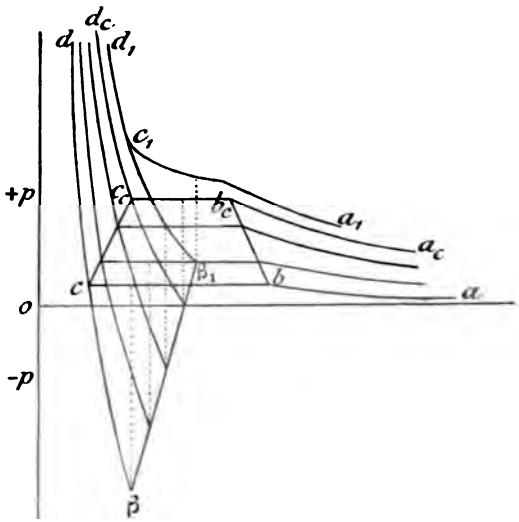


FIG. 3.

Dans ces conditions, on devait nécessairement arriver à la conception d'une isotherme unique *a b c d*.

Mais si, au lieu de partir du point *a*, on était parti du point *d*, on aurait, en tenant compte de faits connus depuis longtemps, remarqué qu'au point *c* il se produit une bifurcation qui n'est indiquée dans aucun travail sur le point critique. On peut obtenir indifféremment, suivant les conditions expérimentales dans lesquelles on se place, soit la courbe *dcba*, soit la courbe *d c* β.

A la température critique ou *à peu près*, ce qui importe peu au point de vue de l'allure générale du tracé, la charge de rupture — p devient nulle, et la bifurcation continue à exister tout aussi bien au-dessus qu'en dessous de la température critique, de manière à obtenir les courbes $d_1\ c_1\ a_1$, et $d_1\ c_1\ \beta_1$.

Une question intéressante se pose maintenant : La constante de l'attraction moléculaire a qui caractérise une substance varie-t-elle nécessairement avec le degré de polymérisation ou l'état allotropique?

Ou, en d'autres termes, si nous écrivons

$$\lambda = \int \frac{a}{v^2}\, dv + RT,$$

la valeur de a exprime-t-elle bien la constante qui caractérise le coefficient d'attraction?

Rien ne nous oblige nécessairement à admettre que cette constante varie avec le degré de polymérisation. En effet, remarquons qu'elle ne dépend que de l'intensité des courants atomiques agissants. Or plusieurs fibres atomiques se comportant chacune comme un fil élastique peuvent parfaitement s'enrouler, se polymériser sans que pour cela l'élasticité de chacune d'elles, prises individuellement, soit pour cela modifiée. On pourrait du reste encore concevoir que des courants dont les actions s'équilibrent aient pris naissance.

Considérons dès lors de l'énergie fournie à la matière sous la forme calorifique afin d'accroître l'intensité de courants atomiques dont les actions s'équilibrent; il est évident que cette chaleur que l'on considérait jusqu'à présent comme devant nécessairement être transformée

en travail de dilatation ou de transformation d'état moléculaire, sera devenue tout simplement latente.

Sans vouloir trancher ici la question, qui nécessitera des études ultérieures, nous avons voulu montrer que le rapport entre la quantité de chaleur fournie à un corps et la pression interne pourrait bien ne pas être aussi simple qu'on l'a cru jusqu'à présent.

—

Moustérien et Aurignacien; par A. Rutot, correspondant de l'Académie.

Depuis quelques années, les fouilles, en France, ont repris avec vigueur, surtout pour ce qui concerne la région à cavernes.

Dans la Vezère, après les explorations de l'abbé Breuil, du Dr Capitan, de M. Peyrony, du lieutenant Bourlon, de M. G. Chauvet, de MM. Giraux et Schleicher, M. O. Hauser, de Bâle, a repris l'étude des principaux gisements et fait actuellement de très importantes fouilles, qui paraissent fructueuses, notamment au Moustier, à la Micoque et à Laugerie-Basse.

D'autre part, M. le Dr Martin, à la Quina, et MM. A. Favraud et Hurtel, au Petit-Puymoyen, explorent activement, après M. Chauvet, les riches et intéressants gisements de la Charente.

Les abbés L. Bardon et Bouyssonie font de magnifiques trouvailles aux environs de Brive, dans la Corrèze, et l'abbé Parat termine les recherches dans les cavernes des vallées de l'Yonne et de la Cure.

En même temps, de nombreuses publications voient le jour, notamment de la part de l'abbé Breuil, de M. Paul

Girod, des abbés Bardon et Bouyssonie, du Dr Henri Martin, du lieutenant Bourlon, de M. A. Favraud, de M. Hauser, etc.

La plupart des fouilles en exécution paraissent bien conduites et elles apportent des documents nouveaux qui viennent, naturellement, un peu compliquer les connaissances acquises et bouleverser plus ou moins les vieilles classifications.

Un premier fait qui semble bien établi, et qui confirme les déductions tirées par M. Éd. Dupont de ses fouilles effectuées dans les cavernes de Belgique de 1861 à 1868, réside dans l'introduction, entre l'ancien Moustérien et le Solutréen, d'une importante division qui a récemment reçu le nom d'Aurignacien.

D'autres faits, qui semblent s'imposer avec des valeurs diverses, consistent dans la subdivision de l'Aurignacien en trois niveaux superposés et distincts, et, peut-être, dans l'éventualité du sectionnement de l'ancien Moustérien en plusieurs assises.

Certes, n'ayant pris part à aucune fouille, je n'ai nullement qualité pour intervenir personnellement dans le débat, ni pour proposer des solutions aux problèmes qui se posent; mais, me tenant cependant, dans la mesure du possible, au courant du travail de chaque explorateur, et recevant parfois d'eux de bonnes séries représentatives de leurs trouvailles, je puis peut-être faire œuvre utile en signalant les principales découvertes et en faisant ressortir leur valeur et leurs caractères; cela pourra probablement aider à orienter les idées vers un accord hautement désirable.

La question principale qui paraît se poser à l'heure actuelle concerne le Moustérien.

Qu'est-ce que le Moustérien, quelles sont ses limites et quelles peuvent être ses subdivisions?

M. M. Bourlon, par ses fouilles, a récemment fait connaître que la masse du Moustérien, à la station type du Moustier, comprend plusieurs niveaux distincts, surmontés par un niveau aurignacien.

Il a montré — ce que j'avais déjà reconnu depuis longtemps à l'inspection de la série du Moustier offerte en don par Éd. Lartet au Musée royal d'histoire naturelle de Bruxelles — que l'industrie est plus compliquée que l'admettait G. de Mortillet et que, comme dans toute industrie quelconque, les percuteurs, les couteaux, les racloirs, les grattoirs et les perçoirs sont présents, accompagnés d'instruments amygdaloïdes de travail plus ou moins lâché, en décadence manifeste sur le bel Acheuléen II, celui-ci étant compris, dans le bassin de Paris, à la limite du limon argileux et du limon fendillé.

Non seulement le Moustérien ne renferme absolument rien de neuf comme outils, mais il constitue en réalité une régression par rapport aux beaux outillages du Chelléen et surtout de l'Acheuléen.

La pointe moustérienne elle-même, réputée si caractéristique, se montre depuis la fin de l'Éolithique jusque la fin du Néolithique, et cela n'a rien d'étonnant, car elle n'est que la simple utilisation d'un éclat ovale, à talon épaissi par le bulbe de percussion et dont les deux arêtes tranchantes ont successivement servi de racloir, en tenant l'outil d'abord de la main droite, puis de la main gauche, par la base épaissie.

L'accumulation des retouches d'avivage pratiquées sur les deux arêtes utilisées représente ce que l'on appelle erronément la « taille ». Bref, la pointe moustérienne

n'est qu'une « résultante » d'utilisation, c'est un *racloir double* à arêtes convergentes, comme il y en a d'autres à bords parallèles.

Ce qui caractérise *réellement* le Moustérien, c'est la *prépondérance des racloirs*, soit sous leur forme ordinaire à retouche unilatérale, soit sous la forme de pointe moustérienne, ou racloir double à retouche bilatérale, prépondérance qui relègue à l'arrière-plan les autres instruments si largement employés auparavant, c'est-à-dire les couteaux et surtout les grattoirs, les perçoirs et les instruments amygdaloïdes.

De toutes façons, le Moustérien du Moustier s'offre donc à nous comme une régression, sans gain quelconque ni compensation, car les recherches de M. Bourlon ont entièrement confirmé la donnée de G. de Mortillet, d'après laquelle les populations du Moustier n'auraient pas connu l'utilisation de l'os.

Tel nous apparaît le Moustérien typique, qui, sans la présence de la hache en amande, rétrograderait, au point de vue industriel, au niveau de la dernière industrie éolithique pré-paléolithique (Mesvinien), avec, même, une plus grande pauvreté manifeste de l'outillage.

Ces caractères étant bien établis, y a-t-il lieu de classer dans le Moustérien, comme on le fait généralement, les gisements de la Charente, tels que la Quina et le Petit-Puymoyen ?

Certes, prise en gros, l'industrie de la Charente est de type moustérien, mais il s'y ajoute deux notions nouvelles : l'apparition manifeste de l'utilisation de l'os et celle des boules de pierre dites *bolas*.

De plus, alors qu'en Belgique nous ne connaissons

aucune station du type moustérien du Moustier, nous connaissons maintes stations, tant troglodytiques qu'à l'air libre, du type de la Quina, renfermant le niveau d'Hastière, ou niveau le plus inférieur de nos cavernes.

Et ici, ce ne sont pas seulement les os utilisés et les bolas (1) — représentés par de simples galets roulés de roches gréseuses ramassés au bord de la rivière — que les nouvelles populations nous apportent, elles y ajoutent la connaissance de la poterie.

L'absence de vrais moustériens en Belgique s'explique tout naturellement par le fait que l'époque du Moustier concorde avec la fin de la grande crue hesbayenne, due à la fusion rapide des glaces du second glaciaire quaternaire (*Rissien* du Prof^r Penck), crue qui avait immergé le bassin anglo-franco-belge sous 130 mètres d'eau et supprimé toute condition d'existence.

Le Nord de la France et la Belgique, devenus déserts, ont donc dû être repeuplés par des tribus venant du Sud, c'est-à-dire du Périgord.

Cette émigration, faite d'abord sans but précis, à l'aventure, a dû prendre un certain temps; aussi, les familles qui ont quitté le Périgord munies de l'outillage moustérien typique, ont dû, par leur transformation en nomades, évoluer et parer, en route, tantôt à la pénurie de silex, remplacé partiellement par l'os, tantôt à l'im-

---

(1) En révisant récemment les matériaux recueillis par M. A. Rucquoy, lors de la première fouille de la célèbre caverne de Spy, j'y ai rencontré, avec étonnement, une magnifique boule en calcaire blanc, dite *bolas*, absolument identique à celles trouvées dans les stations de la Charente et que j'avais classée autrefois parmi les percuteurs, alors que l'attention n'était pas encore attirée sur elles

possibilité de transporter des liquides en l'absence de récipients.

Une question se pose donc nettement :

Y a-t-il lieu de laisser le Moustérien, tel que le fournit la station type du Moustier, comme industrie exclusivement à base de pierre, ou y a-t-il lieu de le compliquer d'un niveau supérieur — dit de la Quina ou d'Hastière — à industrie de pierre accompagnée du commencement de l'utilisation de l'os et, plus localement, de la connaissance de la Poterie?

Pour ce qui me concerne personnellement, je préférerais m'en tenir au Moustérien simple du type du Moustier, uniquement à base de pierre, qui resterait comme le déclin définitif de la belle époque du Paléolithique inférieur dont l'Acheuléen II serait l'apogée, quitte à considérer l'introduction de l'usage de l'os et de la poterie comme l'entrée dans une période nouvelle, caractérisée surtout par l'utilisation de l'os toujours plus généralisée et plus perfectionnée, et qui constituerait le Paléolithique supérieur.

C'est pour cette raison qu'en l'absence du vrai Moustérien en Belgique, j'ai considéré notre niveau d'Hastière — équivalent exact de la Quina — comme représentant l'Aurignacien inférieur.

On pourra m'objecter, il est vrai, que l'Aurignacien inférieur a déjà été caractérisé différemment par l'abbé Breuil.

L'Aurignacien inférieur du zélé préhistorien français a pour type la grotte des Fées, à Chatelperron (Allier), et quelques abris des environs des Eyzies où, avec des racloirs et des pointes dites moustériennes, se rencontrent un nombre relativement grand d'éclats allongés à extré-

mité abattue obliquement ou parfois à dos complètement abattu (1). Ces instruments sont manifestement des *couteaux*, ainsi que le montre nettement l'ébréchure caractéristique du bord resté tranchant, la partie abattue n'étant qu'une retouche d'accommodation pour poser l'index de la main.

L'Aurignacien inférieur de la France centrale est, en effet, tel que l'abbé Breuil nous l'a fait connaître, mais il faut remarquer que c'est là un type local qui, probablement, n'a guère quitté cette région.

Le type créé par l'abbé Breuil est la conséquence de l'*évolution sur place* du Moustérien; elle s'est faite pendant que les Moustériens migrateurs se répandaient dans tous les sens, au midi vers Menton, à l'est vers le Wildkirchli et la vallée du Danube, au nord vers le Bassin de Paris et la Belgique, à l'ouest vers l'Océan.

Or les Moustériens émigrés, devenus nomades, ont eu leur évolution propre, en rapport avec leurs nouvelles mœurs, donc tout à fait indépendante de celle des Moustériens restés sédentaires dans le Périgord, et avec lesquels les tribus émigrées n'avaient plus guère de rapports directs.

Il est donc très compréhensible qu'à la même époque, Moustériens sédentaires et Moustériens migrateurs aient évolué séparément, vu qu'ils avaient des conditions

---

(1) Ces pointes à extrémité ou à dos abattus sont connues sous le nom de *lames de Chatelperron*.

Le Musée royal d'histoire naturelle de Bruxelles possède une belle série d'instruments du niveau aurignacien inférieur de l'abbé Breuil, provenant de l'Abri Audy et de l'Abri des Carrières, aux Eyzies, et du Rocher Mal-Pas, à Tursac.

d'existence très différentes, et que nous nous trouvions actuellement en présence de deux facies contemporains assez distincts.

Mais si le nouveau facies spécialisé, avec couteau à dos abattu, correspond à l'Aurignacien inférieur de l'abbé Breuil, son facies étendu contemporain des tribus émigrées, constitué par les types de la Quina, d'Hastière, de Menton et du Wildkirchli, devra aussi être rangé, comme je l'ai déjà proposé, dans l'Aurignacien inférieur.

Si l'on faisait autrement, l'Aurignacien vrai serait alors réduit à deux termes, le moyen et le supérieur, l'inférieur devenant ainsi du Moustérien supérieur.

A ce point de vue, les fouilles de M. A. Favraud, au Petit-Puymoyen, fournissent des données fort intéressantes.

En effet, la Charente est aux portes du Périgord et les Moustériens migrateurs y sont arrivés assez rapidement.

Ils se sont d'abord installés au Petit-Puymoyen et à la Quina, où ils ont abandonné les importants restes qui s'y rencontrent, avec industrie lithique moustérienne, accompagnée de bolas et d'os utilisés comme enclumes ou comme compresseurs pour la retouche des racloirs et des grattoirs (1).

Pendant que ces Moustériens émigrés occupaient les abris de la Charente, d'autres familles, parties de la

---

(1) On sait que M. Favraud a découvert, au Petit-Puymoyen, des fragments de mâchoires humaines paraissant fracturées intentionnellement, comme le sont la mâchoire de la Naulette et celles du Trou du Frontal, à Furfooz. Ces débris tendraient à faire croire à des pratiques de cannibalisme vers la fin du Moustérien. (Voir *Revue de l'École d'anthropologie de Paris*, fasc. de février 1908.)

Vezère, ont suivi; mais les habitants de la Vezère avaient évolué aussi, et les familles qui ont suivi les premières sont parvenues dans la Charente avec l'industrie évoluée à la manière des sédentaires, car au Petit-Puymoyen, comme, semble-t-il, à la Quina, il existe, au sommet des amas délaissés par les premiers occupants, un niveau supérieur en évolution sur l'inférieur et où nous trouvons, avec les instruments de silex ordinaires, des outils de type aurignacien inférieur (facies de la Vezère) et même des formes conduisant à l'Aurignacien moyen, avec plus d'os utilisés, bois de renne percés d'un trou intentionnel et sifflet en phalange de renne (trouvé à la Quina par M. Favraud).

A cause de leur proximité d'avec la Vezère, les stations de la Charente présentent donc, ensemble, les deux facies : de migration et sédentaire, de l'Aurignacien inférieur.

Pour ce qui concerne la suite de l'Aurignacien, l'évolution générale, dans le Périgord, comme dans les territoires extérieurs, c'est-à-dire dans l'Europe centrale, s'est faite plus régulière et plus uniforme.

Cela provient probablement de la continuation de l'émigration rayonnante, qui va remplacer, au loin, les descendants réduits ou disparus des premiers colons.

Les nouveaux émigrés partent, chaque fois, avec l'industrie au stade de l'évolution auquel sont parvenus les sédentaires au moment du départ, et la meilleure connaissance des routes les fait arriver à destination plus vite et plus directement qu'autrefois.

Cependant, bien qu'en gros l'industrie des émigrés ressemble, à un moment donné, à celle des sédentaires, on remarque toujours, dans les détails, certains retards bien compréhensibles, l'évolution des sédentaires, à

l'époque aurignacienne, ayant été continue et assez rapide.

Nous voici arrivés, à la fin de l'Aurignacien, à un moment intéressant : le Solutréen, sur lequel je crois utile de dire quelques mots.

En réalité, qu'est-ce que le Solutréen?

C'est de l'Aurignacien additionné de nombreuses *armes* de pierre.

En effet, la caractéristique du Solutréen peut se résumer comme suit :

1° Faible expansion territoriale, ou plutôt concentration des tribus sédentaires;

2° L'art naissant (sculpture, dessin, ornementation) est délaissé;

3° Les tribus du centre de la France s'arment; car les « pointes solutréennes » petites, moyennes et grandes ne représentent autre chose que des pointes de flèches, de javelots, de lances, ainsi que des poignards ou des glaives.

Or tous ces caractères sont concordants, car l'art disparaît devant la guerre et les migrations cessent.

Vers la fin de l'Aurignacien, l'expansion des tribus du centre de la France a donc été à peu près complètement enrayée et celles-ci ont dû s'armer pour se défendre contre un ennemi.

On voit, me semble-t-il, pendant l'Aurignacien supérieur, pénétrer déjà dans l'esprit des groupes sédentaires, comme dans celui de certains groupes émigrés (en Belgique notamment : trou Magrite et Spy), la nécessité de l'armement renforcé, car aux pointes de dards en os viennent s'ajouter les pointes de flèches en silex, à pédoncule du type de la Font Robert, rencontrées dans tous les gisements de cet âge.

Et vers la fin du Solutréen, les « pointes à cran », qui ne sont que des pointes de flèches, viennent encore renforcer les moyens offensifs ou défensifs des populations.

A un moment donné, le conflit paraît s'apaiser brusquement, car au Solutréen armé succède rapidement le Magdalénien pacifique, époque pendant laquelle l'émigration rayonnante reprend avec une certaine intensité, en même temps que reparaissent et se développent les manifestations de l'art, du goût et de la parure.

Les armes de silex, en revanche, disparaissent, ne laissant subsister que celles utilisées pour la chasse.

Si l'exposé que nous venons de faire s'accorde assez bien avec les faits actuellement connus, il se peut toutefois qu'il doive encore subir quelques modifications dans la suite, et c'est probablement aux recherches toutes récentes de M. O. Hauser qu'on le devra.

Ce préhistorien, qui me fait l'honneur de me tenir très au courant de ses fouilles par l'envoi de documents manuscrits ou photographiques, me signale, en effet, des faits nouveaux, notamment au sujet de la Micoque et du Moustier.

Pour ce qui concerne la Micoque, les modifications qu'il introduit dans nos connaissances sont importantes.

En effet, d'après les derniers terrassements, la Micoque aurait été un abri sous roche, à industrie homogène dans ses divers niveaux.

Il nous faut donc abandonner la notion, qui s'était déjà répandue, de l'existence de deux niveaux, l'un, inférieur, d'âge paléolithique ancien, l'autre, supérieur, qui correspondrait à une transition entre le bel Acheuléen II et le Moustérien.

A la profondeur de 8 mètres, des instruments amyg-

daloïdes identiques à ceux du niveau supérieur auraient été découverts, de sorte que ce que l'on avait pris pour un niveau à facies ancien, n'est probablement que l'accumulation des nuclei et des éclats résultant du débitage et de l'apprêtage des rognons de silex, en vue de la confection de l'outillage.

Ce prétendu niveau inférieur serait donc l'« atelier » de dégrossissage correspondant au gisement normal.

D'autre part, dans le gisement, M. Hauser aurait recueilli des os travaillés, dont l'un, déjà figuré, pourrait être un lissoir.

J'espère que le préhistorien bâlois ne tardera pas à publier et à figurer ces os travaillés, afin qu'on puisse s'en faire une idée quelque peu exacte.

On conçoit, en effet, toute l'importance de la trouvaille, car ces os travaillés tendraient à faire passer la Micoque du pré-Moustérien au post-Moustérien, et c'est bien ainsi, c'est-à-dire comme *Moustérien supérieur*, que M. Hauser date le gisement de la Micoque.

Il en est peut-être réellement ainsi, mais, à mon avis, il faudra mettre en avant des preuves sérieuses pour contrebalancer l'opinion qui fait de la Micoque une sorte de transition naturelle entre l'Acheuléen II et le Moustérien, à cause de la forte proportion d'instruments amygdaloïdes très bien taillés qui caractérise le gisement.

Il faut cependant avouer que, abstraction faite des instruments amygdaloïdes, les racloirs de la Micoque ressemblent énormément à ceux de la Quina et du Petit-Puy-moyen.

De plus, par comparaison, la station dite « chez Pourré » livrera aussi bientôt son secret.

Enfin, pour terminer, M. Hauser nous apprend encore deux nouvelles.

L'une réside dans la découverte, sur une terrasse, au-dessus de Laugerie-Haute, d'une vingtaine de « trappes », c'est-à-dire de sortes de puits circulaires disposés en quinconce et destinés à capturer le gibier pourchassé par des traqueurs (1).

Cette trouvaille vient confirmer une idée émise par M. Éd. Dupont, d'après laquelle l'utilisation de pièges était le principal moyen de capturer le gibier aux époques préhistoriques. M. Hauser a bien voulu nous faire parvenir d'excellentes photographies des « trappes » de Laugerie-Haute.

La dernière nouvelle, la plus récente, a trait à une découverte qui vient d'être faite au Moustier.

M. Hauser achève en ce moment la fouille de ce qui reste de la célèbre station. Après avoir vidé la terrasse moyenne, il déblaie l'abri du bas.

Il y rencontre énormément d'instruments en silex, dont certains de grandeur exceptionnelle, associés à des os martelés et à une sorte de poinçon en os à pointe oblique.

L'observation est d'un grand intérêt et il sera curieux de connaître l'ensemble industriel de ce point particulier, situé à la base de la falaise du Moustier.

Peut-être est-il possible que la première idée de l'utilisation de l'os ait germé au Moustier même, au moment du départ des premières familles émigrantes.

---

(1) D'après M. Hauser, il existait, au fond de ces pièges, des instruments caractérisant le Solutréen.

Espérons que M. Hauser nous apportera, sans tarder, les éléments de la solution de cet intéressant problème.

Enfin, au dernier moment, le même explorateur nous annonce la découverte d'un squelette humain dans ce même gisement du Moustier. Voilà, certes, une importante trouvaille qui vient en son temps et qui jettera sans doute quelque lumière sur le type de la race humaine à l'époque moustérienne.

—

Sur une congruence linéo-linéaire de cubiques gauches; par Lucien Godeaux, étudiant à l'Université de Liége.

Nous nous proposons d'étudier la congruence des cubiques gauches ayant quatre bisécantes communes a_1, a_2, a_3, a_4 et un point commun A. Cette congruence, que nous désignerons par Γ, est un cas particulier d'une autre plus générale signalée par M. Veneroni (*) et étudiée d'une manière plus complète par M. Stuyvaert (**); mais la méthode employée par ce dernier géomètre est purement algébrique, alors que la nôtre est surtout synthétique. Cette différence donnera peut-être quelque intérêt à notre travail.

1. — Par le point A menons la droite b_1 qui s'appuie sur a_1 et a_2 respectivement en A_1 et A_2, et la droite b_2

(*) *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe.* (Rendiconti di Palermo, 1902, t. XVI, pp. 209-229.)

(**) *Une congruence linéaire de cubiques gauches.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique [Classe des sciences], 1907, pp. 470-514.)

qui s'appuie sur a_3 et a_4 en A_3 et A_4. Ces droites déterminent un plan α.

Soit d une droite quelconque du plan α. Les deux quadriques $(a_1\ a_2\ d)$, $(a_3\ a_4\ d)$ (*) ont en commun, outre la droite d, une cubique gauche k passant par A et ayant pour bisécantes les cinq droites a_1, a_2, a_3, a_4, d.

Ainsi, *à toute droite* d *du plan* α *correspond une cubique* k *de* Γ *dont* d *est une bisécante.*

Soit k une cubique de la congruence Γ; cette courbe rencontre le plan α en trois points dont l'un est A. Désignons par A′ et A″ les deux autres. La droite d du plan α, à laquelle correspond la cubique k, s'il existe une telle droite, doit passer par deux des trois points A, A′, A″. Supposons en premier lieu qu'elle passe par A et A′. Alors les quadriques $(a_1\ a_2\ d)$, $(a_3\ a_4\ d)$ sont tangentes au plan α en A et leur intersection k est aussi tangente à α en A, donc le point A″ serait confondu avec A, ce qui nous mène à une contradiction qui provient de ce que nous avons supposé que la droite d passait par A. On doit donc prendre pour d la droite A′A″, si la cubique n'est pas tangente au plan α; dans le dernier cas, on prendra pour d la droite AA′.

On obtient une simple infinité de cubiques de la congruence Γ en prenant pour droite d successivement tous les rayons d'un faisceau (O, α) (**).

Ces courbes engendrent une surface cubique. Ce mode

(*) Nous désignons par (mnp) la surface engendrée par une droite y qui se meut en s'appuyant sur les trois directrices m, n, p.

(**) Nous désignons ainsi un faisceau de rayons situé dans le plan α et ayant pour centre le point O.

de génération a été étudié par Fr. Deruyts (*), et c'est la lecture de son travail qui nous a inspiré les recherches actuelles.

2. — Désignons par l_1, l_2 les droites qui s'appuient sur les quatre droites a_1, a_2, a_3, a_4.

Les surfaces du troisième ordre engendrées par les cubiques de Γ qui correspondent aux rayons des faisceaux (O, α), (O_1, α), ... passent toutes par les droites a_1, a_2, a_3, a_4, l_1, l_2 et par le point A. Les quatre droites a_1, a_2, a_3, a_4 et le point A comptant pour dix-sept conditions linéaires, les surfaces forment, comme on le sait, un réseau R. A chaque point O du plan α correspond une surface de R. Deux surfaces quelconques de R ont encore en commun une cubique de Γ, celle qui correspond à la droite OO_1.

On voit que *les cubiques de la congruence* Γ *sont les intersections partielles des surfaces cubiques du réseau* R.

Par un point arbitraire P passent ∞^1 surfaces de R; ces surfaces forment un faisceau et ont toutes en commun une courbe de Γ; donc par un point passe une seule courbe de la congruence.

Les surfaces de R marquent sur une droite g quelconque une involution I_2^3.

On sait qu'une telle involution possède un couple neutre, c'est-à-dire que sur la droite g existent deux points P', P'' par lesquels passent ∞^1 surfaces de R; ces surfaces ont en commun une cubique de Γ passant par P' et P''.

(*) *Sur un procédé de génération de la surface cubique.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1891, 3e sér., t. XXII, pp. 35-55.)

Donc *la congruence* Γ *est du premier ordre et de la première classe.*

L'ordre et la classe de Γ avaient déjà été déterminés au moyen d'autres méthodes par MM. Cremona (*), Sturm (**), Schröter (***), Stuyvaert (IV), etc.

On peut encore démontrer que Γ est du premier ordre de la manière suivante :

Par un point P menons la droite s'appuyant sur a_1, a_2 et la droite s'appuyant sur a_3, a_4. Ces droites déterminent un plan π. A la droite (α, π) correspond évidemment une cubique gauche de Γ passant par P et cette courbe est unique.

3. — La droite d peut occuper différentes positions particulières; nous allons étudier l'influence de ces positions sur les cubiques correspondantes de Γ; nous trouverons ainsi les cubiques dégénérées de Γ.

Supposons que d rencontre l'une des droites a_1, a_2, a_3, a_4, c'est-à-dire passe par l'un des points A_1, A_2, A_3, A_4.

Si d passe par A_1, la quadrique $(a_1 a_2 d)$ dégénère en deux plans $a_1 d$ et $a_2 A$ (v).

(*) *Notes sur les cubiques gauches.* (JOURNAL DE CRELLE, 1862, t. LX, pp. 188-192.)

(**) *Elementarsysteme und Charakteristiken von cubischen Raumcurven.* (JOURNAL DE CRELLE, t. LXXIX, p. 99.)

(***) *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung,* p. 257.

(IV) *Étude de quelques surfaces algébriques.* Gand, Hoste, 1907. — *Congruences de triangles, de cubiques gauches et autres variétés annulant des matrices.* (JOURNAL DE CRELLE, 1907, t. CXXXII, pp. 216-237). — *Cinq études de géométrie analytique (Prix Fr. Deruyts)* (MÉMOIRES DE LIÉGE, 1907, 3e sér., t. VII).

(v) Les droites s'appuyant à la fois sur a_1, a_2, d sont maintenant : 1° les droites tracées dans le plan $a_1 d$ par le point où ce plan rencontre la droite a_2; 2° les droites menées par A_1 et s'appuyant sur a_2.

La quadrique (a_3a_4d) a en commun avec le plan a_1d, outre la droite d, une droite h de la quadrique $(a_1a_3a_4)$; la même quadrique (a_3a_4d) rencontre le plan a_2 A suivant une conique γ qui passe par A et A_1, s'appuie sur a_3, a_4 en des points Q_{32}, Q_{42}, et sur h.

Ainsi, *aux rayons du faisceau* (A_1, α) *correspondent des cubiques de* Γ *dégénérées en une droite* h *et une conique* γ; *les droites* h *sont les génératrices de l'hyperboloïde* $(a_1a_3a_4)$ *et les coniques* γ *engendrent un faisceau-plan dont deux points fondamentaux sont* A, A_1 *et dont les deux autres sont* Q_{32} *et* Q_{42}.

Les faisceaux (A_2, α), (A_3, α), (A_4, α) donnent lieu à des remarques analogues.

4. — Soient L_1, L_2 les points de rencontre des droites l_1, l_2 avec le plan α.

Prenons pour droite d un rayon quelconque du faisceau (L_1, α). Les quadriques (a_1a_2d), (a_3a_4d), qui ont deux droites communes, d et l_1, se coupent encore suivant une conique λ. Lorsque la droite d décrit le faisceau (L_1, α), la conique λ décrit une surface cubique passant par A, a_1, a_2, a_3, a_4, l_1, l_2 (théorème de Fr. Deruyts). Dans le cas actuel, la droite l_1 est double. Soit, en effet, x une droite s'appuyant sur l_1. Par un point X_1 de x passe une quadrique passant également par a_1, a_2, l_1 et A. Cette quadrique a en commun avec le plan α, outre b_1, une droite d qui passe par L_1. La quadrique (da_3a_4) marque sur x deux points dont l'un est sur l_1 et l'autre est X_2. Entre les points X_1 et X_2 existe une correspondance (1, 1); il y a deux coïncidences, mais l'une de celles-ci est dans le plan α, donc la surface cubique lieu des coniques λ ne rencontre plus la droite x qu'en un point, par conséquent l_1 est une droite double.

Ainsi, *aux rayons du faisceau* (L_1, α) *correspondent des cubiques de* Γ *dégénérées en une droite fixe* l_1 *et une conique* λ *qui appartient à une surface cubique passant par* a_1, a_2, a_3, a_4, l_2 *et ayant une droite double* l_1.

Le faisceau (L_2, α) donne un résultat analogue.

5. — Il est facile de voir qu'il n'y a pas d'autres cubiques de Γ dégénérées que celles énumérées dans les n°s 3 et 4. On peut donc énoncer ce théorème :

Une droite quelconque de l'espace rencontre dix-huit cubiques de Γ *dégénérées en une droite et une conique, huit sur la droite, dix sur la conique.*

Remarquons qu'à une droite d passant par deux des points $A_1, A_2, A_3, A_4, L_1, L_2$ correspond une cubique de Γ dégénérées en trois droites, donc :

Il y a quinze cubiques de Γ *dégénérées en trois droites.*

Nous avons vu plus haut que les cubiques de Γ correspondant aux droites du faisceau (A, α) sont tangentes à α en A ; le théorème de Deruyts nous permet de conclure que *le lieu des cubiques de* Γ *tangentes à* α *en* A *est une surface du troisième ordre.*

6. — Avant d'aller plus loin, nous donnerons une généralisation du théorème de Fr. Deruyts qui nous sera utile dans la suite.

Considérons dans le plan α une courbe k_n de classe n. Les cubiques gauches qui correspondent aux tangentes de cette courbe engendrent une surface S dont nous allons rechercher l'ordre.

Soit y une droite quelconque. Les quadriques (a_1a_2y), (a_3a_4y) ont en commun, outre y, une développable de troisième classe. Il y a $3n$ plans osculateurs

à cette développable qui contiennent des tangentes à la courbe k_n, donc la surface S est d'ordre $3n$.

Par un point de la quadrique $(a_1a_3a_4)$ situé dans α, on peut mener n tangentes à k_n, donc a_1 est multiple d'ordre n sur la surface S. Il en est de même de a_2, a_3 et a_4.

Par le point L_1, on peut mener n tangentes à k_n, donc l_1 est multiple d'ordre n sur la surface S et cette surface possède n coniques λ. De même pour l_2.

Par un des points A_1, A_2, A_3, A_4, on peut mener n tangentes à k_n; on trouve ainsi $4n$ droites et $4n$ coniques de S.

Il n'est pas difficile de voir que si u est une droite passant par A et non située dans α, le lieu des droites d, telles que les cubiques gauches de Γ qui leur correspondent rencontrent u, est une conique k_2. On en conclut que le point A est multiple d'ordre n sur la surface S.

En résumé : *Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés s'appuient sur deux couples de droites fixes, tandis que le troisième côté enveloppe une courbe de classe* n, *le troisième sommet décrira une surface d'ordre* 3n.

Cette surface possède un point et six droites multiples d'ordre n, 4n *droites simples et* 6n *coniques.*

Il est évident qu'à une tangente multiple d'ordre m de k_n il correspond sur S une cubique gauche multiple d'ordre m.

7. — Soit P un point quelconque de la droite a_1. Par ce point, menons la droite qui s'appuie sur a_3, a_4 et désignons par P_1 le point de rencontre de cette droite

avec α. Il est évident qu'à une droite du faisceau (P_1, α) correspond une cubique de Γ passant par P. Ces cubiques décrivent une surface cubique qui possède un point double en P, car autrement il y aurait des cubiques ayant trois points communs avec une droite quelconque issue de P. De là :

Les droites a_1, a_2, a_3, a_4 *sont des cordes fondamentales d'ordre trois.*

8. — Soit y une droite quelconque de l'espace. Par les points de y menons les droites qui s'appuient sur les couples a_1, a_2 et a_3, a_4. Les plans déterminés par ces droites marquent sur le plan α des droites qui enveloppent une courbe k_3 de troisième classe. En effet, les cubiques de Γ qui correspondent aux droites d'un faisceau (O, α) engendrent une surface cubique qui rencontre y en trois points. Par chacun de ces points passe une seule cubique gauche, donc par O on peut mener trois tangentes à k_3. La courbe k_3 possède une tangente double correspondant à la cubique de Γ bisécante de la droite y.

Le théorème précédent donne, en tenant compte du numéro 5 :

Les cubiques de Γ *qui s'appuient sur une droite engendrent une surface du neuvième ordre qui possède un point* A *et six droites* a_1, a_2, a_3, a_4, l_1, l_2 *multiples d'ordre trois, une cubique gauche double, treize droites et dix-huit coniques simples.*

9. — Les cubiques de Γ marquent sur un plan quelconque π une involution du troisième ordre et de la première classe. Lorsque l'on se donne une droite y dans ce plan, les points conjugués des points de cette droite décrivent une courbe du huitième ordre. Les points

d'intersection de cette courbe avec la droite sont situés ou bien sur la cubique de Γ dont y est une bisécante, ou bien sur des cubiques tangentes au plan π; donc :

Le lieu des points de contact des cubiques de Γ tangentes à un plan est une courbe du sixième ordre.

10. — Nous avons vu tantôt que les droites d du plan α auxquelles correspondent des courbes de Γ s'appuyant sur une droite u issue du point A, enveloppent une courbe de seconde classe. De là :

Le lieu des cubiques de Γ qui s'appuient en un second point sur une droite passant par A est une surface du sixième ordre possédant un point A et six droites a_1, a_2, a_3, a_4, l_1, l_2 doubles, huit droites et douze coniques simples.

Soit π un plan passant par la droite u. L'intersection de ce plan avec la surface rencontrée ci-dessus se compose de u et d'une quintique plane passant par A; donc :

Le lieu des points de contact des cubiques de Γ qui touchent un plan passant par A est une quintique plane passant par A.

Les cubiques de Γ qui correspondent à des droites de α passant par A, sont tangentes au plan α en A; elles engendrent une surface cubique tangente à α en A, donc le plan α a en commun avec cette surface une cubique plane ayant un point double en A. Par A on peut mener deux tangentes à cette cubique plane; donc :

Il y a deux cubiques de Γ qui osculent α en A.

11. — La congruence étudiée ici contient comme cas particulier la gerbe de Reye. Il suffit de considérer les droites a_1 et a_2, a_3 et a_4 comme les côtés opposés

d'un quadrilatère gauche. Les cubiques devant avoir ces quatre droites comme bisécantes, passent par les sommets du quadrilatère.

12. — Il nous reste à répondre à une objection que l'on pourrait faire à notre raisonnement : Les droites a_1, a_2, a_3, a_4 peuvent être partagées de trois façons en deux couples, à savoir :

$$\begin{array}{ll} a_1, a_2 & a_3, a_4. \\ a_1, a_3 & a_2, a_4. \\ a_1, a_4 & a_2, a_3. \end{array}$$

Mais la symétrie des résultats obtenus dans le cours du travail montre que cette objection n'est pas fondée.

En terminant, nous tenons à remercier M. Neuberg des conseils dont il nous a honoré pour la rédaction de ce travail.

Liége, le 5 mars 1908.

Sur une nouvelle méthode de préparation de quelques éthers simples (deuxième communication); par Th. van Hove, ingénieur-chimiste, préparateur à l'Université de Gand.

Poursuivant mes recherches sur la préparation des éthers simples, consistant à faire agir le chlorhydrate de quinoline sur l'alcool à éthérifier, j'ai essayé, par ce procédé, d'obtenir un éther simple d'alcool secondaire ainsi qu'un éther d'alcool tertiaire.

Comme le faisait en effet remarquer le savant professeur Henry dans son rapport sur une première commu-

nication traitant cette question (*), il était intéressant de vérifier si la réaction étudiée, facile pour les alcools primaires, était possible avec les alcools secondaires et tertiaires, et si, le cas échéant, les rendements en éthers étaient convenables.

J'ai donc fait agir du chlorhydrate de quinoline sur l'alcool isopropylique et sur le triméthyl-carbinol. Dans le premier cas seulement, la réaction a donné naissance à de l'éther isopropylique.

Éther isopropylique

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - O - CH < \begin{matrix} CH_3. \\ CH_3 \end{matrix}$$

L'alcool isopropylique devant me servir à la préparation de l'éther a d'abord été très soigneusement rectifié sur de la chaux vive, afin d'obtenir un alcool aussi absolu que possible. Le produit employé a passé à la distillation à une température constante de 82°2; sa densité, déterminée à 15°, était de 0.7918.

Un premier essai qualitatif avec 25 grammes d'alcool et 5 grammes de chlorhydrate de quinoline ne m'a fourni qu'environ 7 grammes d'un liquide insoluble dans l'eau et distillant de 65° à 68°.

Lors de l'ouverture du tube dans lequel j'avais chauffé le mélange pendant trois jours à 180°, j'avais d'ailleurs constaté la présence en quantité notable d'un gaz combustible, absorbable par du brome, donc probablement du propylène.

Ce fait expliquait le faible rendement en éther.

(*) Voir *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), nos 9-10, 1906, pp. 650-668.

Le liquide distillant de 65° à 68°, après plusieurs lavages à l'eau pour lui enlever éventuellement l'alcool isopropylique non transformé, a été redistillé après dessiccation et passa entièrement à 68°.

Pour identifier ce produit, j'en ai déterminé le poids moléculaire par la densité de vapeur d'après le procédé de Hoffmann :

Poids de substance.	Température.	Pression en millimètres de Hg (réduite à 0°).	Volume observé.	Densité déduite.	Poids moléculaire.
0gr1197	100°	268mm3	103cc6	3.454	99.4

Poids moléculaire théorique : 102.

Le produit obtenu était donc bien l'éther isopropylique.

Comme, dans cet essai, le rendement en éther paraissait si faible, j'ai fait un autre essai en chauffant seulement à 160°, espérant qu'à cette température la formation de propylène serait moins importante.

Sur 100 grammes d'alcool mis en œuvre, j'obtins cette fois 47 grammes de produit insoluble dans l'eau. La quantité d'éther formé était donc plus importante, sans que toutefois le rendement de la transformation fût comparable à celui que j'avais obtenu dans la préparation des éthers propylique normal et isoamylique, dérivant d'alcools primaires.

Afin de pouvoir établir le rendement de la réaction avec une certaine exactitude, j'ai mis en œuvre 250 grammes d'alcool isopropylique répartis dans quatre tubes que j'ai chauffés pendant huit jours à 160°.

La quantité de chlorhydrate de quinoline employée représentait $^2/_{10}$ mol., soit environ 35 grammes.

Après huit jours de chauffe, la séparation d'eau dans les tubes était assez considérable et ne paraissait plus continuer.

A l'ouverture d'un des tubes refroidi au préalable à — 25° dans un mélange réfrigérant, la pression dans le tube était encore si considérable qu'il m'eût été impossible de recueillir, sans en perdre, le gaz enfermé. Aussi ai-je dû refroidir jusque — 75° dans un mélange d'anhydride carbonique solide et d'éther, pour ne plus constater de pression à l'ouverture des tubes.

Un des tubes ainsi refroidi a été relié à un tube de Péligot contenant du brome, et ramené lentement à la température ordinaire, puis prudemment chauffé jusque vers 50°. A cette température, tout dégagement gazeux avait cessé. L'augmentation de poids du tube en U a été de 9gr5. La quantité de propylène formé fut par conséquent égale à 38 grammes pour la totalité du produit renfermé dans les quatre tubes.

Le dérivé bromé obtenu, lavé et séché, distille à 140° à 141° température d'ébullition du bromure de propylène : CH_3 - CHBr - CH_2 Br.

Les autres tubes ont été également refroidis à — 75° avant de les ouvrir, pour permettre un dégagement lent du gaz dissous.

Le contenu des quatre tubes a été ensuite distillé au bain-marie; j'ai recueilli, de 50° à 85°, 176 grammes de produit. Dans le ballon distillatoire restait un important

résidu, fortement coloré en rouge, de chlorhydrates de bases quinoliques.

Deux lavages avec 100 centimètres cubes d'eau du liquide recueilli en ont fait tomber le poids à 99 grammes, ce qui fait, en comptant comme alcool isopropylique non transformé la portion dissoute, 77 grammes à défalquer de la quantité d'alcool mise en œuvre.

Le produit lavé à l'eau a été ensuite desséché pendant plusieurs jours sur du chlorure de calcium fondu qui a pu enlever, outre l'eau, les dernières traces d'alcool isopropylique que l'éther pouvait encore renfermer, puis soumis à la distillation au moyen d'un déphlegmateur de Lebel à six boules.

La distillation a commencé aux environs de 50°, le thermomètre s'élevant assez rapidement au début jusque vers 60°, puis lentement jusque 65°.

J'ai recueilli entre ces limites de température 48 grammes de produit. En continuant la distillation, j'ai pu constater que le restant du liquide a passé de 65° à 68°, sans toutefois présenter un point d'ébullition bien net; le poids de cette dernière portion était de 38 grammes; il restait dans le ballon un résidu d'environ 4 grammes.

La portion distillant de 50° à 65°, et que je supposais pouvoir contenir encore en dissolution du propylène, a été agitée avec de l'eau de brome afin de transformer ce dernier en dibrompropane, puis séchée et redistillée.

En opérant de la sorte, j'ai pu encore retirer 18 grammes de produit bouillant de 65° à 68°.

J'ai donc pu isoler en tout 56 grammes d'un liquide paraissant avoir une composition définie.

Plusieurs rectifications sur du sodium ont encore réduit notablement cette quantité, et finalement j'ai

obtenu 36 grammes d'éther isopropylique tout à fait pur, distillant de 68° à 68°2.

En effet, l'analyse par combustion de ce produit m'a fourni les résultats suivants :

0gr4816 de substance donnent :

CO_2 = 1gr2382, soit C = 0gr3377 ou 70 12 °/o
H_2O = 0gr598, soit H = 0gr0663 ou 13.77 °/o

Calculé pour $C_6H_{14}O$:

C = 70.58 °/o, H = 13.72 °/o.

La densité à 16°2 a été trouvée égale à 0.7349. Zander (*) avait trouvé précédemment : à 20°8 *d* = 0.7247.

Quant au liquide distillant de 50° à 65°, il me paraît probable que c'est un mélange d'éther isopropylique et de chlorure d'isopropyle. En effet, un dosage de chlore dans ce produit m'a fourni 20.84 °/o Cl (calculé pour C_3H_7Cl : Cl = 45.2 °/o).

Rendement. — Le rendement en éther relativement pur (p. éb. 65°-68°) est de 26 °/o environ; celui en produit analytiquement défini n'atteint que 16.9 °/o.

En tenant compte de ce que la réaction est incomplète et qu'il a été retrouvé 77 grammes d'alcool isopropylique inaltéré, ces rendements s'élèvent respectivement à 36 °/o et 24.5 °/o.

Il paraît donc certain que pour un alcool secondaire, la tendance à la formation de l'éthylène est beaucoup plus prononcée que pour les alcools primaires, où le rendement en éthers simples atteint 55 °/o dans les cas des alcools propylique normal et isoamylique.

(*) Zander, *Ueber die specifischen Volumina einiger Propylverbindungen*. (Ann. der Chemie, 214, p. 164.)

L'éther isopropylique avait précédemment été obtenu par Erlenmeyer (*) en faisant agir l'oxyde d'argent humide sur l'iodure d'isopropyle. Le rendement de l'opération n'est pas indiqué. Il se forme d'ailleurs, à côté d'éther isopropylique, de l'alcool isopropylique et du propylène.

Réactions secondaires. — Le chlorhydrate de quinoline mis en œuvre subit, de la part de l'alcool isopropylique ou plus exactement du chlorure d'isopropyle qui se forme en petite quantité à côté de l'éther, des substitutions analogues à celles que j'avais observées précédemment dans la préparation des éthers propylique et isoamylique. Il se forme de même des quinolines plus ou moins alkylées.

C'est ainsi qu'en traitant par la soude caustique le résidu fortement coloré en rouge résultant de la distillation de l'éther, j'ai mis en liberté des bases qui, distillées, m'ont fourni deux portions principales : l'une distillant de 280° à 300°, l'autre de 300° à 320°.

Pour purifier ces quinolines, j'ai, comme je l'avais fait pour les quinolines propylées et amylées, transformé les bases libres en picrates qui présentent l'avantage d'être peu solubles dans l'alcool froid et de se prêter ainsi à une purification aisée.

J'ai pu isoler de la sorte deux picrates définis, l'un fondant à 226°-228° en se décomposant légèrement, l'autre fusible à 160°-161°.

Le premier, provenant de la base ayant distillé de 300° à 320°, analysé par combustion, a été reconnu comme étant le picrate de diisopropylquinoline.

(*) Erlenmeyer, *Ueber Propylverbindungen.* (Ann. der Chemie, 126, p. 306.)

En effet :

0gr2625 de substance ont donné :

CO_2 = 0gr5529, soit C = 0gr1508 ou 57.44 °/o
H_2O = 0gr117, soit H = 0gr013 ou 4.95 °/o

Calculé pour $C_{12}H_{10}N.C_6H_3O(NO_2)_3$:

C = 57.01 °/o H = 4.95 °/o.

Le second picrate, provenant de la base distillant de 280° à 300°, a donné à l'analyse les résultats suivants :

0gr2510 de substance ont fourni :

CO_2 = 0gr499, soit C = 0gr136 ou 54.18 °/o
H_2O = 0gr097, soit H = 0gr01077 ou 4.29 °/o

Calculé pour $C_{12}H_{13}N.C_6H_3O(NO_2)_3$:

C = 54 °/o H = 4 °/o.

Ce picrate est donc le picrate d'isopropylquinoline.

Un fait intéressant à signaler, c'est que ces bases, transformées au préalable en chlorhydrates et oxydées ensuite en milieu acétique par du bioxyde de plomb délayé dans de l'eau, se transforment instantanément en une substance colorée très fortement en rouge et soluble dans ce milieu. Ces quinolines substituées seraient donc les leucobases de matières colorantes d'un type spécial, le groupement isopropyle formant avec le groupement C_9H_6N un noyau analogue au tryphénylméthane dans lequel deux groupements phényle seraient remplacés par du méthyle, le troisième par le quinolyle, l'angle pyridique jouant le rôle de l'amidogène dans les dérivés amidés du triphénylméthane.

La substance colorante paraît malheureusement peu

stable, les groupements CH_3, éminemment oxydables, subissant l'action d'un excès d'oxydant.

Dans le but de remplacer les méthyles par du phényle, radical plus solide, j'ai essayé de condenser la quinoline avec du diphénylcarbinol. Ce travail, encore inachevé, fera l'objet d'une prochaine communication.

La littérature chimique signale l'existence de trois isopropylquinolines connues :

La Bz-2-isopropylquinoline (*), picrate fusible à 205°-206°.

La Py-2-isopropylquinoline (**), point d'ébullition 255°, picrate fusible à 150°.

La Py-3-isopropylquinoline (***), point d'ébullition 275°-280°.

L'isopropylquinoline que j'ai isolée, vu le point de fusion de son picrate, ne paraît pas identique à un de ces trois isomères.

Essai de préparation de l'éther simple du triméthylcarbinol

$$(CH_3)_3 \equiv C - O - C \equiv (CH_3)_3.$$

Pour m'assurer si par l'action du chlorhydrate de quinoline sur l'alcool butylique tertiaire il ne se ferait pas d'éther simple correspondant, j'ai chauffé pendant trois jours à 160°, 25 grammes de triméthylcarbinol avec 5 grammes de $C_9H_7N.HCl$. Après ce temps de chauffe, j'ai pu constater une séparation d'eau importante.

(*) Widman, *Berichte der Chem. Gesellschaft*, Bd 19, p. 267.

(**) Döbner, *Ann. der Chemie*. Bd 242, p. 279. — Müller, *Berichte der Chem. Gesellschaft*, Bd 20, p. 1909.

(***) Spady, *Ibidem*, Bd 18, p. 3383.

A l'ouverture du tube refroidi au préalable dans de la glace, je n'ai constaté aucune pression sérieuse, et le contenu du tube, après décantation de l'eau formée, a été soumis à la distillation.

Celle-ci commence dès la température ordinaire; elle a été conduite de façon à liquéfier éventuellement le butylène. Le liquide recueilli jusqu'aux environs de 60° a été introduit dans un tube scellé à la lampe. En continuant la distillation, j'ai recueilli une seconde portion de 60° à 100°. A ce moment de la distillation, il ne restait dans le ballon qu'un résidu sirupeux refusant de distiller au bain d'huile chauffé jusque 150°.

La portion du distillat ayant passé de 60° à 100°, et qui devait contenir éventuellement l'éther simple, a été soumise, après dessiccation sur du chlorure de calcium, à une série de rectifications; j'en ai pu isoler finalement un produit défini passant à la distillation de 102° à 102°5.

Ce liquide, à odeur d'hydrocarbure, se combinait facilement au brome. Ce n'était donc probablement pas l'éther du triméthylcarbinol. Pour m'en assurer, j'en ai déterminé le poids moléculaire par densité de vapeur d'après le procédé d'Hoffmann :

Poids de substance.	Température.	Pression en millimètres de Hg (réduite à 0°).	Volume observé.	Densité déduite.	Poids moléculaire.
0gr0664	100°	168mm5	81cc4	3.871	114.7

Ce poids moléculaire correspond à celui du diisobutylène $(CH_3)_2 = C = CH - C \equiv (CH_3)_3$ dont la molécule pèse 112 et dont le point d'ébullition 102°5 se confond d'ailleurs avec celui du produit que j'ai isolé.

Quant à la portion du produit ayant été recueillie au-dessous de 60° et que j'avais enfermée en tube scellé, je l'ai énergiquement refroidie, puis, après ouverture du tube, maintenue à zéro dans de l'eau glacée. Il s'est dégagé un gaz qui a été dirigé dans du brome; quand le dégagement gazeux a pris fin, il ne restait environ qu'un centimètre cube de liquide.

Le produit bromé a été soumis à la distillation et j'ai ainsi obtenu un liquide bouillant à 155°-160°, point d'ébullition approximatif du bromure d'isobutylène :

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CBr - CH_2Br.$$

Le gaz était donc constitué par du butylène

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C = CH_2 \quad (\text{p. éb.} - 6^\circ).$$

Résumé. — Le chlorhydrate de quinoline agit d'une façon identique sur l'alcool isopropylique et sur les alcools propylique primaire et isoamylique. Il se fait l'éther simple correspondant tandis que la quinoline passe à l'état de quinolines plus ou moins substituées; seulement la formation d'éthylènes, insignifiante lorsqu'il s'agit d'alcools primaires, acquiert dans la préparation de l'éther isopropylique une importance considérable, au point que le rendement en éther simple se trouve réduit à peu près de moitié.

Quant à l'application de la méthode à la préparation de l'éther de l'alcool butylique tertiaire, elle ne conduit à aucun résultat, les principaux produits de la transformation étant l'isobutylène et le diisobutylène.

Laboratoire de chimie générale de l'Université de Gand. (1er mars 1908.)

COMITÉ SECRET.

La Classe se forme en comité secret pour prendre connaissance de la liste des candidats présentés pour les places vacantes par la Section des sciences mathématiques.

OUVRAGES PRÉSENTÉS.

Stuyvaert (*Modeste*). Deuxième congruence linéaire de cubiques gauches. Palerme, 1908; extr. in-8° (36 p.).

Pâque (*E.*). Nouvelles recherches pour servir à la flore cryptogamique de la Belgique. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (15 p.).

— Une chlorophylle animale. Bruxelles, 1907; extr. in-8° (7 p.).

Félix (*Jules*). La science positive, les épidémies et les maladies contagieuses au XX° siècle. Leçon d'ouverture du cours, le 14 novembre 1907. Gand, 1908; in-8° (32 p.).

GEMBLOUX. *Institut chimique et bactériologique.* Bulletin, 1908, n° 75.

Böhm (*Josef-Georg*). Die Kunst-Uhren auf der K. K. Sternwarte zu Prag. Auf öffentliche Kosten herausgegeben von Dr. Ladislaus Weinek. Prague, 1908; in-4° (XI-48 p. et 19 pl.).

Frentzen (*August*). Die wahre Ursache der Ebbe und Flut. Nicht Mond-Anziehung sondern Sonnenwärme. Leipzig, in-8° (34 p.).

BERLIN. *Königl. preussische geologische Landesanstalt und Bergakademie.* Jahrbuch, 1904.

WASHINGTON. *Surgeon-general's Office.* Index-Catalogue of the library, vol. XII, 1907; in-4°.

SAINT-LOUIS. *Botanical Garden.* 18th annual report, 1907.

MADISON. *Geological... Survey.* The geology of North central Wisconsin. Bulletin, n° XVI, 1907.

FRANCE.

Salignac Fénelon (le vicomte François de). Questions de physique générale et d'astronomie. Toulouse, 1908; in-4° (62 p.).

— La Création. Les migrations aux temps géologiques. Les premières dates de l'histoire et les premières races humaines suivant la Bible. Toulouse, 1908; in-4° (49 p.).

BORDEAUX. *Académie des sciences.* Actes, 67e année, 1905.

— *Société linnéenne.* Actes, vol. XI, 1906.

— *Observatoire.* Catalogue photographique du Ciel : Coordonnées rectilignes, tome II, 1er et 2e fasc., 1907; in 4°.

CHERBOURG. *Société des sciences naturelles.* Mémoires, tome XXXV, 1905-1906.

DUNKERQUE. *Société des sciences.* Mémoires, 1906.

LYON. *Société d'agriculture, sciences et arts.* Annales, 1906.

MARSEILLE. *Musée d'histoire naturelle.* Annales, tome XI, 1907; in-4°.

PARIS. *Bulletin scientifique de la France et de l'étranger,* publié par A. Giard, tome XL, 1907.

INSTITUT DE FRANCE. *Observatoire d'Abbadia.* Observations, tome V, 1907; in-4°.

ROUEN. *Académie des sciences.* Précis analytique des travaux pendant l'année 1905-1906.

SÈVRES. *Bureau des poids et mesures.* Travaux et mémoires, tome XIII, 1907; in-4°.

—

Report of the British Association for the advancement of Science. Report of the 77th meeting. Leicester, 1906.

OTTAWA. *Department of Marine and Fisheries.* Report on the Meteorological Service of Canada, 1905; in-4°.

Teixeira (*Dr. F. Gomes*). Obras sobre mathematica, volume quarto : Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches, tome Ier. Coïmbre, 1908; in-4° (XI-401 p.).

UPSAL. *Universitet.* Arsskrift, 1906-1907.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — N° 5.

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 5 mai 1908.

M. Julien Fraipont, directeur.

M. le chevalier Edm. Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. J. Deruyts, *vice-directeur;* Éd. Van Beneden, C. Malaise, F. Plateau, Ch. Van Bambeke, Alf. Gilkinet, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, M. Mourlon, P. Mansion, P. De Heen, C. le Paige, Ch. Lagrange, Léon Fredericq, J.-B. Masius, J. Neuberg, A. Jorissen, Ch. Francotte, Paul Pelseneer, A. Gravis, Aug. Lameere, G. Cesàro, *membres;* A. Demoulin, *correspondant.*

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts met à la disposition de la Classe vingt exemplaires du rapport du jury qui a été chargé de décerner le prix décennal des sciences minéralogiques pour la période de 1897-1906.

Par dépêche du 4 avril, M. le Ministre des Sciences et des Arts demande l'avis de l'Académie sur les documents préliminaires à la Conférence de Berlin (octobre 1908), en vue d'apporter certaines modifications à la Conférence de Berne ayant pour objet de créer une Union internationale pour la protection des œuvres littéraires et artistiques. — Cette question sera examinée par M. Mourlon, conjointement avec les délégués désignés par les Classes des lettres et des sciences morales et politiques et des beaux-arts.

— M. le Dr Henri Van Heurck, directeur du Jardin botanique d'Anvers, envoie, avec une lettre datée du 15 janvier 1908 pour prendre date, treize planches de son travail sur les diatomées recueillies par l'Expédition antarctique belge de la *Belgica*. — Dépôt dans les archives sous pli cacheté et daté.

— MM. Durand et De Wildeman, respectivement président et secrétaire général, envoient le règlement général du troisième Congrès international de botanique qui se tiendra, en 1910, à Bruxelles.

— L'Université de Londres (University College) propose l'échange des rapports annuels de la *British Association* avec le *Bulletin*. — Accepté.

— La Classe accepte le dépôt dans les archives d'un billet cacheté, portant le timbre postal de Louvain, du 10 avril, et adressé par M. F.-A. Janssens, professeur à l'Université catholique.

— M. Ch. Nordmann, docteur ès sciences, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, envoie la liste de ses travaux qu'il présentera au prochain concours pour le Prix Charles Lagrange.

— Hommages d'ouvrages :

1° *Annuaire météorologique pour 1908*, publié par les soins de A. Lancaster (présenté par M. le Secrétaire perpétuel, avec une note qui figure ci-après);

2° *Cours de géométrie analytique;* par J. Neuberg;

3° *Come si son formate le montagne?* par l'ingénieur Masciari-Genoese;

4° Quatre extraits du *Bulletin de la Société belge de géologie;* par M. Mourlon;

5° *Recherche rapide des facteurs premiers des nombres à l'aide de deux tables de restes;* par Ernest Lebon;

6° *Revue psychologique* (premier fascicule), dirigée par Mlle Ioteyko (présenté par M. Vaulair, avec une note qui figure ci-après).

— Remerciements.

— Travaux manuscrits renvoyés à l'examen :

1° *La structure de l'œuf des mammifères* (*chauves-souris*). *V. Noctula :* 3e partie. — *L'oocyte à la fin du stade d'accroissement, au stade de la maturation, au stade de la fécondation et au début de la segmentation;* par le professeur O. Van der Stricht, de Gand. (135 pages in-folio et 10 planches). — Commissaires : MM. Van Bambeke, Francotte et Lameere.

2° a) *Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé;* b) *Nouvelles recherches sur les relations de quatre points*; par Th. De Donder. — Commissaires : MM. de la Vallée Poussin, Demoulin et Deruyts.

3° *Action de corps solubles sur des corps insolubles;* par W. Oechsner de Coninck et L. Arzalier. — Commissaire : M. Spring.

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES.

Observatoire royal de Belgique. *Annuaire météorologique pour 1908*, publié par les soins de A. Lancaster, directeur du Service météorologique de Belgique, membre de l'Académie : tel est le volume in-12 que je me permets de présenter à la Classe, en pieux souvenir de notre bien-aimé confrère précité et avec qui j'ai eu pendant plus de quarante années les plus cordiales relations.

Dans l'Avant-propos, le météorologiste J. Vincent, faisant fonctions de directeur du Service précité, s'exprime en ces termes au sujet de la publication de ce volume :

« Lorsque survint, le 4 février 1908, la mort de M. Lancaster, le présent *Annuaire* était presque entièrement composé. On n'y a rien modifié. On y a seulement ajouté les courtes notices qui le terminent.

» Afin de ne pas grossir démesurément le volume et surtout de ne pas en retarder davantage l'apparition, on a réservé pour l'*Annuaire* de 1909 le résumé des observations météorologiques faites à Uccle, qui n'était pas en impression lors de la mort de M. Lancaster; on y ajoute le résumé pour 1908.

» Quelques tableaux, notamment ceux du lever et du

coucher du Soleil et de la Lune, ont été empruntés à l'*Annuaire astronomique de l'Observatoire royal.* — Uccle le 19 mars 1908. Signé : J. Vincent. »

Étant connue la notoriété de M. J. Vincent en la science météorologique, et considérant l'estime sincère que je professe pour ce savant qui a été désigné par le Gouvernement pour remplacer provisoirement mon vieil ami, je serais heureux de voir la Classe m'autoriser à publier cette petite note dans son *Bulletin*. C'est le dernier hommage qu'il me soit accordé de pouvoir rendre à la mémoire d'un confrère et ami dont j'ai profondément pleuré la mort prématurée.

Le Chevalier Edm. Marchal.

—

Mlle Ioteyko, *Revue psychologique*, premier fascicule.

J'ai l'honneur d'offrir à la Classe, au nom de Mlle le docteur Ioteyko, chef des travaux au laboratoire de psycho-physiologie de l'Université de Bruxelles, le premier fascicule d'une publication nouvelle dont elle a la direction : la *Revue psychologique*.

Cette publication vient augmenter le nombre des recueils scientifiques édités déjà dans notre pays. Ne servît-elle qu'à mettre une fois de plus en lumière le zèle avec lequel se poursuivent les recherches biologiques dans les laboratoires de nos universités qu'elle devrait être accueillie avec faveur. Elle a, en outre, l'ambition de contribuer au développement d'une science relativement récente, surfaite par les uns, un peu trop décriée par les autres : la *psychologie expérimentale*.

Envisagée comme une branche spéciale de la physiologie normale et pathologique du système nerveux, empruntant à celle-ci ses méthodes d'investigation, la psychologie moderne mérite d'occuper en biologie une place très honorable. Mais ses données actuelles paraîtront à plusieurs un peu élémentaires et insuffisamment assises pour recevoir des applications immédiates : celles, par exemple, qui ressortissent à la pédologie, à la pédagogie expérimentale, à l'hygiène de l'éducation, à la physiologie du travail.

Les processus mentaux les plus simples d'apparence sont à ce point compliqués qu'il serait, je pense, prématuré de vouloir les traduire dès à présent avec une rigoureuse fidélité par des formules et par des courbes. L'anthropométrie mentale pourra fournir des indications relatives à certaines aptitudes individuelles, mais à celles seulement dont les manifestations se prêtent plus ou moins à des mesures de durée et d'intensité.

Son utilisation pratique restera donc sans doute assez restreinte, au moins pendant assez longtemps encore. Ce n'est pas une raison cependant pour renoncer à ce genre d'études : au contraire. Si, durant des siècles, l'art de guérir s'est passé — ou peu s'en faut — de la physiologie, il n'en est pas moins vrai que les progrès lentement accomplis par elle ont puissamment contribué et concourront plus efficacement encore dans l'avenir au perfectionnement de la médecine. De même, on peut nourrir l'espoir de voir par la suite la psychologie expérimentale aider à la solution de certains problèmes sociologiques.

Pour prendre l'initiative d'une telle publication, Mlle Ioteyko se trouvait toute désignée. La Classe, on s'en souvient, a déjà eu l'occasion d'apprécier favorablement

ses travaux ; et sa laborieuse et féconde activité nous est garante qu'avec l'aide de ses collaborateurs et de ses élèves elle saura mener à bien l'œuvre entreprise par elle.

C. Vanlair.

RAPPORTS.

Sur les conclusions des rapporteurs, la Classe décide le dépôt aux archives des communications suivantes :

1° *Contribution à l'étude du bio-mécanisme;* par MM. A. Demoulin, professeur à l'École moyenne, et Ch. Pottiez, pharmacien, directeur du laboratoire de chimie médicale à Fontaine-l'Évêque. — Commissaires : MM. Fredericq et Jorissen;

2° *Quelques mots à propos d'une nouvelle théorie de la chaleur;* par J. Debry. — Commissaires : MM. Van der Mensbrugghe et De Heen.

Sur l'existence d'une lactase dans le lait de vache; par le Dr A.-J.-J. Vandevelde.

Rapport de M. Léon Fredericq, premier commissaire.

« La note que nous soumet M. Vandevelde est une suite à son mémoire sur les enzymes du lait qui a été récemment couronné par l'Académie. L'auteur y décrit une série d'expériences sur la disparition graduelle de la lactose du lait de vache conservé aseptiquement par son procédé à

l'acétone iodoformique. Le lait de vache paraît contenir une lactase spéciale qui transforme la lactose en sucres réducteurs différents des produits ordinaires (*d* glycose et *d* galactose) de l'inversion de la lactose. J'ai l'honneur de proposer à la Classe d'insérer l'intéressant travail de M. Vandevelde dans le *Bulletin* de la séance et de voter des remerciements à l'auteur. »

—

Rapport de M. A. Jorissen, deuxième commissaire.

« Je me joins au savant premier commissaire pour proposer l'impression dans le *Bulletin* du nouveau travail où M. Vandevelde expose les résultats des judicieuses recherches qu'il poursuit sur les ferments du lait. » — Adopté.

—

Action de corps solubles sur des corps insolubles;
par W. Oechsner de Coninck et L. Arzalier.

Rapport de M. W. Spring.

« Les auteurs montrent que le sulfate de baryum réagit lentement avec le chlorhydrate de méthylamine et même avec le chlorure de potassium dissous, à la condition que la masse active des corps dissous soit assez grande.

J'ai l'honneur de proposer l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Sur l'existence d'une lactase dans le lait de vache; par le Dr A.-J.-J. Vandevelde, directeur du Laboratoire chimique et bactériologique de la ville de Gand, professeur à l'Institut supérieur des fermentations et à l'École professionnelle de l'alimentation de Gand.

Dans un travail antérieur (1), je signalais que la présence d'une enzyme capable de décomposer le lactose, en l'absence des microorganismes, avait été observée dans le lait de plusieurs animaux par Spolverini (2) et qu'elle avait été, d'autre part, contestée par E. Moro (3). Déjà en 1883 Béchamp (4) et puis en 1885 Bouchut (5) admettaient la présence d'un ferment saccharo-hydrolytique dans le lait de la femme, mais en niaient l'existence dans le lait de la vache; ce ferment agissait comme l'amylase pour transformer la fécule en un sucre réducteur ne semblant pas dépasser le stade érythrodextrine.

---

(1) A.-J.-J. Vandevelde, *Over Melkenzymen.* (Chemisch Weekblad, 1904, t. Ier, pp. 915-921.)

(2) Spolverini, *Arch. méd. enfants,* p. 4, 12 décembre 1901.

(3) E. Moro, *Ueber die Fermente der Milch.* (Jahrb. Kinderheilkunde, 1902, t. LVI, pp 391-420.)

(4) A. Béchamp, *Comptes rendus Paris,* 1883, p. 96.

(5) Bouchut, *Hygiène de la première enfance.* Paris, 1885, pp. 102-105.

Plusieurs auteurs ont décrit un ferment glycolytique (1) attaquant le sucre du sang, et surtout actif dans le foie, le pancréas, la rate. L'excellent traité de C. Oppenheimer (2) signale l'existence d'une lactase dans le *Saccharomyces Kefir* et le *Saccharomyces Tyrocola* (3), ainsi que dans beaucoup d'autres levures et dans des bactéries.

Stoklasa (4) croit que le lactose se décompose spontanément, en l'absence complète de bactéries, en anhydride carbonique, alcool, acide lactique, acide acétique et acide butyrique. Weigmann, Höft et Gruber (5) mettent en doute les résultats énoncés par Stoklasa.

Les recherches que je résume dans le présent mémoire montrent que les conclusions de Stoklasa sont erronées, parce que la méthode ne remplit pas les conditions indispensables d'asepsie.

Au cours des recherches que j'ai effectuées en 1906 sur les enzymes du lait et dont le résultat a fait l'objet d'un mémoire précédent (6), j'avais institué toute une série d'essais dans le but de rechercher dans le lait de la vache la présence éventuelle d'un ferment dédoublant le

---

(1) Cf. E. Moro, *op. cit.*, p. 409.

(2) C. Oppenheimer, *Die Fermente und ihre Wirkungen*, 1903, p. 264.

(3) Beyerinck, *Centr. Bakt.*, 1889, t. VI, p. 44. — E. Fischer, *Ber. deut. chem. Ges.*, 1894, t. XXVII, p. 3481.

(4) Stoklasa, *Arch. Hyg.*, 1904, t. L, p. 165.

(5) Weigmann, Höft et Gruber, *Fortschritte auf dem Gebiete der Chemie, Hygiene und Bakteriologie der Milch und ihrer Erzeugnisse.* (Chem. Zeit., 1905, t. XXIX, p. 408.)

(6) A.-J.-J. Vandevelde, *Nouvelles recherches sur les ferments solubles du lait.* (Mémoires cour. de l'Acad. des sciences de Belgique, 1907, 85 pp.)

lactose; les phénomènes que j'avais observés à cette époque me paraissaient si singuliers, que j'avais renoncé provisoirement à les publier en même temps que mes résultats expérimentaux relevés au sujet de la protéolase, de la lipase, de l'enzyme du salol et de la lactochymosine, me proposant d'en faire une étude approfondie. Le temps nécessaire à l'exécution des expériences ne me permet qu'aujourd'hui la publication de cette partie de mon travail, qui constitue le complément de mon mémoire antérieur (1). Depuis, j'ai utilisé sans inconvénient, et à ma grande satisfaction, ma méthode à l'acétone iodoformique qui permet de conserver les liquides physiologiques dans un état parfait d'asepsie et sans modifier sensiblement l'état et l'activité des éléments constitutifs de ces liquides.

Avant de passer à l'examen des recherches définitives, je tiens à signaler les résultats préliminaires dont l'exactitude s'est vérifiée dans la suite.

Divers échantillons de lait, prélevés dans la laiterie Waterloos, à Gand, le 14 février 1906, et dont l'étude a été faite d'ailleurs dans mon mémoire précédent (2) à d'autres points de vue, avaient été introduits par portions de 25 centimètres cubes dans des éprouvettes bouchées par de l'ouate et des capuchons de caoutchouc, et traités par 3.3 centimètres cubes d'acétone iodoformique à 3 %.

Après avoir été conservés pendant plusieurs semaines dans une étuve à 37°5 C., les échantillons ont présenté

---

(1) *Op. cit.*

(2) Voir *op. cit.*, pp. 30 et suiv.

une diminution notable du pouvoir rotatoire, ainsi que le montre le tableau suivant. Les valeurs sont celles que donne dans un tube à polarisation de 20 centimètres cubes le filtrat d'un mélange de 20 centimètres cubes de lait et de 20 centimètres cubes de solution à 10 °/₀ d'acétate neutre de plomb, en tenant compte de l'augmentation du volume par suite de l'addition de l'acétone iodoformique.

NUMÉRO du lait.	DEGRÉ SACCHARIMÉTRIQUE OBSERVÉ (Appareil Laurent).		
	14.2.1906	18.3.1906	3.4.1906
V 216	11.9	11.0	9.3
V 217	11.4	9 7	6.8
V 218	10.5	8.3	4 9
V 219	11.3	5.6	3.6
V 220	11 8	10.8	8.1
V 221	9 6	6.8	4.7
V 222	9.8	7.0	4.6
V 223	12.3	9.9	8 7

Il semblait résulter de ces chiffres, outre la constatation de la grande variabilité dans le mode d'action des divers échantillons, que le lactose devait subir une importante modification, et que les produits de la transformation, qui en raison du traitement par l'acétate de plomb n'étaient pas des acides, devaient provoquer la

variation du pouvoir rotatoire, variation qui ne correspond pas, comme nous le verrons plus loin, à une simple inversion du lactose en du glucose et du galactose.

J'ai alors entrepris sur le lait V 241 une étude plus détaillée de ce phénomène.

Le lait V 241 provient d'une vache de 7 ans, ayant vêlé le 29 novembre 1906 et donnant par jour 28 litres. Il a été prélevé le 20 décembre 1906, à 11 heures, à la laiterie de M. Waterloos, à Gand.

Sa composition est la suivante :

Extrait	13.15 GV °/₀.
Cendres	0.70 —
Protéines.	2.51 —
Lactose	4.88 —
Graisse	4.93 —
Acidité de 100 centimètres cubes :	27 cent. cubes N/10.

Le dosage du lactose par polarisation a conduit à la valeur indiquée 4.884; le dosage par réduction de la liqueur de Fehling a donné 4.768. L'osazone, obtenue d'après les indications que je formule plus loin, fond à 201° C.; la lactosazone fond à 200° C.

Le lait est introduit dans des bouteilles à pression avec fermeture en caoutchouc par portions de 500 centimètres cubes. Ces doses sont additionnées, soit de 1cc5 de formol à 40 °/₀, soit de 50 centimètres cubes de kétone iodoformique à 4 °/₀. En outre, dans des fioles de 400 centimètres cubes et bouchées d'ouate j'ai stérilisé 250 centimètres cubes du lait par trois ébullitions successives, chaque fois à un jour d'intervalle, à 100° C. pendant vingt minutes. Après le refroidissement, les goulots

sont recouverts de capuchons de caoutchouc de manière à éviter toute évaporation.

Le lait, conservé ainsi de trois manières différentes, est maintenu à l'étuve à 37°5 C.; les échantillons sont agités de temps en temps pour leur conserver leur homogénéité.

A trois reprises, j'ai fait l'examen des échantillons comme suit :

Pour l'examen de la déviation polarimétrique, j'ai traité 20 centimètres cubes de lait par 20 centimètres cubes d'acétate neutre de plomb à 10 °/₀. La déviation du liquide filtré est observée au tube de 20 centimètres cubes et le degré saccharimétrique est transformé en teneur en lactose d'après le tableau publié dans le *Chemisch Jaarboekje* (1). Le formol ne modifiant guère le volume total du liquide, le résultat obtenu est définitif; l'introduction de 10 °/₀ d'acétone iodoformique modifie le volume et nécessite une correction (× 1.132).

Le dosage par la liqueur de Fehling a été effectué comme suit : Dans un flacon jaugé de 100 centimètres cubes j'introduis 10 centimètres cubes de lait, 10 centimètres cubes d'acétate neutre de plomb à 10 °/₀. L'emploi de l'acétate de plomb est ici nécessaire et on ne peut substituer l acide acétique à ce réactif; en effet, la protéolyse du lait conduit à la formation de peptones que l'acide acétique ne parvient pas à éliminer et qui peuvent réagir sur la liqueur de Fehling. Le mélange de lait et d'acé-

---

(1) *Chemisch Jaarboekje voor Nederland, België en Nederlandsch Indië*, 1902, onder redactie van Jorissen, Van Ketel, Prinsen Geerligs, Reicher, Rutten en Vandevelde; p. 98.

tate de plomb est ensuite additionné de 10 centimètres cubes de sulfate de sodium en solution saturée, après quoi le volume total est porté à 100 centimètres cubes par addition d'eau distillée. Le traitement de 50 centimètres cubes de filtrat par 50 centimètres cubes de liqueur de Fehling donne un précipité d'oxyde cuivreux qui est recueilli par filtration et transformé, pour pesée, en oxyde cuivrique. Dans le cas du lait iodoformé, il faut faire la correction signalée plus haut (× 1.132).

La lactosephénylosazone fond à 200° C. Je l'ai obtenue aux dépens de mes échantillons conservés de lait, en traitant 250 centimètres cubes du lait par 50 centimètres cubes d'eau tenant en dissolution 16 grammes d'acétate neutre de plomb. Après une heure, la masse est traitée par 100 centimètres cubes de solution saturée de sulfate de sodium, et puis filtrée. Une ébullition permet d'éliminer encore par filtration un léger précipité floconneux. Le filtrat est ensuite traité par 15 grammes de chlorhydrate de phénylhydrazine et 25 grammes d'acétate de sodium, et soumis pendant une heure à l'ébullition en ayant soin de maintenir constante la quantité d'eau. Après filtration à chaud, la solution laisse déposer les cristaux d'osazone que l'on purifie ensuite par cristallisation de l'eau bouillante.

Les échantillons, conservés d'après les trois procédés signalés plus haut, ont été examinés le 16 janvier 1907, donc après vingt-sept jours de séjour à l'étuve à 37°5 C., le 25 mai 1907, donc après cent cinquante-cinq jours, et enfin le 20 mars 1908, soit après quatre cent vingt-neuf jours. Voici les constatations que j'ai faites.

1. — Dosage du lactose par polarisation.

Lait initial . . 11°8 sacchar. correspondant à 4.88 °/₀ de lactose.

Après 27 jours.

Lait bouilli . .	11°4 sacchar.	correspondant	à 4.63 °/₀ de lactose.
— formolé . .	11°4 —	—	à 4.63 — —
— i doformé .	8°7 — (corrigé 9°8)	—	à 4.06 — —

Après 155 jours.

Lait bouilli . .	11°5 sacchar.	correspondant	à 4.76 °/₀ de lactose.
— formolé . .	11°4 —	—	à 4.63 — —
— iodoformé .	4°8 — (corrigé 5°4)	—	à 2.22 — —

Après 429 jours.

Lait bouilli . .	10°9 sacchar.	correspondant	à 4.50 °/₀ de lactose.
— formolé . .	10°4 —	—	à 4.31 — —
— iodoformé .	4°0 — (corrigé 4°5)	—	à 1.86 — —

2. — Dosage du lactose par la méthode de Fehling.

En même temps que le dosage par polarisation, j'ai effectué sur les mêmes échantillons le dosage par la méthode de Fehling. Voici les quantités de lactose correspondant au cuivre précipité :

Lait initial. . . . 4gr768 dans 100 centimètres cubes.

Après 27 jours.

Lait bouilli . . .	4gr695 dans 100 centimètres cubes.	
— formolé . . .	4gr609 —	—
— iodoformé . .	4gr479 —	—

Après 155 jours.

Lait bouilli . . .	4gr653	dans 100 centimètres cubes.	
— formolé . . .	4gr525	—	—
— iodoformé . .	4gr273	—	—

Après 429 jours.

Lait bouilli . . .	4gr455	dans 100 centimètres cubes.	
— formolé . . .	4gr588	—	—
— iodoformé . .	4gr351	—	—

Ces chiffres montrent, d'une part, que le pouvoir rotatoire diminue notablement dans le cas du lait cru conservé à l'acétone iodoformique, d'autre part, que la quantité des sucres réducteurs, réagissant sur la liqueur de Fehling, ne subit qu'une faible diminution. Il faut donc admettre que le lactose subit une transformation, à la suite de laquelle il doit se produire des sucres lévogyres, diminuant ainsi le pouvoir rotatoire dans le sens positif et maintenant sensiblement constante la quantité des produits réducteurs.

Ce fait me paraît curieux; en effet, on sait que l'inversion du lactose conduit au dextroglucose et au dextrogalactose dont les pouvoirs rotatoires sont au moins aussi élevés que celui du lactose lui-même.

Lactose	$[\alpha]_D = +52.53$
d. Glucose. . . .	$[\alpha]_D = +51\ 78$
d. Galactose . . .	$[\alpha]_D = +80.27$

Ces valeurs devraient conduire plutôt à une élévation du pouvoir rotatoire.

De plus, le pouvoir réducteur du lactose est inférieur à

celui des sucres auxquels il peut donner naissance par inversion :

0gr1 de lactose réduit 0gr1385 de cuivre.
0gr1 de lactose inverti réduit 0gr1890 de cuivre.
0gr1 de d. glucose réduit 0gr1820 de cuivre.
0gr1 de d galactose réduit 0gr1887 de cuivre.

Ou, en d'autres termes :

0gr1 de cuivre correspond à 0gr0722 de lactose, à 0gr0529 de lactose inverti, à 0gr0549 de d. glucose et à 0gr0530 de d. galactose.

Les valeurs observées au cours de la détermination des dosages par la méthode de Fehling ne sont pas dirigées dans le sens de l'augmentation du pouvoir réducteur à la suite d'une inversion, ce qui fournit un deuxième argument pour montrer que le lactose ne se laisse pas invertir dans le sens connu, c'est-à-dire en d. glucose et en d. galactose.

3. — Obtention de l'osazone.

Après vingt-sept jours, j'ai obtenu pour les trois échantillons la lactosephénylosazone, fondant à 197° C. pour celle obtenue aux dépens du lait bouilli, à 198° C. pour celle du lait formolé, et à 196° C. pour celle du lait iodoformé. Les points de fusion correspondent sensiblement à celui de l'osazone préparée à partir du lactose pur.

Après cent cinquante-cinq jours, une nouvelle série de préparations m'a donné des produits fondant à 196° C.,

197° C. et 196° C., respectivement pour le lait bouilli, le lait formolé et le lait iodoformé. Mais, comme la quantité d'osazone obtenue avec le lait iodoformé était manifestement moindre qu'avec le lait formolé et bouilli, j'ai déterminé le poids en me plaçant dans des conditions identiques de préparation.

J'ai obtenu ainsi 1gr68 d'osazone dans le cas du lait bouilli, 1gr41 dans le cas du lait formolé, et seulement 0gr63 dans le cas du lait iodoformé.

Après quatre cent vingt-neuf jours, j'ai renouvelé l'essai dans le même sens, mais cette fois je n'ai pu obtenir la moindre cristallisation de lactosephénylosazone dans le cas du lait iodoformé, tandis que pour le lait formolé j'ai obtenu 1gr29 d'osazone fondant à 199° C. et pour le lait bouilli 1gr45 d'osazone fondant à 198° C.

Il en résulte que le lactose disparaît progressivement dans le lait cru iodoformé, qu'il se maintient presque complètement dans le lait bouilli, tandis qu'il subit une légère transformation dans le lait cru formolé.

Les produits habituels de l'inversion du lactose donnent des osazones présentant des propriétés analogues à la lactosephénylosazone. La d. glucosephénylosazone fond à 205°-208° C.; la d. galactosephénylosazone fond à 193°-194° C.

L'ensemble de ces données montre encore une fois que le lactose subit, dans le lait cru, un peu pour le lait formolé, beaucoup plus énergiquement pour le lait iodoformé, une transformation en produits réducteurs, agissant encore sur la liqueur de Fehling, mais ne polarisant pas à droite et ne donnant pas avec la phénylhydrazine de produits peu solubles cristallisables.

4. — Acidité des produits.

Un examen bactériologique de chacun des produits étudiés a démontré qu'ils étaient parfaitement stériles; des bactéries n'ont donc pas pu modifier l'acidité du lait expérimenté. Il était cependant admissible qu'une transformation spéciale du lactose ait donné naissance à des acides. C'est ce que j'ai recherché.

Le lait initial titre 27 centimètres cubes $N/_{10}$ pour 100 centimètres cubes de liquide, le dosage étant fait à la soude $N/_{10}$ et à la phénolphtaléine.

Après cinquante-cinq jours et après quatre cent vingt-neuf jours, j'ai refait les dosages acidimétriques, en faisant, pour le lait iodoformé, la correction (multiplication par 1.132) pour ramener au volume primitif; voici le nombre de centimètres cubes $N/_{10}$ de soude nécessaire à la neutralisation de 100 centimètres cubes de lait :

	Après 155 jours.	Après 429 jours.
Lait bouilli	28.0	43.0
— formolé	33.0	37.0
— iodoformé	27.1	34.0

Ces chiffres ne permettent pas de conclure à une formation appréciable d'acide et font éloigner de suite l'hypothèse d'une formation d'acides aux dépens du lactose; d'ailleurs, cette formation d'acides aurait pour conséquence une notable diminution du pouvoir rotatoire du liquide provenant du traitement du lait par l'acétate de plomb, ce qui n'a pas été observé.

Afin de vérifier l'exactitude des faits que j'avais observés au sujet du lait V 241, j'ai soumis à une recherche analogue le lait V 129 provenant de mes recherches (1) effectuées avec De Waele et Sugg sur le lait cru stérile. La préparation portait la date du 17 octobre 1904; ce lait avait été stérilisé par l'eau oxygénée, et l'eau oxygénée avait été ensuite décomposée par la catalase du sang stérile. L'échantillon parfaitement stérile, ainsi que l'examen bactériologique me l'a démontré, présentait le 20 mars 1908, soit après trois ans et cent cinquante-trois jours de conservation, les propriétés suivantes :

Extrait dans 100 centimètres cubes. . .	10.79 grammes.
Cendres dans 100 centimètres cubes. . .	0.57 —

Acidité, pour 100 centimètres cubes, correspondant à 28 centimètres cubes $N/_{10}$.

Lactose, dosé par la méthode de Fehling : 3gr818 dans 100 centimètres cubes.

Polarisation : nulle, ce qui devrait faire admettre l'absence de tout sucre ou bien la présence de sucres à indices contraires.

Mon cahier de laboratoire me permet de reproduire pour ce lait V 129, au moment de sa préparation, les valeurs suivantes :

Extrait dans 100 centimètres cubes.	10.84 grammes.
Cendres.	0.56 —
Lactose	4.180 gr. (par polarisation).

(1) H. De Waele, E. Sugg et A.-J.-J. Vandevelde, *Sur l'obtention de lait cru stérile.* (Centr. Bakt., II, 1904, t. XIII, pp. 30-35.)

L'acidité n'a pas été déterminée; mais il faut faire remarquer que l'acidité trouvée le 20 mars 1908 est celle du lait frais, et que, par conséquent, elle n'a guère dû subir de modifications.

L'examen de l'échantillon V 129 confirme absolument les résultats observés pour le lait V 241 conservé à l'acétone iodoformé, et démontre en outre que la méthode de conservation au moyen de ce réactif place l'expérimentateur, ainsi que je l'ai d'ailleurs signalé autrefois (1), dans des conditions absolument identiques à celles dans lesquelles se trouve le lait cru stérile, exempt de tout réactif. Cet examen démontre en outre qu'il ne se produit aux dépens de l'extrait, et par suite aux dépens du lactose, aucun produit volatil à 110° C.

Il faut donc conclure que dans le lait cru le lactose subit, en dehors de toute action bactérienne, une modification profonde; au cours de cette modification, il ne se produit ni gaz, ni alcool, ni acides; il ne se forme pas les produits habituels de l'inversion ordinaire du lactose, du d. glucose et du d. galactose. Il se produit cependant des sucres dont le pouvoir réducteur n'est pas fort différent de celui du lactose lui-même.

Les essais effectués simultanément sur du lait cru et sur du lait bouilli permettent d'admettre l'existence d'une lactase dans le lait de la vache; toutefois, l'action de cette enzyme ne se borne pas à un simple phénomène d'inversion en d. glucose et d. galactose. Il doit se pro-

---

(1) A.-J.-J. Vandevelde, *Ueber die Anwendung von Antiseptiken bei Untersuchungen über Enzyme.* (Biochem. Zeitschr., 1907, t. III, pp. 315-319.)

duire des sucres d'une autre nature que je n'ai pas réussi à identifier jusqu'à présent.

Je poursuis actuellement cette étude qui demande un temps très considérable, comme d'ailleurs toutes les recherches effectuées sur des enzymes autolysantes; c'est pour ce motif que j'ai publié les résultats auxquels je suis arrivé jusqu'à présent.

Laboratoire chimique et bactériologique
de la ville de Gand, 31 mars 1908.

Action de corps solubles sur des corps insolubles (1);
par W. Oechsner de Coninck et L. Arzalier.

Nous avons l'honneur de présenter à l'Académie royale la suite de nos recherches sur ce sujet.

1° Nous avons chauffé, vers 100°, pendant six cent vingt heures, 1 molécule de sulfate de baryum au contact d'une solution aqueuse concentrée renfermant 2 molécules de chlorhydrate de méthylamine pur. Nous avons employé cette proportion afin que l'atome de baryum fût sollicité par 2 atomes de chlore. En effet, dans une première série d'expériences, nous avions mis en présence 1 molécule SO^4Ba et 1 molécule AzH^2CH^3HCl, et, même au bout de six cent quinze heures de chauffe à 90°, il ne s'était produit aucune réaction.

Mais lorsque nous avons mis en présence SO^4Ba et 2 (AzH^2CH^3HCl), *il s'est produit une réaction notable* au

(1) Institut de chimie générale, Montpellier.

bout du temps indiqué plus haut, et l'on peut admettre qu'il y a eu double décomposition partielle entre le sulfate de baryum insoluble et le chlorhydrate de méthylamine très soluble.

2° Nous avons placé, dans une fiole, 1 molécule de SO^4Ba; nous y avons versé une solution aqueuse concentrée renfermant 2 molécules de chlorure de potassium pur. La fiole a été insolée pendant les mois de décembre et de janvier, chauffée sur un B. M. vers 90°-95°, pendant les mois de février et de mars, puis insolée de nouveau pendant le laps de temps s'écoulant du 4 au 29 avril. Or *il s'est produit, là aussi, une réaction notable*, et l'on doit admettre qu'il y a eu double décomposition partielle entre le sulfate de baryum insoluble et le chlorure de potassium soluble.

Nous continuons ces recherches en employant d'autres sels insolubles.

Montpellier, 29 avril 1908.

ÉLECTIONS.

La Classe réélit M. Mourlon, délégué auprès de la Commission administrative pour l'année 1908-1909.

Elle adopte définitivement les candidatures présentées dans la séance du 4 avril pour les deux places d'associé vacantes dans la Section des sciences mathématiques et physiques, ainsi que pour la place de membre titulaire dans cette même Section. L'élection aura lieu dans la séance du 6 juin.

OUVRAGES PRÉSENTÉS.

Lancaster (*Alb.*). Annuaire météorologique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1908.

Mourlon (*Michel*). La documentation géologique. Brux., 1907; extr. in-8° (4 p.).

— Sur la nouvelle interprétation du sable de Moll en Campine. Bruxelles, 1907; extr. in-8° (6 p.).

— Observations à propos du Catalogue international de littérature scientifique de Londres et de la création, à Bruxelles, de la Bibliothèque collective des sociétés savantes. Brux., 1907; extr. in-8° (3 p.).

— Découverte d'ossements de Mammouth dans le limon de Freeren, près de Tongres. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (5 p.).

— Le Calcaire carbonifère et les dépôts post-primaires qui le recouvrent dans la vallée de l'Escaut, entre Tournai et Antoing. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (16 p.).

— Compte rendu de l'excursion géologique aux environs de Bruxelles, à l'occasion des grands déblais effectués à Forest pour la création de nouvelles avenues, le dimanche 29 mars 1908 Bruxelles, 1908; extr. in-8° (12 p.)

Neuberg (*Joseph*). Cours de géométrie analytique. Paris-Liége, 1908; in-8° (IV-472 p.).

Ioteyko (*J.*). Le mouvement pédologique. Liége, 1908; extr. in-8° (36 p.).

— La pédologie. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (36 p.).

— La conception idéo-énergétique et la psychomécanique. Bruxelles, 1908; in-8° (16 p.).

— La Revue psychologique, vol. I, fasc. 1, mars 1908. In-8°.

Bruxelles. *Société belge de Géologie*. Bulletin, t. XXI, 1907.

— *Société royale de médecine publique.* Enquête sur la fièvre typhoïde, 1907-1908. Bruxelles, 1908, in-8°.

—

Münden (*Max*). Der Chtonoblast. Die lebende biologische und morphologische Grundlage alles sogenannten Belebten und Unbelebten. Leipzig, 1907 ; in-8°.

— Autoreferat der Chtonoblast in seinen Beziehungen zur Entwicklungsmechanik. Leipzig, 1907 ; extr. in-8° (8 p.).

BERLIN. *Kön. preussische Akademie der Wissenschaften.* Abhandlungen, 1907. In-4°.

BERLIN. *Association géodésique internationale.* Comptes rendus des séances de la 15e conférence, tenue à Budapest en 1906. In-4°.

—

Lebon (*Ernest*). Recherche rapide des facteurs premiers des nombres à l'aide de deux tables de restes. Paris, 1908 ; extr. in-8° (6 p.).

—

Genoese (*F. Masciari*). Come si son formate le montagne? Sienne, 1907 ; in-4° (15 p.).

VÉRONE. *Accademia d'agricoltura... e commercio.* Atti e Memorie, vol. IV, 1907.

—

DELFT. *Technische Hoogeschool.* Over de toepassing van de centrifugaal kracht voor de scheiding en zuivering van ertsen en kolen ; door Jan Van Gelder, 1908.

— Over den invloed der zelfinductie in telefoongeleidingen ; door Nicolaas Koomans, 1908.

ZURICH. *Internationale Erdmessung.* Astronomisch-geodetische Arbeiten in der Schweiz. Band X, 1907 ; in-4°.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — N° 6.

CLASSE DES SCIENCES.

Séance du 6 juin 1908.

M. Julien Fraipont, directeur.

M. le chevalier Edm. Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. J. Deruyts, *vice-directeur;* Éd. Van Beneden, C. Malaise, Ch. Van Bambeke, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, M. Mourlon, P. Mansion, P. De Heen, C. le Paige, Ch. Lagrange, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Jorissen, Ch. Francotte, Paul Pelseneer, A. Gravis, Aug. Lameere, G. Cesàro, *membres;* Th. Durand, V. Willem et Alex. de Hemptinne, *correspondants.*

M. Louis Henry a motivé son absence.

CORRESPONDANCE.

—

M. le Secrétaire perpétuel notifie la perte faite en la personne d'Albert de Lapparent, né à Bourges (Cher) le 30 décembre 1839 et décédé à Paris le 4 mai.

M. de Lapparent avait été élu, le 15 décembre 1897, associé de la Section des sciences naturelles de l'Académie royale de Belgique.

J'ai estimé, dit M. le chevalier Marchal, dès que cette annonce a paru dans les journaux du soir, qu'il était de mon devoir d'écrire immédiatement à M. Darboux, qui était collègue du défunt à l'Académie des sciences de Paris, que je ne faisais que devancer les sentiments de la Classe des sciences en lui disant combien elle ressentira profondément le vide causé dans ses rangs par la perte de l'une des plus pures illustrations de la science géologique et minéralogique française que les Académies s'honoraient de compter dans leur sein ; et j'ajoutais, comme organe et interprète de l'Académie royale de Belgique tout entière, que je le priais d'assurer l'Académie des sciences de Paris que nous sommes avec elle d'esprit et de cœur en la douloureuse circonstance.

— La Classe accepte le dépôt dans les archives de l'Académie des billets cachetés envoyés :

1° Par M. Ch. Lagrange. Il est daté du 6 juin ;

2° Par M. Prosper Callebaut, d'Alost, sur *la désagrégation et la décoagulation des amyloses du maïs et autres céréales non maltées ;*

3° Par M. Lucien Godeaux, de Liége, sur *les congruences linéaires de cubiques gauches. Note A ;*

4° Par M. Aug. Daussin, de Jette-Saint-Pierre, *Recherches en cristallographie.*

— La municipalité de la ville de Faënza annonce qu'elle célébrera, les 24 et 25 octobre prochain, le 300e anniversaire de la naissance de Torricelli, l'inventeur du baromètre. — Une Adresse de félicitations lui sera envoyée.

— La Société physico-médicale d'Erlangen annonce la célébration de son 100e anniversaire de fondation, le 27 courant. — Des félicitations lui ont été adressées.

— MM. Van der Mensbrugghe et De Heen sont invités à donner leur avis sur une note de M. J. Debry au sujet des *lois de la densité qui paraissent se rattacher à la théorie matérialiste de la chaleur.*

— Hommages d'ouvrages :

1° *Le recueil de figures coloriées de champignons délaissé par Fr. Van Sterbeek;* par Ch. Van Bambeke;

2° *Compte rendu de l'excursion géologique aux environs de Bruxelles, à l'occasion des grands déblais effectués à Forest, pour la création de nouvelles avenues, le dimanche 29 mars 1908;* par M. Mourlon;

3° *Notice nécrologique sur M. Janssen, membre de l'Académie des sciences de Paris. Funérailles;* par A. Chauveau, associé;

4° *La distribution des étoiles par rapport à la Voie lactée d'après la Carte et le Catalogue photographiques du Ciel;* par Paul Stroobant;

5° *L'éducation de la femme;* par M. C. Schuyten (présenté par M. Ch. Van Bambeke, avec une note qui figure ci-après).

— Remerciements.

BIBLIOGRAPHIE.

Dr C. Schuyten, *L'éducation de la femme.*

J'ai l'honneur de présenter à la Classe, au nom de M. le Dr Schuyten, directeur du Service pédologique et du laboratoire communal de pédologie d'Anvers, un ouvrage intitulé : *L'éducation de la femme*, paru dans la *Bibliothèque biologique et sociologique de la Femme*, publiée sous la direction du Dr Toulouse. A ne considérer que le titre du livre, on pourrait croire que l'auteur s'est trompé d'adresse en faisant hommage d'un exemplaire à la Classe des sciences de l'Académie. Il n'en est rien. Comme le Dr Schuyten le remarque dans un avant-propos, son livre « n'est pas conçu comme on a l'habitude de le faire pour des ouvrages semblables. Il s'en écarte radicalement par le fait qu'il s'efforce d'être expérimental du commencement à la fin ». D'ailleurs, un simple coup d'œil sur les en-têtes des chapitres permet de constater que maintes questions dont s'occupe l'auteur ne sont pas exclusivement du ressort de la pédologie, mais qu'elles sont aussi de nature à intéresser le psychologiste, le physiologiste, le biologiste. Ainsi, dans la première partie de l'ouvrage, un chapitre est consacré à l'étude des *mesures du corps*, un autre à celle de la *force*

musculaire, un autre encore à celle des *organes des sens*, à propos desquels il est question de la *sensibilité musculaire*. Dans la deuxième partie, où il s'agit de l'éducation intellectuelle et morale, notons le chapitre qui traite de la *fatigue intellectuelle* et celui où l'auteur s'occupe de la *mesure de l'intelligence* et de l'*analyse infantile*.

CH. VAN BAMBEKE.

RAPPORTS.

Détermination des variétés des complexes bilinéaires de coniques; par Lucien Godeaux.

Rapport de M. Neuberg.

« J'ai l'honneur de présenter à la Classe une courte notice de M. Godeaux sur les complexes de coniques. Avec M. Montesano, il prend pour nombres caractéristiques d'un tel complexe le nombre μ de coniques situées dans un plan donné et le nombre ν de ces courbes qui passent par un point donné et rencontrent une seconde fois une droite quelconque menée par ce même point. Le complexe est dit bilinéaire lorsque $\mu = \nu = 1$.

Une conique quelconque du complexe peut être représentée par le système d'équations

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0,$$
$$k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \cdots + k_6\varphi_6 = 0,$$

où φ_1, φ_2, ... φ_6, désignent six fonctions quadratiques de x_1, x_2, x_3, x_4 n'ayant pas de point commun. L'auteur

admet que les coefficients u et k sont des fonctions algébriques homogènes, respectivement de degrés n et m, de quatre paramètres α_1, α_2, α_3, α_4. Pour avoir $\mu = 1$, les u doivent être des fonctions linéaires des α; on peut alors considérer les k comme des fonctions de degré m des u. Si l'on suppose également $\nu = 1$, l'équation $k_1\varphi_1 + \cdots = 0$, pour un système donné des valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4, doit représenter une gerbe de plans; c'est ce qui a lieu lorsque les k sont des fonctions linéaires de u_1, u_2, u_3, u_4 ou que $\Sigma k_1\varphi_1$ est le carré d'une fonction linéaire en u et en x. Le second cas se ramène au premier. Pour celui-ci, M. Godeaux distingue trois catégories de complexes, suivant que quatre des quadriques $\varphi_i = 0$ sont indépendantes ou forment une gerbe ou forment un faisceau.

L'auteur est-il parvenu à établir tous les cas possibles?

Sans me prononcer sur cette question, je crois que sa notice présente un intérêt suffisant pour paraître dans le *Bulletin* de la séance. D'ailleurs, il avait déjà consigné une partie de ces recherches dans un billet cacheté daté du 20 mars 1908, et M. Montesano a examiné la même question au Congrès de Rome dont on n'a publié jusqu'ici que les titres des communications. » — Adopté.

De la formation post-fœtale des œufs définitifs chez le chat; par les Drs Hans von Winiwarter et G. Sainmont.

Rapport de M. Édouard Van Beneden.

« Dans leurs recherches systématiquement poursuivies pendant plusieurs années, sur l'ovaire du chat, MM. les Drs von Winiwarter et Sainmont ont établi que, contrairement à ce qui a été généralement admis pour les mam-

mifères, les œufs destinés à atteindre leur maturité, pendant la période de l'activité sexuelle, procèdent d'une néoformation post-fœtale préalable à la puberté. Tous les follicules qu'engendrent les cordons médullaires et les tubes de Pflüger dégénèrent dans le cours de l'évolution : aucun d'eux n'aboutit à une ovulation. Ce ne sont ni les ovules de la première, ni ceux de la seconde poussée épithéliale qui produisent les œufs définitifs, mais bien les éléments d'une troisième prolifération relativement tardive.

Au surplus, cette néoformation post-embryonnaire est la seule qui se manifeste dans le cours du développement post-fœtal.

C'est là une découverte importante pour laquelle les auteurs désirent prendre date, en la faisant connaître à l'Académie, sous la forme d'une communication préliminaire. Je propose à la Classe de décider l'impression au *Bulletin* de la note de MM. von Winiwarter et Sainmont et d'adresser des remerciements aux auteurs. » — Adopté.

—

Action de corps solubles sur des corps insolubles; par W. Oechsner de Coninck et L. Arzalier.

Rapport de M. W. Spring.

« Les auteurs ont continué leurs recherches sur l'action de corps solubles sur des corps insolubles : ils montrent, aujourd'hui, que le carbonate de strontium réagit lentement avec une solution de chlorure de potassium, même à la température ordinaire.

J'ai l'honneur de proposer l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

—

La structure de l'œuf des mammifères (Chauve-souris, Vespertilio noctula). Troisième partie : *L'oocyte à la fin du stade d'accroissement, au stade de maturation, au stade de la fécondation et au début de la segmentation;* par le Prof^r O. Vander Stricht.

Rapport de M. Van Bambeke, premier commissaire.

« L'auteur commence par rappeler que, dans un travail paru en 1904 dans les *Archives de biologie*, il a étudié les différentes étapes de la période d'accroissement de l'oocyte de Chauve-souris, en examinant tout spécialement l'apparition du corps de Balbiani, la structure du corps vitellin bien développé et son évolution, les pseudochromosomes et les boyaux vitellogènes ou mitochondriaux.

Cette étude de la vitellogenèse se rapporte surtout à des ovules d'ovaires adultes, propres aux animaux sacrifiés en hiver et au printemps. A cette époque, il lui manquait le matériel nécessaire à l'étude des premiers stades. Depuis lors, il a pu se le procurer, ce qui lui a permis de compléter ses premières recherches. Toutefois, en tenant compte du fait que les principales conclusions de ce travail complémentaire ont été exposées dans deux notes préliminaires et que, depuis très longtemps, les dessins du mémoire actuel ont été achevés, il a préféré publier sans retard ce dernier et remettre, quelque temps encore, l'étude des oocytes d'ovaires, d'embryons et de nourrissons.

L'auteur reconnaît que le présent travail gagnerait beaucoup s'il avait été précédé d'une étude plus ou moins macroscopique montrant, à un faible grossissement, les follicules de de Graaf normaux renfermant les ovules au stade de la maturation tout à fait distincts d'autres œufs de même volume, mais en voie d'atrésie, ainsi que les oocytes tombés dans l'espace périovarique ou arrivés dans les différents segments de l'oviducte où ils sont encore entourés, au début, de la majeure partie ou d'un reste de l'épithélium ovulaire, au moment de la fécondation et des premiers stades de la segmentation; mais cette étude fera l'objet d'un prochain mémoire.

Avant d'exposer les résultats de ses recherches, Vander Stricht nous renseigne sur la technique employée par lui et sur les matériaux dont il a pu disposer. Parmi les renseignements très précis fournis au sujet de la technique, il dit notamment, à propos de la fixation des matériaux : « .... chaque fixateur présente certains avantages et, pour faire une étude complète, il est bon de les utiliser à tour de rôle. On obtient de cette manière un très grand nombre de bonnes préparations, dont quelques-unes sont particulièrement favorables pour la description des faits. »

L'étude actuelle porte sur un matériel d'au delà trois cents ovules à différents stades de la maturation, de la fécondation et de la segmentation. L'auteur a constaté de grandes différences au point de vue du développement de l'œuf de Chauve-souris, non seulement d'après la température, la saison, mais encore d'après les individus

d'un même lot capturés le même jour, dans le même bois.

Après quelques indications sur les époques auxquelles se font, en Belgique, l'ovulation et l'accouplement de la Noctule, et sur les dessins et les photographies qui accompagnent le mémoire, il donne le plan de ce dernier. Le mémoire comprend six chapitres subdivisés en un certain nombre de paragraphes. Au début de chaque chapitre, on trouve des indications précises sur l'époque de l'année à laquelle les œufs ont été fixés.

Chapitre Ier. — Il y est question des *dernières phases de l'accroissement de l'ovule*. Dans le cours de ces phases, la constitution du vitellus se modifie d'après l'époque de l'année et d'après l'âge des femelles. Chez les jeunes femelles, des corps vitellogènes distincts du corps vitellin de Balbiani élaborent du deutoplasme. Les mitochondries, après divers changements de siège et de groupement, donnent naissance à une couche corticale mitochondriale définitive, la couche vitelline plastique qui enveloppe la zone deutoplasmique centrale.

Suivent quelques renseignements sur le siège de la vésicule germinative, sur sa forme, sa constitution, sur la disposition du nucléole chromatique peu de temps avant l'apparition du premier fuseau de maturation. Les segments chromatiques de ce dernier rappellent ceux des spermatocytes de premier ordre des mammifères. Deux ovocentres apparaissent en même temps au sommet du petit fuseau achromatique en voie de formation. Cette

figure siège dans un épaississement de la couche vitelline corticale ou pôle animal.

Le chapitre se termine — et c'est aussi le cas pour quatre chapitres suivants — par un aperçu historique.

Chapitre II. — Il est consacré à l'étude de la *première mitose de maturation*. Dans cette étude, l'auteur s'arrête à la constitution du premier fuseau de maturation, aux caractères de sa partie chromatique et de sa partie achromatique; à la constitution du vitellus formé d'une couche corticale plastique, mitochondriale, épaissie au pourtour du fuseau de direction (pôle animal), et d'une zone deutoplasmique centrale où les mitochondries, d'abord tassées, accumulées par groupes dans la charpente interalvéolaire épaissie, sont réparties plus régulièrement dans la suite. — Le volume de l'oocyte de premier ordre tend à se réduire. — L'espace périvitellin apparaît au pôle animal, dans le voisinage du premier fuseau de direction, et renferme un liquide et des granulations spéciales. — Souvent le premier globule polaire détaché est constitué par un véritable second fuseau de maturation; on peut même observer des corpuscules centraux aux deux pôles de la figure achromatique, mais jamais cette mitose n'aboutit à une division, la figure mitosique subit une atrophie. Le premier globule polaire renferme un vitellus plastique chargé de mitochondries et de granulations graisseuses; son volume varie d'après l'âge des œufs et surtout d'après les stades de développement de l'ovule; sa forme est généralement irrégulière, lobée.

La *seconde mitose de maturation* fait l'objet du chapitre III. Le second fuseau de maturation apparaît toujours dans l'ovaire. Il est caractéristique et se distingue facilement du premier. L'auteur décrit successivement sa partie chromatique, nombre et caractères des segments qui la composent ; sa partie achromatique avec ses centrosomes ; le second globule polaire et ce qui le distingue du premier ; les caractères du noyau qui persiste dans l'ovule après l'expulsion du second globule ; il signale la présence exceptionnelle d'un ovocentre à côté du jeune pronucléus femelle, après l'expulsion du second globule polaire, dans les préparations très bien réussies ; l'existence d'un volumineux corpuscule intermédiaire, formé par la fusion des nodosités des filaments réunissants (plaque fusoriale). Enfin, nous trouvons, dans ce chapitre, la description des modifications éprouvées par le vitellus dans lequel se dessine le pôle animal définitif, d'où un changement dans la polarité de l'œuf.

Dans le chapitre IV, un des plus intéressants du mémoire, l'auteur décrit les phénomènes qui caractérisent la *période de fécondation* : pénétration du spermatozoïde dans l'œuf, époque de cette pénétration, apparition d'un cône de conception, rotation de la tête du spermatozoïde, mais qui peut faire défaut ; persistance de la queue qui adhère toujours, pendant cette période, au pronucléus mâle ; apparition d'un spermaster qui gagne en étendue et en puissance jusqu'au stade de la réunion des deux pronucléus ; modifications subies par la tête du spermatozoïde ; évolution identique des deux

pronucléus, leurs caractères, leur déplacement : ils se déplacent vers le pôle animal pour atteindre le vitellus plastique. Lors de cette migration, le noyau spermatique atteint toujours le premier son siège définitif; le noyau femelle se déplace un peu plus tard et plus lentement; quand il occupe à peu près sa position définitive, il est plus rapproché du centre de l'œuf que le noyau mâle. Viennent ensuite des détails sur les modifications subies par le vitellus : sa différenciation graduelle en deux segments, une masse deutoplasmique rapprochée du pôle végétatif et une zone plastique attenant au pôle opposé et représentant à peu près le tiers de la sphère ovulaire. Une autre modification du vitellus, désignée par Vander Stricht sous le nom de *deutoplasmolyse* et qui débute dès la période de maturation, consiste en la séparation du pôle végétatif, d'éléments du vitellus nutritif qui pénètrent dans l'espace périvitellin et échappent ainsi à la segmentation.

A part une exception apparente expliquée par l'auteur, dans la cellule-œuf fécondée où la conjugaison des pronucléus est effectuée, les noyaux mâle et femelle sont disposés de telle manière que l'axe de l'œuf passe par leur centre, par le centre de l'ovule, et réunit le pôle animal au pôle végétatif.

Un paragraphe est consacré à la description des sphères attractives définitives de la cellule-œuf. Particularité à signaler : le spermocentre intervient incontestablement dans la genèse de ces sphères, car la queue du spermatozoïde peut rester adhérente à l'une des moitiés issues de sa division, c'est-à-dire à l'une des deux sphères

attractives du premier fuseau de segmentation. L'auteur constate l'existence, dans certains ovules, au stade de la fécondation, d'un ovocentre dont il n'a pu déterminer le sort ultérieur.

Le chapitre V, intitulé : *La période de segmentation de l'œuf*, renferme la description de la structure du premier fuseau de segmentation, — partie chromatique et partie achromatique, — de son siège et de sa direction, des sphères attractives avec toutes leurs parties constituantes, situées aux deux pôles du fuseau. A cette description fait suite celle de la segmentation de l'œuf en deux, puis en trois blastomères. Un fait qui mérite de fixer l'attention, et sur lequel l'auteur insiste assez longuement, consiste en la présence, dans un des blastomères de certains œufs, de la queue du spermatozoïde. Nous ne pouvons pas nous arrêter ici aux considérations dans lesquelles entre Vander Stricht au sujet de cette présence; rappelons seulement cette remarque faite par lui que, si l'on parvenait à démontrer que, chez la Noctule, les deux premiers blastomères ont en réalité une valeur différente, ce fait viendrait à l'appui des résultats obtenus par Éd. Van Beneden pour l'œuf de Lapine.

Dans certains ovules, on constate la présence d'un noyau accessoire dans un des deux blastomères.

Lors de la division en trois, l'un des deux premiers blastomères se divise toujours avant l'autre; il est alors visiblement plus volumineux et son cytoplasme se fonce davantage sous l'influence des liqueurs osmiques. Suivent des considérations sur le siège du second fuseau de seg-

mentation, sur la direction du second plan de segmentation et sur la polarité des trois premiers blastomères.

Dans le sixième et dernier chapitre du mémoire, l'auteur énumère les *conclusions principales* auxquelles l'ont conduit ses recherches.

Le mémoire du Prof^r Vander Stricht était achevé à la date du 1er avril 1907. A la suite de certains incidents indépendants de la volonté de l'auteur, il n'a pu être publié; c'est ce qui explique l'addition d'un appendice dans lequel sont passés en revue les travaux assez nombreux, parus depuis lors, qui se rattachent à la question.

La lecture du mémoire du Prof^r Vander Stricht laisse une excellente impression. On reconnaît que ce mémoire, qui suppose de nombreuses, de délicates et de patientes recherches, est l'œuvre d'un embryologiste parfaitement préparé, par ses travaux antérieurs, à entreprendre l'important travail soumis à notre appréciation. Comme le prouvent les belles et démonstratives figures et photographies jointes au texte, l'auteur a pu disposer de préparations irréprochables, obtenues à l'aide des procédés de technique les plus perfectionnés. Il nous fournit ainsi la preuve de l'exactitude des faits sur lesquels il attire l'attention. Ce mémoire peut être considéré, sans conteste, comme constituant une contribution très importante à l'histoire de l'accroissement, de la maturation, de la fécondation et du début de la segmentation de l'œuf des mammifères. Aussi je n'hésite pas à pro-

poser à la Classe de voter l'insertion du travail du Prof^r Vander Stricht — texte et planches — dans les *Mémoires* in-4° de l'Académie. »

—

Rapport de M. Ch. Francotte, deuxième commissaire.

« Comme le dit, dans son rapport, notre savant Confrère M. Van Bambeke, la lecture du travail de M. Vander Stricht produit une excellente impression. Nous estimons que le mémoire qui est présenté à l'Académie constitue l'une des plus importantes contributions à l'étude de l'embryologie des mammifères qui aient été écrites. Nous nous rallions donc volontiers, et sans réserve, aux conclusions du premier commissaire qui propose à la Classe d'insérer le travail de M. Vander Stricht dans le recueil des *Mémoires* in-4°.

Nous désirerions, en outre, qu'il fût voté des remerciements à l'auteur du mémoire dont nous nous occupons à ce moment, si tel est l'avis de l'honorable premier commissaire. »

—

Rapport de M. Lameere, troisième commissaire.

« Je me rallie aux conclusions des rapports de mes savants confrères, MM. Van Bambeke et Francotte. » — Ces conclusions sont adoptées.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques; par Lucien Godeaux, étudiant en sciences physiques et mathématiques de l'Université de Liége.

Dans une des séances du IVe Congrès des mathématiciens, tenu à Rome du 6 au 11 avril 1908, M. D. Montesano s'est occupé de la détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques. Nous demanderons à l'Académie la permission d'exposer brièvement une méthode qui nous conduit à la solution de ce problème (*).

1. — Les coniques de l'espace sont en nombre ∞^8. Celles qui sont assujetties à cinq conditions engendrent un complexe.

Les caractéristiques d'un complexe de coniques sont, d'après M. Montesano (**) :

1° *Le nombre α de ses coniques situées dans un plan quelconque de l'espace;*

2° *La classe β du cône, lieu des plans des coniques du complexe passant par un point quelconque.*

Actuellement, nous nous proposerons de déterminer la nature des cinq conditions auxquelles sont assujetties

---

(*) Cette méthode est consignée dans un pli cacheté daté du 20 mars 1908. (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE [Classe des sciences], avril 1908.)

(**) *Una estensione del Problema della proïettivita a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette.* (ANNALI DI MATEMATICA, 1898, I_3, p. 322.)

les coniques des complexes de caractéristiques $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

2. — Une conique quelconque de l'espace peut être représentée par les équations

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$k_1a1_x^2 + k_2a2_x^2 + k_3a3_x^2 + k_4a4_x^2 + k_5a5_x^2 + k_6a6_x^2 = 0, \quad (2)$$

$a1_x^2, \ldots, a6_x^2$ étant les premiers membres des équations de six quadriques linéairement indépendantes.

Il suffit de remarquer qu'une quadrique passant par cinq points d'une conique la contient tout entière.

A une conique de l'espace correspond un système de valeurs des u et des k et un seul. Réciproquement, à un système (u, k) correspond une conique de l'espace.

Il y a exception pour les systèmes

$$(u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = 0,\ k)$$
$$(u,\ k_1 = 0, \ldots k_6 = 0),$$

qui doivent être écartés.

3. — Les paramètres des coniques d'un complexe sont fonctions de quatre variables homogènes $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$.

$$\rho u_i = f_i(\nu) \qquad (i = 1, \ldots 4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\sigma k_j = \varphi_j(\nu) \qquad (j = 1, \ldots 6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Les fonctions $f_i(\nu)$ et $\varphi_j(\nu)$ sont supposées respectivement de degrés m et n.

Pour que l'on ait $\alpha = 1$, il faut que, les $u_1, \ldots u_4$ étant donnés, les équations (3) fournissent un et un seul système de valeurs des $\nu_1, \ldots \nu_4$. Cela arrive en premier lieu pour $m = 1$.

Les équations (3) fourniront alors pour $\nu_1, \ldots \nu_4$ des fonctions linéaires de u_1, u_2, u_3, u_4. En substituant ces valeurs dans les équations (4), on trouvera

$$\sigma k_j = \psi_j(u) \qquad (j = 1, \ldots, 6),$$

les fonctions ψ étant de degré n.

4. — Une conique du complexe sera représentée par les équations

$$u_x = 0$$

$$\sum_{j=1}^{6} \psi_j(u) a_{jx}^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Si, dans ces équations, nous supposons les x constants et les u variables, elles représenteront généralement un cône de classe n.

Pour que la caractéristique β soit égale à l'unité, ces équations doivent représenter un faisceau de plans. Cela arrive en premier lieu lorsque n est égal à l'unité. Mais il peut se faire que l'équation (5) soit la n^{me} puissance d'une forme linéaire; dans ce cas, n est égal à 2 car les x ne peuvent entrer dans (5) qu'au second degré. Nous sommes donc amenés à considérer les deux cas où n est égal à 1, puis à 2.

5. — Dans le premier cas, l'équation (5) peut s'écrire

$$u_1 a_{1x}^2 + u_2 a_{2x}^2 + u_3 a_{3x}^2 + u_4 a_{4x}^2 = 0.$$

On peut diviser les complexes correspondant à cette équation en trois types :

Type I. — Les quadriques $a_{1x}^2 = 0, \ldots, a_{4x}^2 = 0$ sont linéairement indépendantes.

Le complexe est le lieu des intersections des qua-

driques d'un système linéaire triplement infini et des plans d'un espace projectif à ce système.

Le cas particulier où les quadriques ont même tétraèdre antopolaire a été considéré par M. Humbert (*).

Type II. — Les quadriques $a_{1x}^2 = 0, \ldots, a_{4x}^2 = 0$ appartiennent à un même réseau.

Le complexe est engendré par les intersections des quadriques d'un réseau et des plans d'un espace, le réseau et l'espace étant liés par une correspondance $(1, \infty)$.

Type III. — Les quadriques appartiennent à un même faisceau.

On pourrait considérer un quatrième cas où les quatre quadriques seraient identiques, mais ce cas serait dénué d'intérêt.

6. — Passons au complexe représenté par les équations symboliques

$$u_x = 0, \qquad u_\alpha^2 a_x^2 = 0.$$

La seconde de ces équations doit se réduire au carré d'une forme linéaire

$$u_\alpha a_x$$

quels que soient $u_1, \ldots u_4$. On en conclut que l'on a constamment

$$u_\alpha^2 a_x^2 \equiv (u_\alpha a_x)^2$$

et que l'on est ainsi ramené au cas précédent.

(*) *Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre.* (Journal de l'École polytechnique, 1894, LXIVe cahier.)

7. — Reprenons :

$$\rho u_i = f_i(\nu_1 \dots \nu_4) \qquad (i = 1, \dots 4)$$

$$\sigma k_j = \varphi_j(\nu_1 \dots \nu_4) \qquad (j = 1, \dots 6)$$

Les f_i sont supposées de degré m et les φ_j de degré n.

Supposons que les surfaces $f_i = 0$ (les ν étant les coordonnées courantes) aient en commun une courbe d'ordre p et q points fixes, et que, de plus, trois surfaces passant par cette courbe et ces points n'aient plus qu'un nouveau point commun. Alors le complexe est linéaire.

Pour qu'il soit de première classe, il faut que les surfaces

$$\sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 0, \quad \sum y_i f_i = 0$$

$$\sum . a_{jz}^2 . \varphi_j = 0$$

où les x et les y sont fixes, n'aient qu'un point variable commun.

Les deux premières ont en commun une courbe variable d'ordre $m^2 - p$ passant par les q points fixes respectivement $r_1, \dots, r_q$ fois et rencontrant h fois la courbe d'ordre p.

Supposons que la troisième surface passe s fois par la courbe d'ordre p et $s_1 \dots s_q$ fois par chacun des q points fixes. Il peut se faire que l'on ait :

$$(m^2 - p)n - hs - \sum_{i=1}^{q} s_i r_i = 1.$$

Liége, mai 1908.

De la formation exclusivement post-fœtale des œufs définitifs chez le chat (Communication préliminaire); par les Drs Hans von Winiwarter et G. Sainmont.

La question de savoir si, chez les mammifères, la production des œufs est limitée à la fin de la gestation et aux premières semaines de la vie extra-utérine ou bien si elle se poursuit pendant toute la période de l'activité sexuelle, n'est pas encore résolue. L'opinion prédominante admet que l'ensemble des ovules qui se différencient aux dépens des cordons corticaux ou tubes de Pflüger, pendant un laps de quelques semaines à quelques mois, représente l'unique et définitive réserve destinée à fournir les œufs pendant la vie entière de l'animal. D'autres auteurs, au contraire, et en premier lieu Paladino, concluent à une formation continuelle de nouveaux ovules, compensatrice de la destruction tout aussi continue des mêmes éléments issus de poussées antérieures.

Il faut reconnaître que jusqu'à présent aucune de ces théories n'a produit d'arguments décisifs pour ou contre la néoformation d'ovules. La raison en est double : d'abord l'étude systématique et complète du développement de l'ovaire, embrassant une série, sans lacunes, de stades embryonnaires et post-fœtaux, n'a pas encore été faite. Et, en second lieu, l'on manquait de signes distinctifs mettant en évidence l'œuf au moment de son apparition.

Or, l'un de nous, en 1900 (1), a montré que l'œuf des

(1) VON WINIWARTER, *Arch. de biol.*, t. XVII.

mammifères, pendant la période d'accroissement, subit une série de changements nucléaires caractéristiques qui permettent de reconnaître avec certitude l'oocyte *jeune* de toutes les autres cellules épithéliales de l'ovaire. En partant de ce principe, l'un de nous avait déclaré alors que la néoformation ne serait démontrée « que pour » autant que les prétendus ovules de nouvelle formation » montreraient les métamorphoses nucléaires caractéris- » tiques des premiers stades de développement de » l'ovaire (1) ».

Aujourd'hui, à la suite de nouvelles recherches sur l'organogenèse et l'ovogenèse de l'ovaire du chat, nous sommes en mesure de pouvoir affirmer qu'il y a *néoformation* d'ovules et sous la forme d'une poussée unique, préalable à la puberté du jeune animal.

Pour démontrer ce fait, nous prendrons comme point de départ l'ovaire d'une jeune chatte de quarante-cinq à cinquante jours. A ce moment, la zone corticale est épaisse et constituée d'une couche continue d'ovules dont la majorité est à l'état de follicules primordiaux. Entre le revêtement épithélial de l'ovaire et les tubes de Pflüger se trouve une albuginée plus ou moins nette, interrompue en quelques rares points par la continuité entre les deux formations épithéliales. Les noyaux ovulaires présentent les figures avancées de l'accroissement des oocytes et plus spécialement les stades synaptène, pachytène, diplotène et dictyé. Les premiers sont en minorité. En tout cas, on ne rencontre plus ni le type poussiéreux, ni deutobroque, tout au moins si l'on fait abstraction du

---

(1) Id., *Ibid.*, p. 77.

voisinage immédiat du hile de l'ovaire où la zone corticale est toujours un peu en retard sur le reste de la périphérie.

La zone corticale n'a pas encore fourni de follicules de de Graaf. Des formations analogues à celles-ci et qui remplissent une partie de la zone médullaire proviennent des cordons médullaires. Nous dirons de suite que l'ensemble des cordons médullaires et leurs dérivés, les follicules médullaires, sont destinés à périr et que déjà vers soixante-cinq jours il n'en subsiste virtuellement plus trace.

Au fur et à mesure que l'on examine des ovaires plus âgés (55, 59, 65, 68, 69, 74, 79, 81, 85, 86, 95, 110 jours, 3, 3 $^1/_2$, 4, 4 $^1/_2$, 5, 5 $^1/_2$ mois), on constate que la zone corticale subit un double changement.

D'une part, dans la profondeur se développent des follicules de de Graaf de plus en plus volumineux. Leur existence est éphémère; ils dégénèrent petit à petit suivant un mode un peu spécial, intermédiaire entre celui des follicules médullaires et l'atrésie typique.

D'autre part et d'une façon parallèle, la couche des follicules primordiaux diminue non seulement d'épaisseur, mais aussi de compacité. Les follicules ne sont plus aussi serrés les uns contre les autres. Entre eux se produisent des lacunes remplies d'amas ou de cordons de cellules épithéliales non différenciées.

La réduction de la couche des follicules primordiaux ne s'établit pas de la même manière dans tous les ovaires. Tantôt cette régression n'intéresse qu'un point plus ou moins étendu de la zone corticale et déjà, à faible grossissement, on constate qu'un secteur entier de cette zone ne renferme aucun ovule. Ce phénomène se rencontre de

préférence au début de la régression. Tantôt la périphérie tout entière subit une raréfaction progressive de petits follicules et une augmentation proportionnelle de cellules épithéliales ordinaires.

La régression des ovules se fait par dégénérescence du noyau combinée à celle du protoplasme qui se charge souvent de gouttelettes de graisse. Cette déchéance se traduit par des phénomènes fort intéressants qu'il serait trop long d'analyser. Nous nous bornerons à dire qu'ils aboutissent à la disparition complète de l'ovule, mais n'entament en rien les cellules folliculeuses qui persistent intactes sous la forme de cordons ou d'amas signalés plus haut.

Mais il y a plus : vers septante-quatre et quatre-vingt-un jours, l'activité de l'épithélium superficiel de l'ovaire reprend. On constate maintenant, plus souvent qu'aux stades antérieurs, l'apparition de bourgeons épithéliaux qui s'enfoncent dans l'albuginée et se perdent au milieu des amas des anciennes cellules folliculeuses. Ces bourgeons correspondent à ce que l'un de nous (von Winiwarter) a décrit chez le lapin sous le nom d'*invaginations épithéliales*. Chez le chat, elles ne sont guère aussi nombreuses ni aussi marquées, mais elles existent néanmoins et contribuent à former en dernière analyse, avec les anciennes cellules folliculeuses une couronne continue à la périphérie de l'ovaire, entièrement dépourvue d'ovules. C'est ce qui est réalisé dans les ovaires de trois mois et demi à quatre mois p. part.

Pourtant il convient de signaler des différences individuelles assez marquées. Nous possédons des ovaires de soixante-sept et soixante-huit jours où la zone corticale est notablement plus avancée dans son développement

que dans d'autres ovaires de la même époque ou même plus âgés. Nous signalons le fait parce que l'âge précis d'un ovaire ne détermine pas d'une façon absolument certaine la structure de sa zone corticale. En tout cas, il y a toujours alors concordance manifeste entre la régression des follicules primordiaux et les phénomènes dégénératifs des grands follicules de de Graaf de la profondeur. De sorte que, si l'on envisage toutes les parties constitutives de l'ovaire dans leur ensemble, la comparaison des stades conduit néanmoins à une évolution graduelle et régulière.

Or, au milieu des amas et cordons de cellules épithéliales apparaissent maintenant, et par petits groupes, des cellules à noyaux *poussiéreux* et *deutobroques*. Ces formes n'existaient plus depuis longtemps et, comme elles correspondent aux premières phases du développement des oocytes, il est évident qu'elles sont l'indice d'une nouvelle formation d'ovules. Ces noyaux augmentent de nombre et à côté d'eux surviennent bientôt des synapsis.

La néoformation progresse rapidement et vers quatre mois et demi à cinq mois la zone corticale renferme de nouveau une couche respectable d'ovules dont la plupart sont au stade de cordons doubles. Seul le hile, toujours plus tardif, montre quelques spécimens de noyaux poussiéreux et deutobroques.

Nous croyons avoir démontré que dans l'ovaire du chat non seulement toutes les formations médullaires, mais encore tous les ovules et follicules de la couche corticale primitive sont destinés à périr. Les œufs *définitifs* proviennent soit des cellules non différenciées de la seconde prolifération (tubes de Pflüger), soit des cellules de la troisième ou invaginations épithéliales. Il nous est

impossible, tout au moins morphologiquement, de distinguer les éléments appartenant à l'une ou à l'autre.

De plus, nous pensons que cette néoformation est la *seule* qui survienne au cours de l'évolution de l'ovaire du chat. Tous les autres organes plus âgés (chattes adultes, en gestation ou non) offrent une couronne continue de petits follicules, la plupart au stade diplotène, mais ne contenant aucun type précoce de la période d'accroissement. Aussi croyons-nous que les observations de Lane-Claypon (1), concluant à une néoformation périodique au cours de la gestation, sont sujettes à caution. D'ailleurs, cet auteur admet une origine commune des cellules interstitielles et folliculeuses, ce qui n'est plus soutenable aujourd'hui ; de plus, les types nucléaires qu'il rattache à la période d'accroissement des ovules ne nous paraissent répondre que très peu aux images caractéristiques que nous avons rencontrées dans l'ovaire du chat et du lapin.

(Laboratoire d'embryologie de l'Université de Liége. Liége, mai 1908.)

Action de corps solubles sur des corps insolubles (2); par W. Oechsner de Coninck et L. Arzalier.

Nous avons continué nos recherches en employant les sels insolubles de strontium. Nous avons placé, au fond d'une fiole, 1 molécule de carbonate de strontium pur, nous avons délayé ce sel dans une petite quantité d'eau,

(1) *Proc. Roy. Soc. London*, vol. LXXVII, 1905.
(2) Institut de chimie, Montpellier.

et enfin, nous avons ajouté une solution concentrée de chlorure de potassium (1 molécule). La fiole a été exposée à la fenêtre du laboratoire; elle était agitée circulairement de temps à autre, *mais elle n'a pas été soumise à l'action de la chaleur*, comme nous l'avions fait dans nos précédentes expériences avec les sels de baryum.

L'exposition a duré exactement quatre mois (du 29 janvier au 29 mai 1908). Au bout de ce temps, nous avons filtré une portion de la liqueur sur filtre double, et nous avons constaté que le filtratum précipitait, faiblement mais nettement, par le carbonate de potassium et par le carbonate d'ammonium. Le précipité a été recueilli sur filtre séparé, lavé avec soin, et analysé; c'était du carbonate de strontium.

Il y a donc eu double décomposition partielle entre le chlorure de potassium soluble et le carbonate de strontium insoluble, qui avait été primitivement employé.

Nous ferons connaître, par la suite, quelques résultats quantitatifs qui confirment pleinement nos conclusions d'aujourd'hui.

Montpellier, 31 mai 1908.

ÉLECTIONS.

La Classe procède, en comité secret, au remplacement de M. Lancaster comme membre titulaire de la Section des sciences mathématiques et physiques. Les suffrages se portent sur M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, déjà correspondant. Son élection sera soumise à la sanction royale.

Ont été élus associés de la même Section, MM. Oreste Chwolson, professeur à l'Université impériale de Saint-Pétersbourg, et sir James Dewar, de la Société royale de Londres.

OUVRAGES PRÉSENTÉS.

Bambeke (Ch. Van). Le recueil de figures coloriées de champignons délaissé par Fr. Van Sterbeek. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (43 p. et 4 pl.).

Schuyten (M.-C.). L'éducation de la femme. Paris, 1908; pet. in-8° (XIII-458 p.).

Fraipont (Charles). Les sablières du Sart-Tilman lez-Liége et excursion du 26 avril 1908. Liége, 1908; extr. in-8° (10 p.).

— Notes sur quelques fossiles du Calcaire carbonifère. Liége, 1908; extr. in-8° (8 p. et 1 pl.).

— Description d'un nouveau *Pteraspis* du Gedinnien belge et note sur un remarquable bouclier ventral de *Pteraspis Crouchi* (Lank) des schistes taunusiens. Liége, 1908; extr. in-8° (5 p. et 3 pl.).

Godeaux (Lucien). Les deux modes de génération de la surface cubique. Mons, 1907; extr. in-8° (3 p.).

— Sur une transformation géométrique du sixième ordre. Paris, 1908; extr. in-8° (4 p.).

— Un théorème sur les congruences de courbes. Paris, 1908; extr. in-8° (2 p.).

— Notes de géométrie. Liége, 1908; extr. in-8° (8 p.).

— Sur un mode de génération de la cubique gauche. Liége, 1908; in-8° (3 p.).

Vandevelde (A.-J.-J.). Ueber Anwendung von biologischen Methoden in der Nahrungsmittelchemie. Rome, 1906; extr. in-8° (5 p.).

— Sur l'appréciation de la toxicité des spiritueux à essences par la méthode hémolytique. Rome, 1906; extr. in-8° (12 p.).

— Over enzymenwerkingen. Malines, 1907; extr. in-8° (6 p.).

— Recherches sur les hémolysines chimiques. Gand, 1908; extr. in-8° (8 p.).

De Waele (H.) et Vandevelde. Kan het bestaan van eene antikatalase bewezen worden?

Stroobant (Paul). La distribution des étoiles par rapport à la Voie lactée, d'après la Carte et le Catalogue photographiques du Ciel. Bruxelles, 1908; in-4°.

Bruxelles. *Société d'anthropologie.* Bulletins et Mémoires, tome XXV, 1906.

Gand. *Vlaamsch natuur- en geneeskundig Congres.* Handelingen van het Congres gehouden te Aalst in 1905.

Handelingen van het Congres gehouden te Brugge in 1906, 1ste en 2de deel. In-4°.

—

Duesberg (J.). Les divisions des spermatocytes chez le rat. Leipzig, 1908; extr. in-8° (50 p. et 1 pl.).

—

Schaeberle (J.-M.). The Earth as a heat-radiating planet. Philadelphie, 1908; extr. in-8° (3 p.).

—The infaillibility of Newton's law of radiation at known temperatures. Ann Arbor, 1908; extr. in-4° (2 p.).

Ballard (James). The Boston medical library. Its past, present and future. Boston, 1908; extr. in-8° (9 p.).

See (T.-J.-J.). The new theory of earthquakes and mountain formation, as illustrated by processes now at work in the depths of the sea. Philadelphie, 1907; extr. in-8° (48 p., cartes).

BALTIMORE. *Maryland geological Survey.* Calvert county. 1907; in-8°.

— St-Mary's county. 1907; in-8° avec cartes.

—

FRANCE.

Chauveau (A.). Notice nécrologique sur M. Janssen, membre de l'Académie. — Funérailles. Paris, 1907; in-4° (22 p.).

Poincaré (Henri). Une lettre du journal « Le Temps » sur le IVe Congrès international des mathématiciens. Palerme, 1908; extr. in-8° (4 p.).

de la Goupillière (Haton). Note sur les axes principaux du temps de parcours. Paris, 1908; extr. in-4° (18 p.).

Rivière (Émile). Congrès préhistorique de France, 1905. Discours d'inauguration. — Mes fouilles dans la Dordogne, etc. Le Mans, 1906; extr. in-8° (16 p.).

— Curiosités sur l'histoire de la médecine. Paris, 1906; extr. in-8° (22 p.).

— Trente-sept années de fouilles préhistoriques et archéologiques en France et en Italie. Paris, 1906; extr. in-8° (28 p.).

Jeannel (M.). De l'ostéotomie longitudinale. Paris, 1888; extr. in-8° (8 p.).

— Contribution à l'étude des tumeurs du rein infiltrées dans le mésentère. Paris, 1886; extr. in-8° (12 p.).

— Laparotomies pour affections non néoplasiques des annexes de l'utérus. Paris, 1891; extr. in-8° (8 p.).

BORDEAUX. *Société d'anatomie et de physiologie.* Bulletins, t. XXVIII, 1907.

CETTE. *Station zoologique*. Travaux, 2e série, mémoire n° 16 : La fécondation chez la Serpule, par Albert Soulier. 1906; in-8°.

ABBADIA. *Observatoire*. Observations, tome VI. 1907; in-4°.

—

LONDRES. *Entomological Society*. Transactions, 1907.

Lockyer (Sir Norman). On the observation of Sun and stars made in some british stone circles, third note : The Aberdeenshire circles. Londres, 1908; extr. in-8° (5 p.).

—

Borredon (G.). Excelsior o la soluzione dell' immenso problema dell' ignoto. La Luna è la calamita del mondo, ovvero la falsità del sistema di Newton e la scoperta del vero sistema del mondo. Naples, 1906; in-8° (XIII-114 p.).

Rajna (M). Osservazioni meteorologiche dell' annata 1906. Bologne, 1907; in-4° (31 p.).

—

Verbeek (K.-D.-M.) Rapport sur les Moluques. Reconnaissances géologiques dans la partie orientale de l'archipel des Indes Orientales néerlandaises. Batavia, 1908; vol. in-8° avec atlas (XLVI-844 p.).

Teubner (B.-G.). Teubner's Verlag auf dem Gebiete der mathematik Naturwissenschaften Technik nebst Grenzwissenschaften. Leipzig, 1908; in-8° (CXXXII-392-92 p.).

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — N° 7.

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 4 juillet 1908.

M. Julien Fraipont, directeur.

M. le chevalier Edm. Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. J. Deruyts, *vice-directeur;* C. Malaise, F. Plateau, Ch. Van Bambeke, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, M. Mourlon, P. De Heen, C. le Paige, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Jorissen, Ch. Francotte, Paul Pelseneer, A. Gravis, G. Cesàro, Ch.-J. de la Vallée Poussin, *membres;* F. Swarts, Th. Durand, A. Demoulin, A. Rutot, V. Willem et Alex. de Hemptinne, *correspondants.*

MM. Éd. Van Beneden et Louis Henry ont motivé leur absence.

En ouvrant la séance, M. le Directeur adresse à M. Ch.-J. de la Vallée Poussin le compliment d'usage au sujet de son élection de membre titulaire. — Des applaudissements accueillent ces paroles ainsi que les remerciements de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin.

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts transmet une expédition de l'arrêté royal du 22 juin qui approuve l'élection de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin en qualité de membre titulaire.

Le même Ministre fait savoir que le Gouvernement belge est invité à se faire représenter au Congrès international de pêche qui se tiendra à Washington du 22 au 26 septembre. Il exprime le désir de savoir si parmi les membres de l'Académie, il s'en trouve qui désirent être délégués officiellement à cette réunion. Cette délégation aura un caractère purement honorifique. — Aucun membre ne s'est fait inscrire.

— M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, élu membre titulaire, ainsi que M. Chwolson et Sir James Dewar, élus associés de la Section des sciences mathématiques et physiques, remercient pour leur élection.

— La Classe accepte le dépôt dans les archives de l'Académie des billets cachetés envoyés :

1° Par M. Ch. Lagrange (annexe au billet déposé dans la séance du 6 juin 1908);

2° Par M. Lucien Godeaux (Sur les congruences linéaires des cubiques gauches, note B).

— Hommages d'ouvrages :

1° *Considérations sur la genèse du névraxe, spécialement sur celle observée chez le Pélobate brun;* par Charles Van Bambeke;

2° *Compte rendu sommaire de l'excursion géologique à Forest lez-Bruxelles, le 29 mars 1908;* par M. Mourlon;

3° *Sur l'étendue du Famennien de la Montagne de Froide-Veau (Dinant) et ses conséquences pour l'exploitation des carrières à pavés;* par le même;

4° *Expédition antarctique française (1903-1905). Géographie physique; glaciologie; pétrographie;* par Ernest Goudron, géologue de l'Expédition, attaché au Museum d'histoire naturelle de Paris.

— Remerciements.

— La Classe renvoie à l'examen de MM. Swarts, Cesàro et de Hemptinne un manuscrit de MM. George De Voldere, ingénieur, répétiteur de chimie industrielle et de chimie analytique à l'Université de Gand, et Guillaume De Smet, ingénieur : *Sur la théorie des gaz analysables par combustion.*

Prix Louis Melsens.

CHIMIE OU PHYSIQUE APPLIQUÉES.

Deuxième période (1er juillet 1904-30 juin 1908).

Aux termes de la fondation, ce prix, d'une valeur de 1,720 francs pour la période actuelle, est destiné à l'auteur belge qui aura soumis au jugement de l'Académie

un ouvrage remarquable se rapportant à la chimie ou à la physique appliquées.

A la date du 30 juin dernier, aucun ouvrage n'était parvenu au secrétariat en vue de prendre part au concours.

—

PROPRIÉTÉ LITTÉRAIRE ET ARTISTIQUE.

M. Mourlon donne lecture de son rapport sur les documents soumis par le Gouvernement au sujet de la question de la propriété littéraire et artistique dont s'occupera le Congrès de Berlin au mois d'octobre prochain.

La Classe, après avoir remercié M. Mourlon, vote l'impression de ce document et sa communication aux membres en vue de son adoption dans la réunion mensuelle du 1er août.

RAPPORTS.

—

M. Julien Delaey, fabricant à Watermael, soumet le croquis d'un aviateur. — Dépôt aux archives.

—

Centres des moyennes distances de groupes de points sur une courbe gauche; par M. Stuyvaert.

Rapport de M. A. Demoulin, premier commissaire.

« Dans la première partie de ce travail, M. Stuyvaert envisage, sur une courbe unicursale C_n d'ordre n, une involution d'ordre m et de rang un, et il se propose de déterminer le degré de la courbe Γ décrite par le centre

des moyennes distances des points d'un groupe variable de cette involution.

La courbe Γ est unicursale et son ordre est, en général, égal à n. Pour que cet ordre s'abaisse d'une unité, il faut et il suffit qu'un groupe de l'involution possède, à l'infini, ou bien deux points simples ou bien un point double.

L'étude du cas où le degré de Γ s'abaisse de deux unités est plus délicate. Cette circonstance se présente : 1° lorsqu'il existe deux groupes de l'involution jouissant d'une des propriétés indiquées plus haut; 2° lorsque trois points de C_n, situés à l'infini, appartiennent à un même groupe de l'involution; 3° lorsque C_n touche le plan de l'infini en deux points appartenant à un même groupe.

J'ajoute qu'on suppose la courbe dépourvue de singularités à l'infini.

M. Stuyvaert signale ensuite un fait remarquable. Par analogie avec ce qui se passe dans le cas où le degré de Γ s'abaisse d'une unité, on pourrait croire qu'un groupe de l'involution possédant à l'infini un point simple et un point double exerce la même influence qu'un groupe possédant trois points simples à l'infini. Il n'en est rien cependant. Pour que le degré de Γ s'abaisse de deux unités, il faut que le groupe considéré possède un troisième point à l'infini. A la vérité, la méthode qui a conduit M. Stuyvaert à ce résultat prête à objection, mais depuis l'envoi de son travail, il est parvenu à l'établir en toute rigueur et il a consigné sa démonstration dans une note de cinq pages que j'ai l'honneur de présenter à la Classe.

L'étude de tous les cas où le degré de Γ s'abaisse de i unités ($i > 2$) serait très compliquée; aussi M. Stuyvaert

se borne à indiquer que cette réduction a lieu quand il existe un groupe de l'involution possédant $i + 1$ points à l'infini. Il fait observer, en outre, que les réductions dues à des groupes distincts de l'involution s'additionnent.

L'auteur applique ensuite les résultats ci-dessus aux coniques, aux cubiques gauches, aux quartiques rationnelles, aux courbes unicursales les plus générales, et obtient un grand nombre de théorèmes intéressants, connus ou nouveaux.

Dans la seconde partie de son travail, beaucoup plus courte que la première, M. Stuyvaert envisage une classe étendue de courbes algébriques, qui comprend notamment toutes les courbes gauches intersections complètes de deux surfaces, et il établit à l'égard de ces courbes un théorème analogue à celui qu'il a démontré au début de la première partie.

J'ai l'honneur de proposer à la Classe l'insertion au *Bulletin* de la séance du mémoire de M. Stuyvaert et de la note dont j'ai parlé plus haut, et de renvoyer à l'auteur ses deux manuscrits afin de lui permettre d'incorporer la note dans le mémoire. »

M. Neuberg se rallie volontiers, dit-il, aux conclusions du savant premier commissaire. — Adopté.

—

Sur un alliage de thorium et de nickel; par Ed. Chauvenet.

Rapport de M. W. Spring.

« L'auteur a traité du chlorure de thorium par du lithium, dans un vase de nickel, dans l'espoir de libérer le thorium; il a constaté la formation d'un alliage de

thorium et de nickel dont il fait connaître la composition et les principales propriétés.

J'ai l'honneur de proposer l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Biréfringence de l'Adulaire, de la Sanidine, de la Thomsonite, de la Willémite, de la Microsommite et de la Thomsénolite; par G. Cesàro, membre de l'Académie.

Adulaire. — En usant sur une même lame de verre des fragments de clivage *p* d'adulaire avec des fragments d'autres substances, dans le but de déduire la biréfringence de celles-ci de celle de l'adulaire, j'obtenais des résultats toujours supérieurs à ceux que donnait la mesure effectuée sur une lame non adhérente au verre et dont l'épaisseur était mesurée directement. J'ai été amené par là à vérifier si la biréfringence de l'adulaire est bien celle que l'on obtient par la soustraction des indices classiques :

n_g	n_m	n_p	B
1,5260	1,5237	1,5190	7
1,5243	1,5223	1,5181	6,2

La biréfringence du clivage *p* diffère peu de la biréfringence maxima, vu que le clivage fait avec le plan des

axes optiques un angle $\alpha = 5°$: on a approximativement, pour $B = 7$,

$$X_p = B(1 - \cos^2 V \sin^2\alpha) = B - (n_m - n_p)\sin^2\alpha$$
$$= B - 4{,}7 \sin^2 5° = 6{,}9643 \text{ (*)}.$$

La mesure a été effectuée sur quatre lames épaisses, provenant de deux échantillons différents :

Première lame. $e = 33{,}5$. Retard obtenu en amenant, par soustraction, les deux violets sensibles : 171,5 et 170,5 ; d'où :

$$X_p = \frac{171}{33{,}5} = 5{,}104.$$

Deuxième lame.

$$e = 30{,}8 ; \quad R = 161{,}5 \text{ et } 161{,}7 ; \quad X_p = \frac{161{,}6}{30{,}8} = 5{,}237.$$

Troisième lame. $e = 39{,}5$. Retard obtenu par trois méthodes différentes :

$$R = 202{,}4,\ 206{,}4 \text{ et } 208{,}2 ;$$

d'où

$$X_p = 5{,}12,\ 5{,}23 \text{ et } 5{,}27.$$

(*) La formule exacte

$$X_p = n_g - \frac{n_m n_p}{\sqrt{n_m^2 \cos^2\alpha + n_p^2 \sin^2\alpha}},$$

donne identiquement le même résultat.

Quatrième lame.

$$e = 78,5;\ R = 420,2;\ X_p = 5,352\ (*).$$

*
* *

Sanidine du Vésuve. — L'orthose vitreux du Vésuve paraît avoir une biréfringence assez bien inférieure à celle de l'orthose vitreux de Wehr déduite des expériences de Des Cloizeaux :

	n_g	n_m	n_p	n_g-n_p	n_g-n_m	n_m-n_p
Rayons rouges :	1,5240	1,5259	1,5170	7	0,1	6,9
Rayons bleus :	1,5356	1,5355	1,5265	9,1	0,1	9

Les petits cristaux du Vésuve, aplatis suivant g^1, sont ordinairement maclés suivant le mode de Carlsbad et par conséquent ne s'éteignent pas entre les nicols croisés, leurs ellipses de section étant croisées à 42°14'. Dans les cristaux simples, la direction d'extinction négative de g^1 se trouve, comme d'ordinaire, à + 5° du clivage p; mais il est impossible de décider, par l'apparence optique et par la biréfringence de g^1, si l'indice normal à cette face est n_m ou n_g; d'ailleurs le tableau

(*) Sans vouloir discuter si les résultats obtenus au microscope, par compensation, comparaison de teintes, ou réduction à un violet sensible, sont plus probants que ceux obtenus par soustraction des indices, il est certain que lorsqu'il s'agira de chercher au microscope la biréfringence d'un corps par comparaison avec celle de l'adulaire, il faudra adopter pour cette dernière 5,2 et non 7.

ci-dessus montre que la sanidine doit se comporter approximativement comme un uniaxe de révolution autour de n_p. Mais lorsqu'on parvient à placer l'un de ces petits cristaux sur une face m, on constate que le P. A. O. est transversal à l'arête mm et, par conséquent, normal à g^1. L'orientation est la même en lumière rouge et en lumière bleue, contrairement à ce qui arrive pour l'orthose de Wehr. (*Des Cloizeaux*, p. 332.) La biréfringence de g^1 a été mesurée dans trois cristaux d'épaisseur très différente :

Premier cristal :

$$e = 14;$$

par compensation : $R = 58,4$; d'où : $n_m - n_p = 4,2$;
par réduction à v_1 : $R = 59,6$; d'où : $n_m - n_p = 4,3$.

Deuxième cristal :

$$e = 27,8;$$

par compensation : $R = 120,2$; d'où : $n_m - n_p = 4,3$.

Troisième cristal (*) :

$$e = 39,3;$$

par réduction à v_1 : $R = 183,2$; d'où : $n_m - n_p = 4,7$;
par réduction à v_2 : $R = 183,1$; d'où : $n_m - n_p = 4,7$;
par compensation, en lumière rouge : $R = 180,7$; d'où : $n_m - n_p = 4,6$; par compensation, en lumière bleue : $R = 184,2$; d'où : $n_m - n_p = 4,7$.

(*) Cristal très net, ayant pour notation $pg^1mb^{1/2}a^{1/2}a^1$.

On peut adopter comme moyenne

$$n_m - n_p = 4,5.$$

*
* *

Thomsonite. — Cette zéolite est caractérisée par sa forme dérivant d'un prisme orthorhombique presque cubique, par la facilité de son clivage g^1, par le fait que la bissectrice aiguë, positive, est précisément perpendiculaire à ce clivage et qu'en outre le plan des axes optiques est horizontal.

Formes appartenant à la zone verticale. — J'ai signalé le prisme

$$g^{19} = 9.10.0 \quad (*)$$

dans des cristaux lamellaires du Mont Somma; la singularité de cette notation m'a amené à étudier la zone verticale dans des thomsonites d'autres localités, mon but étant surtout de vérifier l'angle du prisme pris pour primitif par les auteurs. Effectivement, il existe dans certains cristaux un prisme vertical dont l'angle diffère peu de 90°, mais ses faces donnent des images peu nettes et quelquefois multiples. Au contraire le prisme d'environ 95° (g^{19}), que j'ai retrouvé dans les cristaux de Bohême, fournit de bonnes mesures quoique assez variables d'un cristal à l'autre. L'existence des prismes verticaux de 90° et 95° dans la même substance est peu probable; je pense que le prisme de la thomsonite est celui de 95°,

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 1897, p. 334.

les faces à 90° appartenant à deux cristaux groupés à angle droit autour de la verticale, à moins que l'on ne confonde sous le nom de thomsonite deux substances très voisines. Les cristaux que je possède ne m'ont pas encore permis de résoudre la question. Voici quelques détails sur les cristaux étudiés :

Tyrol (*Buffler-Loch*). — Lamelles g^1 analogues à celles du Somma (*) et souvent, comme ces dernières, amincies vers p dans la zone pg^1. Quelques lamelles montrent une terminaison déterminable au microscope (fig. 1) : $b^{1/2}$ coupant m suivant une horizontale, l'arête $b^{1/2}$ $b^{1/2}$ culminante antérieure à 45° de la verticale et e^1 tronquant l'arête $b^{1/2}b^{1/2}$ latérale. Sur une lamelle on a mesuré : $\widehat{mm} = 90°$ environ.

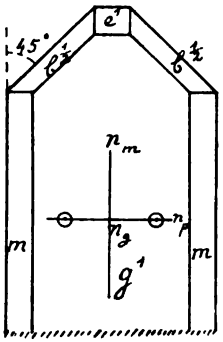


Fig. 1.

Somma. — Avec phillipsite. Cristaux carrés : ph^1g^1 avec légères troncatures m, faiblement allongés suivant la verticale, presque transparents; par miroitement on voit que la base porte des ondulations formant des stries parallèles à h^1. Mesuré : $\widehat{mg^1} = 45°14'$ à $45°34'$.

Iles des Cyclopes. — Avec analcime. Cristaux semblables aux précédents, avec allongement vertical plus marqué et

(*) *Loc. cit.*, p. 335, fig. 9.

tendance au groupement en gerbes. Un cristal très net donnait pour une face *m* deux images à quelques degrés l'une de l'autre, ce qui pourrait indiquer la présence simultanée des deux prismes, ou bien l'existence du groupement dont il a été parlé plus haut.

L'image à travers g^1 en lumière convergente paraît régulière, mais cela pourrait s'expliquer par le fait que l'un des cristaux formant l'assemblage serait très prépondérant; effectivement, sous une vive lumière, la base paraît formée de plages très inégales, celles qui s'appuient sur ses petits côtés ne se rejoignant pas à travers le cristal principal.

Bohême (*Kaaden*). — Cristaux rectangulaires aplatis suivant g^1. En désignant par $s = hk0$ la face prismatique, on a mesuré l'angle sh^1 dans trois cristaux, et calculé $\frac{k}{h}$ en partant de

$$\log a = \overline{1},9970560 :$$

sh^1	$\frac{k}{h}$
47°52′	$1,112947 = 1, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \ldots$
47°22′ 47°24′	$1,09425 = 1, \frac{11}{10}, \frac{12}{11}, \frac{23}{21}, \ldots$
Somma (*) : 47°41′	$1,105814 = 1, \frac{10}{9}, \frac{21}{19}, \ldots$

(*) *Loc. cit.*, p. 335.

Lorsque la face verticale s'approche beaucoup de m, sa notation devient plus ou moins indéterminée, si les mesures ne sont pas susceptibles d'une grande précision; ainsi, le tableau qui précède montre que $9.10.0 = g^{19}$ convient au cristal du Somma et encore mieux au premier cristal de Bohême, tandis que pour les deux derniers cristaux de cette localité il faudrait recourir à $10.11.0 = g^{21}$, ou à (*) $11.12.0 = g^{23}$.

Quelques cristaux, ordinairement les plus volumineux, présentent le prisme dont l'angle est de 90° à 91°.

Biréfringence de la Thomsonite. — *Iles des Cyclopes.* — Le cristal dont il a été parlé à propos de la zone verticale, épais d'environ 1 millimètre, se prêtait très bien à la mesure de $n_m - n_p$, l'une de ses faces g^1 étant parfaitement plane et sans la moindre aspérité. En lumière rouge convergente on voit la ligne 4λ ($\lambda = 62,8$) passer approximativement au centre du champ; d'où $R = 251,2$; et comme $e = 97$, on voit que la valeur approximative de la biréfringence de g^1 est 2,6. Une mesure exacte en lumière parallèle, par descente à v_1, m'a donné $R = 271$; d'où

$$n_m - n_p = 2,8.$$

(*) De nouvelles mesures que je viens d'effectuer sur un grand nombre de cristaux m'ont donné pour $\widehat{sh^1}$ de 47°19′ à 47°27′. Un cristal parfait, petite table carrée de base g^1, terminée par les deux faces p, portant h^1 à une extrémité de l'axe x et à l'autre extrémité le biseau ss', m'a donné pour l'angle de ce biseau 94°53′ par des mesures qui peuvent être exactes à quelques minutes près. Le prisme devrait donc être noté $g^{21} = 10.11.0$, avec $g^{21}g^{21}$ sur $h^1 = 95°4'$.

Tyrol (*Buffler-Loch*). — Deux lamelles ont été examinées :

e	$R_q - R$	R	$n_m - n_p$
12	57,5	36,4	3
»	112,8	36,5	3
9,5	57,5	28,6	3
»	112,8	26,6	2,8

Bohême (*Kaaden*). — *Lamelles de clivage* g^1 *de différentes épaisseurs :*

e	R	$n_m - n_p$.
15	41-40,5	2,7
18	49,2-47,9	2,7
21	65,9	3,1
35	97,8	2,8
45,3	137,5	3,0
55	184,3	3,4

Cristaux non clivés ou légèrement dégrossis sur g^1 *par polissage :*

Les cristaux de Bohême présentent presque toujours la particularité suivante : les faces g^1 examinées à la loupe paraissent parfaitement planes et donnent une image nette par réflexion; mais, au microscope, la lame paraît formée (fig. 2) de quatre plages séparées par des lignes à 45° de la verticale. Les séparations s'accentuent en lumière polarisée : si la lame est suffisamment mince pour montrer des couleurs de polarisation franches, celles-ci sont plus basses pour les plages A et B qui s'appuient sur *p*, que pour les deux autres; si la lame est épaisse et que l'on y fait apparaître des teintes de polarisation en lui soustrayant du retard à l'aide d'un biseau de quartz, les violets sensibles, puis la teinte noire de compensation, envahissent, presque simultanément, d'abord l'ensemble AB, puis l'ensemble CD.

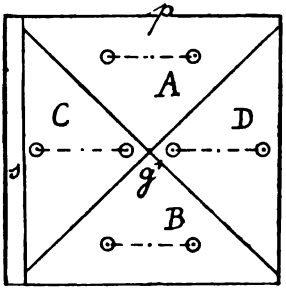


Fig. 2.

Il ne s'agit pas d'un groupement par rotation de 90° autour de la normale à g^1, dans lequel les plans de jonction seraient a^1 (*), parce que, d'abord l'orientation optique est la même dans les quatre plages, et ensuite la différence de teinte de polarisation n'aurait aucune raison d'être. On pourrait expliquer cette dernière différence par l'existence de trémies internes, mais la variation de la biréfringence même de AB à CD paraît trop accentuée

(*) $pa^1 = 45°23'$.

pour que l'explication soit plausible. J'ajoute que l'angle axial est aussi assez différent. Le tout se passe comme si l'on avait affaire au groupement de deux substances différentes, ayant des propriétés très voisines. La figure axiale n'est bien nette que loin des lignes qui séparent les plages; au voisinage de ces lignes elle devient confuse et les hyperboles disparaissent.

Le tableau qui suit résume les observations faites sur une belle et grande lame (fig. 2) à peine dégrossie sur ses faces g^1; l'épaisseur, un peu variable, a été mesurée aux points mêmes où le retard et l'angle axial avaient été mesurés :

Plages	e	R	$n_m - n_p$	2E
A	65	171,3	2,6	78°
B	56,5	143,5	2,5	77°
C	61,5	195,3	3,2	86°
D	59,5	195,2	3,3	86°

Lorsqu'on observe l'une des plages CD en lumière convergente rouge ($\lambda = 62,8$), on voit que la lemniscate 3λ ($R = 188,4$) passe sensiblement au centre du champ; si alors on fait glisser la lame de manière à amener l'une des plages AB sous l'objectif, on voit la lemniscate 3λ s'écarter de la ligne des pôles en montrant que le retard

au centre est alors compris entre 2λ et 3λ. Ceci confirme les résultats obtenus ci-dessus en lumière parallèle.

Biréfringence de h^1 : $n_g - n_m$. — J'ai effectué deux mesures, la première sur un cristal clivé suivant h^1, l'autre sur une lame usée en même temps qu'un clivage p d'adulaire :

Cristal : e = 39,5. — En lumière convergente blanche on n'aperçoit pas de figure d'interférence, mais en lumière rouge cette figure est nette : trois lemniscates dont une passant près du centre du champ ; en opérant avec le biseau de quartz épais, pour amener la ligne (*) de retard λ au centre, il a fallu soustraire 298,6, ce qui donne, pour le retard au centre, 361,4. Une mesure exacte en lumière parallèle, en amenant la teinte v_2, a donné R = 374,1 ; d'où

$$n_g - n_m = 9,5.$$

Lame mince. — On a obtenu pour le retard

$$R = 48,4 \qquad 48,3 \qquad 47,7; \qquad 48,1$$

et, pour le retard de la lame p d'adulaire,

$$R_a = 25,5 \qquad 26,1; \qquad 25,8;$$

d'où, en adoptant le nombre 5,2 pour la biréfringence de l'adulaire (**),

$$n_g - n_m = \frac{R \times 5,2}{R_a} = 9,7.$$

(*) On reconnaît cette ligne en l'examinant en lumière blanche : elle précède la ligne noire de compensation; dans notre cas celle-ci ne pouvait être amenée au centre.

(**) Si au lieu de 5,2 on adoptait le chiffre classique 7, on obtiendrait $n_g - n_m$ = 13,11

Biréfringence de p. — Pour la biréfringence proprement dite on devrait obtenir la somme des nombres obtenus pour g^1 et h^1, c'est-à-dire de 12,1 à 13; l'expérience directe m'a donné un nombre un peu plus fort.

$$R = 206{,}5 \qquad 202{,}8 \qquad 204{,}3; \qquad e = 15;$$

d'où

$$n_g - n_p = 13{,}6.$$

En estimant les biréfringences à une unité près (*), on peut adopter l'un des deux ensembles :

$$\left.\begin{array}{lll} n_m - n_p = 3, & n_g - n_m = 10, & n_g - n_p = 13; \\ n_m - n_p = 3, & n_g - n_m = 11, & n_g - n_p = 14. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Résultats obtenus par Des Cloizeaux. — L'illustre minéralogiste français n'indique dans son Manuel que deux données relatives à la thomsonite de Bohême :

$$n_m = 1{,}503 \qquad 2V = 53°50'. \quad (**) \qquad (2)$$

Les ensembles (1) conduisent respectivement, en adoptant la valeur de n_m obtenue par Des Cloizeaux, à 57°44′ et 55°29′.

Pour tenir compte des données (2), calculons la biréfringence en joignant à celles-ci $\delta = n_m - n_p$ pour

(*) C'est-à-dire les différences des indices à un millième près.

(**) L'un des nombres que nous avons obtenus pour l'angle axial, 2E = 86°, correspond à 2V = 53°58′.

laquelle nous avons trouvé une valeur comprise entre 2,5 et 3,4. De la formule approchée (*)

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{a \quad b}{b - c}$$

on tire c, puis $n_g = \frac{1}{c}$ et l'on obtient

$$B = n_g - n_p = \frac{(n_m - \delta)\delta}{n_m \sin^2 V - \delta};$$

dans notre cas,

$$n_m \sin^2 V = 0{,}308013$$

et

$$B = \frac{1503 - \delta}{308{,}013 - \delta}\,\delta,$$

formule dans laquelle δ est à remplacer directement en millièmes. Par l'application de cette formule on forme le tableau suivant :

$n_m - n_p = 2$	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3	4
$n_g - n_m = 7{,}8$	9,8	10,2	10,6	11,0	11,4	11,8	15,7
$n_g - n_p = 9{,}8$	12,3	12,8	13,3	13,8	14,3	14,8	19.7.

Un quelconque de ces ensembles, joint à $n_m = 1{,}503$, donnera très approximativement le 2V obtenu par Des Cloizeaux; il nous reste à choisir dans ce tableau l'ensemble qui concorde le mieux avec nos résultats. On

(*) Par l'emploi de la formule exacte, on peut vérifier que les résultats sont très approchés; ainsi, pour $n_m - n_p = 2{,}8$, $n_g - n_m = 11$, on arrive à $2V = 53°52'$, tandis qu'en prenant 3 et 11, il vient $2V = 55°29'$.

voit que le quatrième convient déjà bien, mais que le cinquième et le sixième, qui s'identifient lorsqu'on les écrit en nombres entiers (3 — 11 — 14), conviennent mieux pour écrire les indices avec trois décimales. On arrive ainsi au second ensemble indiqué en (1) et aux indices

$$n_g = 1,514 \qquad n_m = 1,503 \qquad n_p = 1,500.$$

Biréfringence de la thomsonite d'Écosse. — Masses bacillaires pouvant fournir de belles lames g^1 parfaitement transparentes. Les résultats sont à peu près les mêmes que pour la thomsonite de Bohême.

Biréfringence de g^1. — Lame dont l'épaisseur est d'environ 1 millimètre, à peine dégrossie et polie. On a obtenu :

$$2E = 82^\circ, \qquad e = 94, \qquad R = 243;$$

d'où

$$n_m - n_p = 2,6.$$

Le résultat peut être vérifié en lumière convergente rouge : le centre du champ se trouve entre les lemniscates 3λ et 4λ, très proche de cette dernière; on en conclut que le retard est un peu inférieur à $4 \times 62,8 = 251,2$.

Biréfringence de p. — Section normale à l'allongement des aiguilles.

Première lame (détachée) :

$$e = 17; \qquad R = 214,4 \text{ à } 218; \qquad n_g - n_p = 12,7.$$

Deuxième lame (avec adulaire) :

$$R = 252,3; \quad R_a = 90,3; \quad n_g - n_p = 13,4.$$

Troisième lame (avec adulaire) :

$$R = 50,5; \quad R_a = 19,7; \quad n_g - n_p = 13,3.$$

* * *

Valeur de Δ (*) *dans la Thomsonite de Bohême.* — Des indices

$$n_g = 1,514 \qquad n_m = 1,503 \qquad n_p = 1,500,$$

on déduit

$$a = 0,666667 \qquad b = 0,665336 \qquad c = 0,660502$$

et

$$\Delta = 2b - (a + c) = 35 \text{ dix-millièmes.}$$

Une lame p d'épaisseur 15, comparée à une lame de gypse d'épaisseur 35,8 (**), doivent donner, sous l'action du même biseau de quartz, des rejets liés par la relation

$$\frac{y_t}{y_g} = \frac{(\Delta \,.\, e)_g}{(\Delta \,.\, e)_t} = \frac{21.5 \times 35,8}{35 \times 15} = 1,466.$$

Avec mon appareil et mon biseau, la lame de gypse

(*) Voir *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 1907, p. 671.

(**) *Loc. cit.*, pp. 676 à 678.

donne un rejet d'environ 2,5 divisions du micromètre de la loupe Klein ; d'où

$$y_1 = 3,7;$$

ce qui se vérifie d'une façon satisfaisante.

*
* *

Willémite. *Moresnet.* — Des propriétés optiques de ce minéral, je ne vois indiqué dans Dana que le signe (+). Voici quelques mesures donnant la biréfringence; la première expérience a été effectuée sur un cristal laissé intact, les autres sur des lames verticales :

	e	R	$n_g - n_p$
Cristal	10	256.7	25,7
Première lame. .	8,1	221.7	27,4
Deuxième lame . .	9.5	264	27,8
Troisième lame . .	8,7	222.7	25,6

On peut adopter, en moyenne :

$$n_g - n_p = 27.$$

J'ai aussi cherché la valeur approximative de l'indice

moyen, par la double mise au point, dans un cristal poli suivant deux faces verticales parallèles, ayant environ un demi-millimètre d'épaisseur; les épaisseurs vraies et apparentes (e') ont été mesurées en plusieurs points de la lame. Les cristaux de willémite sont toujours plus ou moins chargés d'impuretés et jamais bien transparents; aussi, comme on le voit par les nombres qui suivent, on ne peut répondre que des dixièmes :

e	e'	n
52,3	30,9	1,69
52,0	31,3	1,66
50,7	30,5	1,66
50,5	29,4	1,72

On peut adopter en moyenne,

$$n = 1,7.$$

La loi de Gladstone appliquée à Zn^2SiO^4 (p. mol. = 222) donne, en adoptant les équivalents de réfraction de Gladstone (*), la densité de la willémite étant 4,

$$222 \cdot \frac{n-1}{4} = 38,8,$$

d'où

$$n = 1,7,$$

c'est-à-dire le nombre obtenu par l'expérience.

(*) Zn = 10,2; Si = 6.8; O = 2,9.

Valeur de Δ dans la willémite. — Dans un uniaxe la valeur de Δ peut être connue lorsqu'on connaît la biréfringence et l'indice médian; on a

$$\Delta = a - c = \frac{1}{n_p} - \frac{1}{n_g} = \frac{B}{n(n \pm B)},$$

et, si B n'est pas trop fort,

$$\Delta = \frac{B}{n^2}.$$

Dans notre cas, la valeur approximative est donc, en dix-millièmes :

$$\Delta = \frac{270}{(1,7)^2} = 93. \quad (*)$$

Le rejet d'une lame parallèle à l'axe, d'épaisseur 8,1, comparé à celui d'une lame de gypse d'épaisseur 35,8, sera donné par

$$\frac{y_w}{y_g} = \frac{21,5 \times 35,8}{93 \times 8,1} = 1,02,$$

c'est-à-dire que les rejets seront sensiblement égaux, ce qui se vérifie d'une façon très satisfaisante; d'ailleurs le rejet est positif.

*
* *

Microsommite. — On considère cette espèce comme une néphéline positive; mais la microsommite diffère de la néphéline non seulement par le signe, mais aussi par

(*) La willémite est donc une substance à grand Δ, à inscrire dans le tableau de la page 673 (*loc. cit.*) entre le sphène et la tourmaline.

sa biréfringence qui est plus forte. Les cristaux se prêtent directement aux mesures :

Premier cristal :

$$e = 26,7; \qquad R = 191,4;$$

d'où

$$n_g - n_p = 7,2.$$

Second cristal :

$$e = 27,7; \qquad R = 189,7;$$

d'où

$$n_g - n_p = 6,8;$$

donc en moyenne :

$$n_g - n_p = 7.$$

En lumière convergente, le biseau de quartz produit un rejet positif qui, pour un cristal d'épaisseur 27, est sensiblement le même que celui du gypse 35,8. On en conclut que le Δ de la microsommite est notablement plus grand que celui de la néphéline, mais que les indices moyens des deux substances ne doivent pas beaucoup différer entre eux.

*
* *

Thomsénolite. — *Groenland.* — Dana (*) indique pour l'orientation optique de cette espèce :

Plan des axes optiques normal à $g^1 = 010$;

Bissectrice aiguë négative faisant avec la verticale un angle

$$\alpha = 52°22'; \qquad 2E_j = 69°36'.$$

(*) *Descriptive Mineralogy.* Sixth edition, 1896, p. 180.

En ce qui concerne l'angle α, Dana l'affecte du signe —, ce qui, d'après les conventions établies (*), indiquerait que la bissectrice est inclinée en haut vers l'arrière, tandis que mes observations montrent qu'elle s'incline vers le spectateur.

Biréfringence. — Les cristaux sont difficiles à tailler à cause de la grande facilité avec laquelle ils se clivent; j'ai déduit la biréfringence $n_g - n_p$ de celle des lames de clivage $p = 001$ ou bien de celle des lames m formées par deux faces parallèles du cristal lui-même.

Une valeur approximative de l'indice m'a été donnée par la double mise au point :

	e	e'	n
Lames p . . .	61	43	1,42
	54.9	39,3	1.40
Lames m. . .	75	51,9	1,45
	75,9	52,4	1,45
	64	44	1.45
	80	55,4	1,44
	81,5	57	1,43
	21,7	15,2	1,43

(*) *Loc. cit.* Introduction, p. XXXVI.

On peut adopter $n = 1,45$ pour l'indice moyen (*); alors de $2E = 69°36'$, on déduit $V = 23°10'42''$.

Biréfringence du clivage p. — La face *p*, sensiblement carrée, s'éteint suivant ses diagonales, la direction d'extinction négative étant située dans le plan de symétrie. On a mesuré :

Première lame :

$$e = 19,5; \qquad R = 92,3 \text{ à } 91,3;$$

d'où

$$X_p = 4,7.$$

Seconde lame :

$$e = 42,5; \qquad R = 212,4 \text{ à } 213,5;$$

d'où

$$X_p = 5.$$

Biréfringence de m. — Cristaux appuyés sur le porte-objet par une face verticale :

Premier cristal :

$$e = 42; \quad R = 193 \text{ à } 194;$$

d'où

$$X_m = 4,6.$$

Second cristal :

$$e = 21,7; \qquad R = 85,2 \text{ à } 85,7;$$

d'où

$$X_m = 3,9.$$

Le premier cristal, examiné en lumière convergente

(*) La normale à la face *m* étant voisine d'un axe optique, les indices de cette face diffèrent peu de l'indice moyen.

rouge, conduit à un retard un peu plus faible que celui obtenu par la mesure en lumière parallèle; mais la différence influe peu sur la valeur de la biréfringence : on aperçoit la ligne 3λ passant presque exactement au centre du champ; on en déduit $R = 188,4$ et $X_m = 4,5$. Plus exactement, en amenant par soustraction la ligne 2λ au centre, on obtient $R = 187,4$ et X_m 4,5.

Calcul de $B = n_g - n_p$. — La biréfringence X d'une face dont la normale fait des angles θ, θ' avec les axes optiques est reliée à la biréfringence proprement dite B par la formule

$$X = B \sin\theta \sin\theta'.$$

a) Dans le cas de la face *p*, on a

$$B = \frac{X_p}{\sin^2\theta_1},$$

l'angle θ_1 étant donné (fig. 3) par

$$\cos\theta_1 = \cos V \sin(\alpha + \beta),$$

formule dans laquelle

$$\beta = ph^1 = 86°48', \qquad \alpha = 52°22', \qquad V = 23°10'42''.$$

En adoptant $X_p = 4,85$, moyenne des deux mesures relatées ci-dessus, il vient

$$\theta_1 = 53°3'9'' \qquad \text{et} \qquad B = 7,594.$$

b) Dans le cas de la face *m*, on a

$$B = \frac{X_m}{\sin\theta \sin\theta'}.$$

La face m est déterminée par l'angle

$$\varphi = mm_{\text{ant.}} = 89^\circ 46',$$

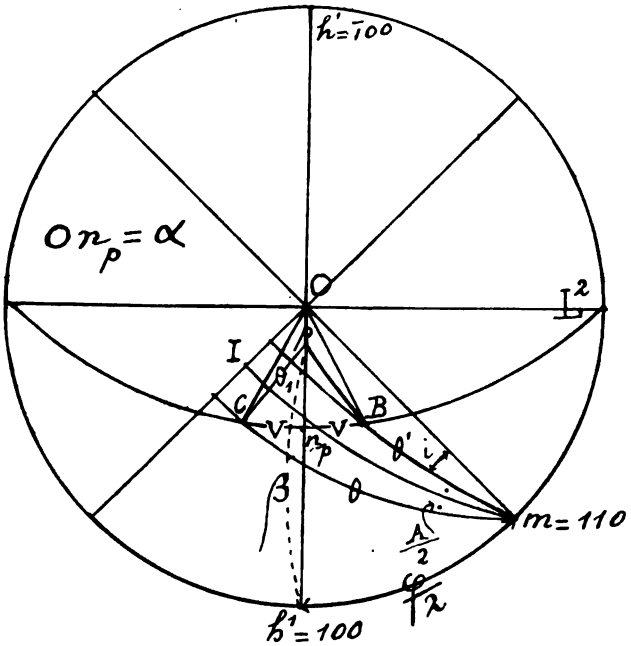


FIG. 3.

et l'on a, pour calculer θ et θ', les relations (*)

$$\cos\theta = -\sin V \sin\frac{\varphi}{2} + \cos V \cos\frac{\varphi}{2}\sin\alpha,$$

$$\cos\theta' = \sin V \sin\frac{\varphi}{2} + \cos V \cos\frac{\varphi}{2}\sin\alpha,$$

(*) Triangles mCL² et mBL².

qui donnent

$$\theta = 76°13'35''$$
$$\theta' = 37°28'44'';$$

puis, en adoptant en moyenne $X_m = 4,37$, on obtient

$$B = 7,395.$$

c) D'après les résultats obtenus en *a*) et *b*), on peut adopter pour la biréfringence de la thomsénolite

$$n_g - n_p = 7,5.$$

En prenant pour base ce nombre et en effectuant les calculs inverses, on trouve des résultats concordants avec les nombres obtenus par les mesures :

	Calculé.	Mesuré.
X_p	4,8	4,9
X_m	4,4	4,4

Ces résultats ont été obtenus, il est vrai, en se servant d'un indice grossièrement approché; mais il est facile de voir que les formules employées donnent pour la biréfringence des résultats qui sont pour ainsi dire indépendants de la valeur de l'indice (*).

Angle d'extinction de la face m. — L'angle que fait une des directions d'extinction de la face *m* avec la verticale se mesure avec assez de difficulté; j'ai obtenu de 36° à 38°. Pour calculer cet angle on trace (fig. 3) les arcs de grand cercle *m*B, *m*C, qui projettent les axes optiques sur la

(*) Voir Note à la fin.

face m, puis l'arc bissecteur mI ; l'extinction est la droite qui a pour pôle I (*) et, comme la verticale a pour pôle O, l'angle demandé est, en représentant l'angle CmB par A,

$$OI = \frac{A}{2} + i.$$

L'angle A est donné par le triangle BCm :

$$\frac{A}{2} = 15°59'42'';$$

quant à i, on a

$$\cos i = \frac{\cos V \cos \alpha}{\sin \theta'} \quad (**)$$

et

$$i = 22°42'14'';$$

de sorte que

$$OI = 38°42'.$$

Sens d'inclinaison de la direction d'extinction négative. — En examinant la figure 3, on constate que l'observateur placé devant une face $m = 110$ verra l'extinction négative OI se pencher à sa gauche, vers le haut, sous un angle de 39°; ce fait est confirmé par l'observation. Le contraire arriverait si le pôle supérieur n_p de la bissectrice aiguë se trouvait en arrière, comme l'indique Dana.

(*) Cette direction d'extinction sera la négative d'après le principe connu :

Le petit axe de l'ellipse découpée par un plan diamétral P dans un ellipsoïde, se trouve dans celui des angles dièdres formés par les plans qui projettent sur P les normales aux sections cycliques, qui contient le petit axe de la surface.

(**) $\cos \widehat{OB} = \cos V \cos \alpha$.

Au point de vue de l'observation au microscope, il faut distinguer deux sortes de faces *m* : les faces droites (110, $\bar{1}10$) aboutissant à l'extrémité droite de L^2 et les faces gauches ($1\bar{1}0$, $\bar{1}\bar{1}0$) aboutissant à l'autre extrémité; les faces de chaque groupe ont des apparences optiques identiques, vu que l'une d'elles vient en coïncidence avec l'autre par rotation de 180° autour de L^2. Les faces droites montreront la direction d'extinction négative penchée vers la gauche à 39°; pour les faces gauches, l'apparence sera symétrique de la précédente par rapport à la verticale et la direction d'extinction négative se penchera à droite. La figure 4 montre une face droite placée sur la platine du microscope dans la position où sa direction d'extinction négative coïncide avec la section du polariseur. On distingue immédiatement les faces droites des faces gauches à l'orientation des traces très nettes du clivage *p*; ces traces, qui font avec la verticale un angle de 87°44',5, montent de gauche à droite dans les faces droites, de droite à gauche dans les faces gauches.

Apparence optique d'une face m *en lumière convergente.* — Nous supposons le cristal placé dans l'une de ses positions d'extinction en lumière parallèle; dans cette position, si l'on passe en lumière convergente, l'une des branches de la ligne incolore passe toujours au centre du champ et les angles faits par les projections des axes optiques sur le plan de la lame ont pour bissectrices les fils du réticule. Dans notre cas, un pôle A (fig. 4) est perceptible au bord du champ (*); l'angle que OA fait avec

(*) C'est le pôle de l'axe optique pour lequel $\theta' = 37°29'$.

la section du polariseur est l'angle $\frac{A}{2} = 16°$ calculé ci-dessus; on a obtenu, par la mesure, de 15° à 17°. La direction OA se trouve entre l'extinction négative et la verticale faisant avec celle-ci 23° à gauche pour une face droite, à droite pour une face gauche.

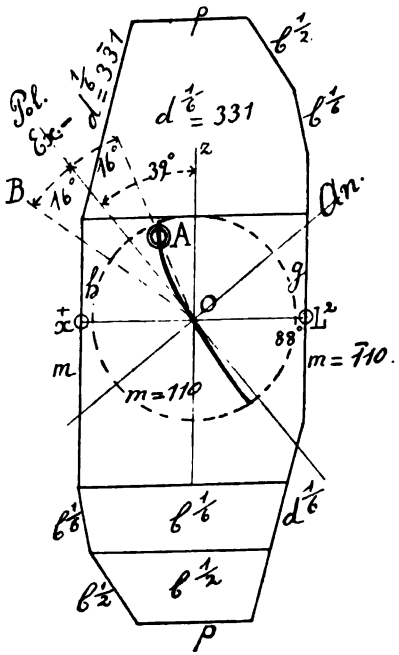


Fig. 4.

Lorsqu'on cherche à déterminer dans quel cas le pôle A apparaît à la partie supérieure de la face *m*, on est d'abord étonné de rencontrer des faces de même espèce qui, avec des contours identiques en apparence, montrent le pôle A tantôt vers le haut, tantôt vers le bas. Cela pro-

vient de ce qu'à cause de l'angle du prisme très voisin de 90°, il est très difficile de distinguer les deux extrémités d'une face *m*; ainsi, dans la figure 4, qui est une projection orthogonale sur la face *m* en observation, on voit que deux couples de faces $b^{1/2}$ $b^{1/6}$ se montrent de profil aux deux extrémités, ainsi que deux faces $d^{1/6}$; il n'y a, comme caractère distinctif, que la présence en haut d'une seule $d^{1/6}$ vue de face, tandis qu'en bas il existe deux b^{m} dans une position analogue; mais les intersections de ces facettes sont en général peu apparentes; les profils paraissent donc symétriques par rapport au centre de la face et il est en général impossible de juger si l'arête qui se trouve à gauche est l'arête *h* ou l'arête *g*. Mais, chaque fois que la distinction est possible, *le pôle visible se trouve sur la partie de la droite* OA *qui s'achemine du centre vers l'arête* h. On peut d'ailleurs effectuer une vérification directe : les cristaux de thomsénolite, toujours attachés par une extrémité de l'axe vertical, ne présentent, lorsqu'ils sont détachés, qu'une seule extrémité portant des facettes cristallines, l'autre se terminant par le clivage; si l'on oriente le cristal en prenant pour face *p* supérieure (001) celle qui termine l'extrémité non clivée, chaque face *m* aura sa notation propre et ne pourra être confondue avec les autres ; en examinant le petit cristal à la loupe, on reconnaît, par la position des facettes terminales, la face 110 que l'on marque à l'encre; il sera alors facile d'orienter le cristal sur le porte-objet de manière à tourner telle ou telle face *m* vers l'objectif. En opérant ainsi, on trouve que les faces *m* antérieures (110 et $1\bar{1}0$) montrent le pôle d'un axe optique vers le haut, tandis que les faces postérieures ($\bar{1}\bar{1}0$ et $1\bar{1}0$) montrent un pôle vers le bas.

Cela prouve encore que la bissectrice aiguë monte du centre vers l'angle antérieur *o*.

Apparence optique du clivage p *en lumière convergente.* — En lumière rouge, on aperçoit (*), près de l'un des angles situés dans le plan de symétrie, une figure d'interférence indiquant le voisinage du pôle d'une bissectrice inclinée sur la lame; l'inflexion des lemniscates montre que le plan des axes optiques est normal au plan de symétrie; la bissectrice est négative. Cette expérience répétée sur une lame épaisse dans laquelle, par la présence des faces terminales, on peut distinguer l'avant et l'arrière du cristal, montre *que l'angle vers lequel vient déboucher la bissectrice est l'angle* o.

Observation. — Il se peut que l'erreur constatée sur le sens d'inclinaison de la bissectrice provienne d'une confusion faite par les observateurs :

L'image produite en lumière convergente est une image réelle et *droite :* les rayons qui ont traversé le cristal à droite font leur foyer à droite, les rayons qui ont traversé le cristal à gauche font leur foyer à gauche. Si donc le cristal est orienté sur la platine du microscope à l'œil nu, l'image obtenue en lumière convergente se rapportera directement à la position du cristal si on l'observe à l'œil nu, c'est-à-dire en enlevant l'oculaire, mais sera *renversée* si l'observation est faite à l'aide de la loupe Bertrand ou Klein. Au contraire, si le cristal a été orienté

(*) La figure est surtout nette dans l'huile; lorsque le cristal est épais, on peut faire apparaître la figure par l'action du biseau de quartz agissant par soustraction, après avoir placé le plan de symétrie à 45° des nicols.

sur la platine en l'observant à travers le microscope, et c'est le cas habituel, l'image observée en lumière convergente sera renversée, si on l'observe en enlevant l'oculaire, et droite si on l'examine à l'aide d'une loupe.

En définitive : *en observant et orientant le cristal à l'aide du microscope en lumière parallèle, et le dessinant, puis passant en lumière convergente et observant la figure d'interférence à l'aide d'une loupe, cette figure se rapporte au cristal tel qu'il a été dessiné.*

* * *

Note. — Les formules par lesquelles on déduit la biréfringence proprement dite de celle d'une face quelconque sont en général très peu affectées par la valeur de l'indice. Ainsi, dans le cas de la biréfringence de la thomsénolite déduite de celle du clivage p, nous avons obtenu (*)

$$B = \frac{X_p}{\sin^2 \theta_1},$$

et, en posant

$$180^\circ - (\alpha + \beta) = \omega,$$

$$B = \frac{X_p}{1 - \cos^2 V \sin^2 \omega} = \frac{X_p}{\cos^2 \omega + \frac{1}{n^2} \sin^2 \omega \sin^2 E}.$$

On voit que lorsque l'indice croît depuis 1 jusqu'à ∞, B augmente en tendant vers la limite $\frac{X_p}{\cos^2 \omega}$; dans notre cas : $\omega = 40^\circ 50'$, $X_p = 4,85$, on obtient

pour $n = 1$, $B = 6,814$
pour $n = \infty$, $B = 8,742$.

(*) Voir p. 641.

On voit que, même pour ces limites extrêmes, les résultats diffèrent très peu, étant donné que les biréfringences s'estiment à une unité près. Un indice à un dixième près, tel que le donne la double mise au point, est suffisamment exact pour ce calcul. Ainsi, dans notre cas, l'indice est certainement compris (*) entre 1,4 et 1,5; or, la formule ci-dessus donne

pour $n = 1,4$ $B = 7,5$
pour $n = 1,5$ $B = 7,6$.

—

Coup d'œil rétrospectif sur la science de l'électricité;
par P. De Heen, membre de l'Académie.

Si l'on examine quelle est la méthode qui a toujours été mise en jeu lorsqu'il s'est agi de l'étude d'un agent physique, on constate invariablement que l'on a débuté en considérant celui-ci comme possédant une réalité objective et concrète. Ce n'est que plus tard que, revenant sur cette première conception, on conçoit cet agent comme étant la manifestation d'une énergie, *c'est-à-dire de quelque chose à l'état de mouvement*, toute autre possibilité de forme de l'énergie ne pouvant être considérée que comme une rêverie de l'abstraction. Telle est l'évolution qui s'est produite pour la chaleur et pour la lumière, et qui se produira pour l'électricité. Il était, dès

(*) Voir p. 639.

lors, très intéressant de rappeler les premières théories et de rechercher là où la science de l'électricité s'est trouvée pour ainsi dire faussement aiguillée, pour aboutir au cul-de-sac que nous constatons maintenant, c'est-à-dire à la théorie des électrons.

Les théories de Franklin et de Canton présentent à ce sujet un vif intérêt. Bien que ces physiciens n'aient pu se dégager encore de la conception d'un fluide électrique, leur théorie était cependant plus voisine de la réalité que la théorie actuelle. Nous empruntons nos documents à l'*Histoire de la physique* de Poggendorff (1).

« Franklin n'admet, en effet, qu'*une sorte d'électricité* » contenue en certaine quantité dans tous les corps, » selon leur nature. Lors de l'électrisation, — ce qui » nécessite au moins deux corps, — il ne se produit pour » Franklin qu'une distribution nouvelle de l'électricité. » Celle-ci passe de l'un des corps dans l'autre, qui con- » tient alors un excès d'électricité, tandis que le premier » en contient moins que d'ordinaire; pour cette raison, » il dit que l'un des corps est électrisé *positivement*, » l'autre *négativement*. Lorsqu'il parle d'électricité posi- » tive ou d'électricité négative, il n'attache jamais à ces » expressions d'autre sens que celui d'un excès ou d'un » défaut d'électricité, par rapport à l'état naturel.

» La répulsion des corps électrisés positivement ou » l'attraction des corps inégalement électrisés se déduit » facilement de là; mais la répulsion des corps négatifs » nécessitait une nouvelle hypothèse, à savoir que les » atomes dépourvus d'électricité se repoussent! »

---

(1) Paris, Dunod, 1883.

Il est bien curieux de remarquer que pour rendre la théorie de Franklin absolument exacte il suffit simplement de remplacer le mot *électricité* par les mots *énergie gyrostatique* qui correspond ou ne correspond pas au potentiel de l'espace. Si l'énergie qui se manifeste à la surface d'un conducteur est plus grande que celle de l'espace, nous dirons, par exemple, qu'il est positif et l'inverse s'il est négatif.

Nous voyons maintenant tomber l'objection qui semblait absolument victorieuse et d'après laquelle les atomes dépourvus d'électricité se repousseraient.

Si les ions étaient dépourvus d'électricité, ils n'existeraient pas, attendu que l'électricité représente l'énergie de la phase II, laquelle, par cela même, s'évanouirait.

Les corps *dits* dépourvus d'électricité ne sont autre chose que des corps dont les ions superficiels sont en état d'équilibre énergétique avec le milieu énergétique qui emplit l'espace qui les environne, de manière à déterminer l'interférence des actions propulsives et aspirantes.

Continuons maintenant le résumé de ces idées anciennes: « Les premiers électriciens, qui ne connaissaient guère » des nombreux phénomènes de l'électricité que l'attrac- » tion et la répulsion, les attribuaient à des *influences* » *huileuses* qui, d'après eux, entouraient le corps frotté » comme d'*une atmosphère*. C'est de là que vient le nom » d'*atmosphère électrique*. On abandonna peu à peu cette » *grossière théorie* sans pouvoir cependant s'en dégager » complètement, même Canton, bien que ses expériences » aient frayé la voie à une théorie exacte... »

Il est inutile de dire que l'*atmosphère électrique* ne

représente autre chose que le *champ électrostatique*, et que l'*influence huileuse* représente l'action exercée par le potentiel de ce champ sur un conducteur qui s'y trouve plongé. Mais les considérations suivantes offrent le plus vif intérêt : « Les expériences de Canton fournirent à » Franklin l'occasion d'étudier les phénomènes, et il » communiqua le résultat de ses observations à la Société » royale en décembre 1755. Mais il n'arriva pas davan- » tage à des idées bien nettes, et ne put, avec sa théorie » de l'excès et du manque d'électricité (pour nous de » l'excès et du manque d'énergie par rapport à celle du » milieu ambiant), expliquer d'une manière satisfaisante » ce qui se produisait. Il s'en tint à cette opinion qu'un » corps arrivé dans la soi-disant atmosphère électrique » d'un corps électrisé, reçoit *la même* électricité que celle » de ce dernier corps. Il était réservé à deux de nos » compatriotes de dissiper cette ERREUR FONDAMENTALE...»

Nous pouvons dire maintenant de dissiper cette VÉRITÉ FONDAMENTALE.

Ces deux hommes sont Wilcke et Aepinus. Wilcke avait déjà commencé à détruire ce qu'il y avait de vrai dans les théories de ses prédécesseurs dans sa thèse : *De electricitatibus contrariis* (Rostock, 1757). « Wilcke » conclut qu'un corps non électrisé B, placé dans l'atmo- » sphère d'un corps électrisé A, prend de l'électricité » contraire à celle de ce dernier. Aepinus répéta ces » expériences en faisant descendre un corps léger sus- » pendu à un fil de soie le long d'un conducteur isolé B, » près duquel se trouvait un corps électrisé A. Il recon- » nut ainsi que la partie du conducteur tournée vers A » était chargée d'électricité contraire, tandis que l'extré-

» mité la plus éloignée était chargée d'électricité de
» même nom. S'appuyant sur des expériences de ce
» genre, il se prononça ouvertement contre l'hypothèse
» d'une atmosphère électrique. Il admit, tout au plus,
» l'intervention de l'air et introduisit le nom caractéris-
» tique de *sphère d'action électrique* (influence électrique).»

Tel est le travail qui a dévoyé la science de l'électricité pendant un siècle et demi, sans compter le nombre d'années qu'il faudra encore afin de déraciner cette erreur, ce qu'il est difficile de fixer.

Il est intéressant de voir combien il eût été facile pour Canton de défendre victorieusement sa *vérité fondamentale* établissant qu'*un conducteur isolé, placé dans un champ électrostatique, prend l'électricité de même signe que celui du conducteur dont il subit l'action* (on dit maintenant potentiel de même signe). Il lui eût suffi de mettre ce corps en contact avec un électroscope à l'aide d'un fil long et fin.

Il aurait reconnu alors que non seulement cette électricité est de même signe, mais encore qu'elle est répartie de la même manière en tous les points de ce conducteur intérieurs ou extérieurs, ce que nous exprimons en disant que l'énergie électrique d'un conducteur est la même en tous les points de sa surface intérieure ou extérieure. Les *apparences* négatives, positives et neutres ne sont dues qu'à l'action du milieu, c'est-à-dire aux variations du potentiel du champ.

Wilcke et Aepinus, en opérant à l'aide du plan d'épreuve, sont tombés dans cette erreur fondamentale que c'était la surface du conducteur influencé qui était *réellement* soumise à des variations, alors qu'il ne s'agit

que d'une apparence fallacieuse, comparable à celle des apparences de chaud et de froid, destinée finalement à engendrer la théorie des électrons.

Conclusion. — *La théorie des phénomènes électriques doit être reprise depuis l'époque de Franklin et de Canton.*

Dans la théorie que nous proposons, nous ne tenons pas plus compte des deux fluides ou des deux espèces d'électrons, qu'on ne tient compte, dans le chapitre de la chaleur, du chaud et du froid. Il existe simplement un potentiel de même qu'il existe une température. Le verre frotté possède un potentiel différent de celui du milieu ambiant et non pas un fluide ni des électrons positifs en excès. En effet, considérons un conducteur possédant un potentiel qui est mesuré en mettant ce conducteur en communication avec un électroscope à l'aide d'un fil long et fin. Faisons ensuite en sorte que ce potentiel soit toujours invariable; il est évident, dans ces conditions, que ce conducteur possédant, par exemple, un potentiel positif pourra se comporter lorsqu'il se trouve à l'intérieur d'une sphère conductrice, soit comme s'il était chargé positivement, soit comme s'il était chargé négativement, suivant la grandeur du potentiel de la sphère extérieure. De même qu'un corps à 100° peut être considéré comme froid ou chaud suivant que la sphère qui l'enveloppe est à 200° ou à 0°.

Considérons, par exemple, une sphère S possédant un potentiel positif V (fig. 1). Plongeons dans cette sphère le corps *c* qui prend le même potentiel V. Si maintenant ce corps est mis en communication avec deux feuilles d'or *f* et *f'*, soumises à l'action d'un électroscope susceptible de déceler à la fois la charge électrique et son signe,

on remarque que la feuille f ne subit aucune déviation à l'intérieur de la sphère. Les choses se passent comme s'il s'agissait d'un corps qui n'est ni chaud ni froid puisqu'il y a équilibre de température.

Mais la feuille f', qui se trouve au même niveau potentiel V, mais dont le milieu ambiant est au potentiel V_0 plus bas de l'espace, se comporte comme un corps chaud, elle est positive.

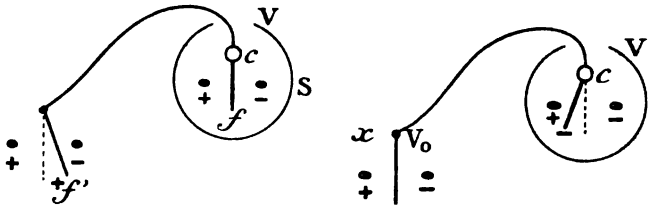


FIG. 1 et 2.

On peut évidemment faire l'expérience inverse, amener le corps c au potentiel de l'espace (fig. 2). Dans ces conditions, il se comportera dans la sphère comme un corps froid, c'est-à-dire qu'il prendra l'apparence négative.

Il est inutile de revenir ici sur la raison pour laquelle la différence de potentiel se maintient alors que la différence de température ne se maintient pas.

Des corps possédant des potentiels *également* différents de celui du milieu ambiant se repoussent ou s'attirent suivant que ces différences sont de même signe ou de signes contraires.

Si ces potentiels sont inégaux, il existe une différence de potentiel *critique* à partir de laquelle les actions répulsives se transforment en actions attractives.

Voici l'image qui permet de concevoir cette théorie, et les images sont aussi nécessaires à l'évolution de la physique que le charbon à la marche d'une locomotive, n'en déplaise aux *abstractionnistes* qui, en réalité, n'ont jamais fait que partir d'une image ainsi que l'indique l'étymologie du mot lui-même. Ils n'auraient jamais conçu l'énergie s'ils n'avaient vu un corps en mouvement. On ne peut donc abstraire qu'après avoir conçu l'image, et nous commençons par là.

Nous pouvons concevoir l'élément matériel ou l'ion susceptible de développer un potentiel, comme une spire hélicoïdale propulsive et aspirante par suite du mouvement de gyration qu'elle possède autour de son axe. L'angle du sommet du cône enveloppe de cette spire est supposé d'autant plus petit que l'énergie gyrostatique emmagasinée est plus grande. C'est cette énergie qui donne la mesure du potentiel.

Supposons ces éléments répartis sur la surface extérieure et intérieure d'une sphère (fig. 3). Chacun de ces éléments donnera naissance à un tourbillon dont la partie axiale est aspirée et la partie périphérique propulsée. Mais chacun des éléments intérieurs étant animé de la même vitesse de rotation, les vitesses v ne tarderont pas à interférer de manière à obtenir un état d'équilibre dynamique auquel correspondra le potentiel constant à l'intérieur de la sphère.

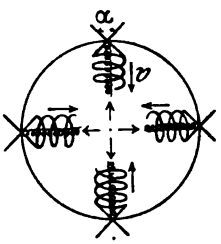


FIG. 3.

Si maintenant nous concevons un corps plongé dans

cette sphère et auquel nous attribuerons des éléments possédant la même énergie de gyration, ce corps ne sera pas électrisé, mais s'il possède plus ou moins d'énergie de gyration que la sphère, il prendra des apparences électriques positives ou négatives.

Nous voyons ici apparaître l'analogie entre la théorie de Franklin et celle que nous proposons.

La sphère que nous considérons peut être fictive ou réelle. Si elle est fictive, le potentiel devient celui de l'espace.

Pour ce qui concerne le courant, on devait rencontrer une plus grande difficulté résultant de cette circonstance qu'un *courant* n'est pas *nécessairement* un *courant électrique*, c'est-à-dire un courant transmettant et dissipant l'énergie et la rendant par conséquent utilisable; le courant peut être un simple courant d'éther, ou si l'on veut un courant *exclusivement magnétique*. Mais ce courant magnétique devient courant électrique lorsqu'il subit une perturbation soit momentanée dans l'induction d'un courant par un aimant, soit permanente lorsqu'il est soumis à la vibration; il en est ainsi lorsqu'il se propage dans les conducteurs, par exemple. Un courant électrique est donc nécessairement un courant magnétique bien que l'on puisse considérer dans certains cas ce système comme astatique, mais un courant magnétique n'est pas nécessairement un courant électrique, ainsi qu'on l'avait supposé.

Estimons maintenant le temps qu'il faudra aux physiciens pour se débarrasser de la théorie des fluides et des corpuscules électroniques, en nous basant sur ce qui s'est passé pour les corpuscules lumineux.

« Pierre Gassendi, qui naquit en 1592 et mourut » en 1655, expliquait les effets de la lumière par des

» atomes qui se propagent à partir du point lumineux,
» avec une grande vitesse, dans toutes les directions, et
» en ligne droite, de sorte que l'intensité de la lumière
» est en raison inverse du carré de la distance. Dans son
» enthousiasme pour cette théorie (que l'on peut com-
» parer à l'emballement des physiciens modernes pour
» les électrons) (1), il allait jusqu'à admettre des atomes
» spéciaux pour la chaleur, le froid, l'odorat, le goût,
» l'ouïe. »

Ce fut Grimaldi, vers l'an 1650, qui le premier pressentit le mouvement ondulatoire de la lumière pendant sa propagation. « De même, dit-il, que si on lance une
» pierre dans l'eau on voit les renflements circulaires de
» l'eau se former autour de l'ombre du corps opaque,
» ces bandes plus brillantes qui, selon la forme de ce
» dernier, s'étendent en longueur ou paraissent se
» courber...

» Huyghens publia son *Traité de la lumière* en 1690,
» à Leyde. Jusqu'alors il n'avait pas été surpassé, mais
» malheureusement il était aussi demeuré incompris!

» Cette explication était si complète qu'il semble que
» sa théorie aurait dû être acceptée avec empressement
» par les physiciens de son temps. Ce fut précisément
» le contraire qui arriva! Huyghens publia pour la pre-
» mière fois son idée et ses mesures en 1678. La fatalité
» voulut que neuf ans plus tôt, en 1669, Newton admit
» que la lumière consiste en parties *concrètes* s'élançant
» avec une vitesse extraordinaire du corps lumineux. »

---

(1) On peut appliquer aux collectivités pensantes les lois que Gustave le Bon a si bien définies, lorsqu'il s'agit des foules.

On voit que, en réalité, Newton développe l'hypothèse de Gassendi.

« De 1801 à 1803, Thomas Young *tira de l'oubli* la » théorie des ondulations.

» Mais Young fut oublié comme ses prédécesseurs » Euler, Huyghens et Grimaldi. Enfin en 1815, Fresnel » remporta une brillante victoire, après avoir livré un » rude assaut contre les Newtoniens, Biot et Poisson. » Il n'y a pas, dans toute l'histoire de la physique, un » autre exemple d'une vérité si longtemps méconnue, à » cause de la confiance en la parole du maître : *in verba* » *magistri*. »

Si nous admettons, avec l'historien Poggendorff, qu'il n'y a pas d'exemple d'un pareil fait, nous avons la profonde conviction qu'il y en aura un deuxième et qu'il sera tout aussi difficile de déraciner la théorie des électrons que la théorie des corpuscules lumineux.

Les *magistri* sont actuellement J.-J. Thomson, Lorentz, Kaufmann, aidés par la parole de H. Poincaré, Abraham, Langevin, etc., et n'oublions pas que la *masse intellectuelle* est, dans ce siècle, incomparablement plus grande qu'à l'époque où l'on discutait les phénomènes lumineux; son *inertie* se trouve donc considérablement dépassée et compense largement la différence qui existe entre l'autorité de Newton et celle des savants que nous venons de citer (ceci soit dit sans vouloir blesser ces savants éminents).

Si donc nous admettons que Grimaldi ait eu, vers 1650, une conception exacte du phénomène lumineux, nous voyons celle-ci prévaloir en 1815. En chiffre rond, il a fallu un siècle et demi, ce qui reporterait l'époque de la destruction de la théorie des électrons à l'an 2050 environ.

Poggendorff fait, à ce sujet, une remarque importante : « Le travail de Huyghens sur la lumière est encore très » instructif à un autre point de vue : il donne la preuve » convaincante de l'utilité des théories dans la science. » Il réfute, d'une manière décisive, ceux qui enseignent » que les faits et les lois qui s'en déduisent constituent » seuls la science, et qui oublient que la théorie est le » terme, le seul but raisonnable qu'on puisse avoir en » vue en collectionnant les faits. »

Indépendamment de cette réflexion pleine de justesse, le savant historien devrait également mentionner à ce sujet un fait absolument analogue à celui qui s'est produit pour la lumière et qui s'est également produit pour la chaleur.

Stahl supposait de même l'existence d'une substance chaleur, le phlogistique, et ce fut Lavoisier qui détrôna cette erreur.

Ce que l'on constate donc en parcourant l'histoire, c'est l'énorme difficulté que le physicien éprouve à se débarrasser de la *conception concrète* des choses qui l'environnent, et nous concluons : le dernier terme de l'évolution des sciences physiques ne sera en principe atteint que lorsqu'il sera universellement admis qu'il n'existe ni chaleur, ni lumière, ni électricité, ni force statique (passive ou active), ni matière, mais qu'il n'existe en réalité que *le mouvement de la substance universelle de l'espace*.

Ce n'est pas là un desideratum purement philosophique, c'est celui qui est exigé pour le classement rationnel des faits de la nature.

—

Centres des moyennes distances de groupes de points sur une courbe gauche; par M. Stuyvaert (Gand).

Certains théorèmes relatifs aux courbes et aux surfaces algébriques méritent le reproche d'être trop généraux : en voulant les appliquer à des exemples particuliers, on découvre qu'ils sont sujets à des exceptions, à des restrictions. Pour fixer les idées, supposons que l'on ait trouvé un nombre caractéristique r (ordre, classe, genre, etc.) d'un lieu géométrique ou d'une enveloppe, en relation avec une figure ou un système de figures. Ce nombre r est en somme un *maximum* (ou un minimum) et, dans les applications, il doit être modifié suivant la situation spéciale des figures.

Pour résoudre la question d'une manière complète, il faut donc, après avoir trouvé le nombre r dans le cas général, chercher dans quel cas il subit telle ou telle modification.

Voilà l'idée que nous comptons développer dans ce petit travail. Au surplus, les théorèmes auxquels nous arrivons sont nouveaux, croyons-nous, au moins quand on les envisage dans toute leur généralité. Pour ceux des cas particuliers qui sont connus, il est intéressant de les ranger dans une étude d'ensemble.

Soit une courbe gauche rationnelle représentée, en coordonnées cartésiennes, par les équations paramétriques :

$$x = \frac{\alpha_t^n}{\delta_t^n}, \quad y = \frac{\beta_t^n}{\delta_t^n}, \quad z = \frac{\gamma_t^n}{\delta_t^n},$$

α_t^n, β_t^n, γ_t^n, δ_t^n désignant des polynômes du degré n par rapport au paramètre t. Puisque ces formes sont, par hypothèse, effectivement d'ordre n, le point de paramètre $t = \infty$ n'est pas dans le plan de l'infini. Nous admettons de plus que la forme δ_t^n n'a pas de facteur commun avec un des numérateurs, de sorte qu'aucun point à l'infini de la courbe ne se trouve dans un des plans coordonnés.

Soit ensuite une involution I_1^m d'ordre m et de rang 1 sur la courbe; on peut représenter cette involution par une équation de la forme

$$a_t^m + \lambda b_t^m = 0.$$

Si l'on regarde λ comme une constante, la dernière équation représente un groupe de l'involution; les éléments de ce groupe ont pour paramètres, par exemple

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_m,$$

et pour coordonnées

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad \ldots; \quad x_m, y_m, z_m.$$

Soient X, Y, Z les coordonnées du centre des moyennes distances des points de ce groupe; on a

$$mX = x_1 + x_2 + \cdots + x_m = \frac{\alpha_{t_1}^n}{\delta_{t_1}^n} + \frac{\alpha_{t_2}^n}{\delta_{t_2}^n} + \cdots + \frac{\alpha_{t_m}^n}{\delta_{t_m}^n}$$

$$= \frac{1}{\delta_{t_1}^n \delta_{t_2}^n \ldots \delta_{t_m}^n}\left(\alpha_{t_1}^n \delta_{t_2}^n \ldots \delta_{t_m}^n + \delta_{t_1}^n \alpha_{t_2}^n \ldots \delta_{t_m}^n + \cdots + \delta_{t_1}^n \delta_{t_2}^n \ldots \alpha_{t_m}^n\right);$$

mY et mZ ont des valeurs analogues.

Le numérateur et le dénominateur des valeurs de mX, mY et mZ sont des fonctions symétriques des racines de l'équation

$$(1) \qquad a_i^m + \lambda b_i^m = 0.$$

Comme chacune de ces racines figure au degré n dans les fonctions symétriques en question, celles-ci s'expriment par des fonctions du $n^{\text{ième}}$ degré des coefficients de l'équation (1) (*). Ces coefficients sont des fonctions linéaires de λ. Donc mX, mY, mZ sont des quotients de polynômes du degré n en λ et ces trois quotients ont un dénominateur commun, de sorte que l'on peut écrire

$$x = \frac{\varphi(\lambda)}{\pi(\lambda)}, \qquad y = \frac{\psi(\lambda)}{\pi(\lambda)}, \qquad z = \frac{\psi(\lambda)}{\pi(\lambda)}.$$

Si alors λ varie, *le centre* (X, Y, Z) *des moyennes distances d'un groupe de points de l'involution* I_1^m *décrit une courbe unicursale d'ordre* n.

Dans quel cas la courbe, lieu du centre (X, Y, Z), s'abaisse-t-elle au degré $n - 1$? C'est lorsque les fonctions $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $\chi(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ ont un facteur commun de la forme $\lambda - \lambda'$, c'est-à-dire quand la substitution de λ' à λ annule les quatre fonctions, ou quand on a les identités

$$(2) \quad \varphi(\lambda') = 0, \quad \psi(\lambda') = 0, \quad \chi(\lambda') = 0, \quad \pi(\lambda') = 0.$$

Soient t'_1, t'_2, ..., t'_m les paramètres du groupe de

(*) Salmon, *Alg. supér.*, p. 36.

points répondant dans l'involution à la valeur λ' de λ. Les identités (2) équivalent à

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha^n_{t'_1}\delta^n_{t'_2}\ldots\delta^n_{t'_m} + \delta^n_{t'_1}\alpha^n_{t'_2}\ldots\delta^n_{t'_m} + \cdots + \delta^n_{t'_1}\delta^n_{t'_2}\ldots\alpha^n_{t'_m} = 0,\\ &\beta^n_{t'_1}\delta^n_{t'_2}\ldots\delta^n_{t'_m} + \delta^n_{t'_1}\beta^n_{t'_2}\ldots\delta^n_{t'_m} + \cdots + \delta^n_{t'_1}\delta^n_{t'_2}\ldots\beta^n_{t'_m} = 0,\\ &\gamma^n_{t'_1}\delta^n_{t'_2}\ldots\delta^n_{t'_m} + \delta^n_{t'_1}\gamma^n_{t'_2}\ldots\delta^n_{t'_m} + \cdots + \delta^n_{t'_1}\delta^n_{t'_2}\ldots\gamma^n_{t'_m} = 0,\\ &\delta^n_{t'_1}\delta^n_{t'_2}\ldots\delta^n_{t'_m} = 0. \end{aligned}\right.$$

D'après la dernière égalité, un des polynômes $\delta^n_{t'_i}$ doit être nul. D'après les trois autres, il faut en outre, ou bien qu'un autre de ces polynômes soit nul, ou bien que l'on ait

$$\alpha^n_{t'_i} = \beta^n_{t'_i} = \gamma^n_{t'_i} = 0.$$

La seconde alternative est à rejeter, parce qu'alors, dans les équations paramétriques de la courbe, les quatre fonctions α^n_t, β^n_t, γ^n_t, δ^n_t auraient un facteur commun $t - t'_i$ et la courbe serait d'ordre $n - 1$, ce qui est contre l'hypothèse.

Il faut donc que deux polynômes $\delta^n_{t'_i}$ et $\delta^n_{t'_j}$ soient nuls ou que δ^n_t s'annule pour deux racines de l'équation

$$(4)\qquad a^m_t + \lambda' b^m_t = 0.$$

Or, si δ^n_t s'annule pour une valeur du paramètre t, le point correspondant de la courbe est à l'infini, puisque ses coordonnées x, y, z deviennent infinies.

Généralement, chaque point à l'infini de la courbe

appartient à *un* groupe de l'involution I_1^m. Le cas particulier que nous analysons ici est donc réalisé quand *deux* points à l'infini de la courbe appartiennent à un même groupe de l'involution.

La courbe, lieu du point (X, Y, Z), s'abaisse encore au degré $n - 1$ quand un groupe de l'involution a un point double en un des points à l'infini de la courbe donnée; car alors deux racines t'_i et t'_j de l'équation (4) sont égales et annulent δ_t^n, donc les conditions (3) sont satisfaites.

Pour que la courbe, lieu du centre (X, Y, Z), s'abaisse à l'ordre $n - 2$, il faut que les polynômes $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$, $\chi(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ aient un facteur commun du second degré, de la forme $(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'')$ ou de la forme $(\lambda - \lambda')^2$.

Dans la première hypothèse, on voit, comme ci-dessus, qu'il y a, parmi les points à l'infini de la courbe, deux couples de points appartenant chaque fois à un même groupe de l'involution; chacun de ces couples peut être remplacé par un point double de l'involution en un point à l'infini de la courbe.

Si, au contraire, les fonctions φ, ψ, χ, π sont divisibles par $(\lambda - \lambda')^2$, elles doivent s'annuler pour $\lambda = \lambda'$, ainsi que leurs dérivées premières par rapport à λ. Comme précédemment, si les fonctions s'annulent pour $\lambda = \lambda'$, on a, par exemple,

$$\delta_{t'_1}^n = \delta_{t'_2}^n = 0,$$

t'_1 et t'_2 étant d'abord supposés distincts. Calculons alors $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ et, parmi les m^2 termes de cette dérivée, n'écrivons

que ceux qui ne contiennent ni $\delta^n_{t'_1}$ ni $\delta^n_{t'_2}$:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda'} = \cdots + \alpha^n_{t'_1}\left[\frac{d}{dt_2}\left(\delta^n_{t_2}\right)\frac{dt_2}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda'} \times \delta^n_{t'_3}\cdots\delta^n_{t'_m}$$

$$+ \left[\frac{d}{dt_1}\left(\delta^n_{t_1}\right)\frac{dt_1}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda'} \times \alpha^n_{t'_2}\cdots\delta^n_{t'_m} + \cdots$$

Des expressions analogues s'écrivent pour les dérivées des trois autres fonctions.

Pour que ces dérivées soient nulles, il faut :

1° Qu'une troisième fonction $\delta^n_{t'_i}$ s'annule, et alors trois points à l'infini de la courbe appartiennent à un même groupe de l'involution;

2° Ou bien que l'on ait

$$\left[\frac{d}{dt_2}(\delta^n_{t_2})\right]_{\lambda=\lambda'} = \left[\frac{d}{dt_1}(\delta^n_{t_1})\right]_{\lambda=\lambda'} = 0,$$

c'est-à-dire que la courbe touche le plan de l'infini aux points de paramètres t'_1 et t'_2;

3° Ou enfin, que l'on ait

$$-\left[\frac{\frac{d}{dt_1}(\delta^n_{t_1})\frac{dt_1}{d\lambda}}{\frac{d}{dt_2}(\delta^n_{t_2})\frac{dt_2}{d\lambda}}\right]_{\lambda=\lambda'} = \frac{\alpha^n_{t'_1}}{\alpha^n_{t'_2}} = \frac{\beta^n_{t'_1}}{\beta^n_{t'_2}} = \frac{\gamma^n_{t'_1}}{\gamma^n_{t'_2}} = \frac{\delta^n_{t'_1}}{\delta^n_{t'_2}},$$

et alors un même point de la courbe répond aux deux valeurs t'_1 et t'_2 du paramètre, c'est-à-dire que la courbe a un point singulier à l'infini, circonstance que nous pouvons exclure par hypothèse.

Nous ne devons pas considérer le cas où l'on aurait

$$\left[\frac{dt_2}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda'} = \left[\frac{dt_1}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda'} = 0,$$

car la relation

$$a_{t_1}^m + \lambda b_{t_1}^m = 0$$

qui lie λ au paramètre t_1 d'un point du groupe correspondant donne

$$(5) \qquad \frac{dt_1}{d\lambda} = \frac{b_{t_1}^m}{\frac{d}{dt_1} a_{t_1}^m + \lambda \frac{d}{dt_1} b_{t_1}^m}$$

et $\frac{dt_1}{d\lambda}$ ne peut s'annuler pour $\lambda = \lambda'$ que si l'on a $b_{t_1'}^m = 0$; donc le point de paramètre t_1' appartiendrait à deux groupes de l'involution caractérisés par les valeurs λ' et ∞ du coefficient λ, ce qui est impossible. (Si le groupe $b_t^m = 0$ de l'involution présentait quelque singularité, on en ramènerait l'étude au cas général en imposant à λ une transformation linéaire.)

Ici se présente un phénomène remarquable.

Tandis qu'un point double de l'involution situé à l'infini sur la courbe exerce la même influence que deux points à l'infini de la courbe appartenant à un même groupe de l'involution, il n'en est plus de même quand un groupe de l'involution comprend un point double et un point simple à l'infini sur la courbe : cette particularité n'équivaut pas à trois points d'un même groupe, mais à deux seulement.

En effet, supposons que, pour λ tendant vers une

valeur particulière λ', deux racines t_1 et t_2 de l'équation $a_t^m + \lambda b_t^m = 0$ tendent vers une racine double t'_1 de l'équation $a_t^m + \lambda' b_t^m = 0$, cette quantité t'_1 annulant aussi δ_t^n, et soient t'_3, $t'_4 \ldots$, t'_m les autres racines de $a_t^m + \lambda' b_t^m = 0$, toutes différentes de t'_1.

Si l'on regarde λ et t comme des coordonnées rectangulaires dans un plan, l'équation

$$a_t^m + \lambda b_t^m = 0$$

représente une courbe tangente à la droite $\lambda = \lambda'$ au point de coordonnées λ' et t'_1; par hypothèse aussi, le contact est un contact ordinaire et non une inflexion; prenons ce point comme origine en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes : l'équation de la courbe prend la forme

$$\lambda + ct^2 + \cdots = 0,$$

les termes non écrits sont d'un ordre infinitésimal supérieur au second quand t est l'infiniment petit principal; et la courbe, dans le voisinage de l'origine, peut être remplacée par la parabole $\lambda + ct^2 = 0$ qui est symétrique par rapport à l'axe des λ.

Si donc λ est infiniment petit, les deux valeurs correspondantes de t, pour cette parabole, sont égales et de signe contraire et il en est de même des valeurs t_1 et t_2 de t, pour l'autre courbe, à des infiniment petits supérieurs près. On a d'ailleurs

$$\frac{d\lambda}{dt_1} + 2ct_1 + \cdots = 0, \qquad \frac{d\lambda}{dt_2} + 2ct_2 + \cdots = 0,$$

par suite, aux infiniment petits supérieurs près, le rapport de $\frac{d\lambda}{dt_1}$ à $\frac{d\lambda}{dt_2}$ est le même que celui de t_1 à t_2, lequel tend vers -1 ; ainsi l'on a

$$\lim \frac{dt_1}{dt_2} = -1.$$

Ce premier point acquis, on peut écrire

$$\frac{d^2t_2}{dt_1^2} = \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\frac{d\lambda}{dt_1}}{\frac{d\lambda}{dt_2}}\right) = \frac{\frac{d\lambda}{dt_2}\frac{d^2\lambda}{dt_1^2} - \frac{d\lambda}{dt_1}\frac{d^2\lambda}{dt_2^2}\frac{dt_2}{dt_1}}{\left(\frac{d\lambda}{dt_2}\right)^2} = \frac{\frac{d^2\lambda}{dt_1^2} - \frac{d^2\lambda}{dt_2^2}\left(\frac{dt_2}{dt_1}\right)^2}{\frac{d\lambda}{dt_2}};$$

pour λ tendant vers λ', les deux termes de cette fraction tendent vers zéro ; donc, en appliquant la règle de l'Hospital,

$$\lim \frac{d^2t_2}{dt_1^2} = \lim . \frac{\frac{d^3\lambda}{dt_1^3} - \frac{d^3\lambda}{dt_2^3}\left(\frac{dt_2}{dt_1}\right)^3 - 2\frac{d^2\lambda}{dt_2^2}\cdot\frac{dt_2}{dt_1}\cdot\frac{d^2t_2}{dt_1^2}}{\left(\frac{d^2\lambda}{dt_2^2}\right)\frac{dt_2}{dt_1}},$$

d'où successivement, puisque t_1 et t_2 tendent vers t_1', et $\frac{dt_2}{dt_1}$ vers -1,

$$-\left(\lim \frac{d^2t_2}{dt_1^2}\right)\frac{d^2\lambda'}{dt_1'^2} - 2\frac{d^2\lambda'}{dt_1'^2}\left(\lim \frac{d^2t_2}{dt_1^2}\right) = 2\frac{d^3\lambda'}{dt_1'^3},$$

$$\lim \frac{d^2t_2}{dt_1^2} = -\left(2\frac{d^3\lambda'}{dt_1'^3} : 3\frac{d^2\lambda'}{dt_1'^2}\right);$$

remarquons que le diviseur de l'expression entre parenthèses n'est pas nul, puisque t_1' est racine double, et non triple, de l'équation $a_t^m + \lambda' b_t^m = 0$.

A présent nous pouvons calculer la dérivée de la fonction $\pi(\lambda)$ considérée antérieurement : nous aurons

$$\pi'(\lambda) = \frac{d\delta_{t_1}^n}{dt_1}\frac{dt_1}{d\lambda}\delta_{t_2}^n\delta_{t_3}^n \ldots \delta_{t_m}^n + \delta_{t_1}^n \frac{d\delta_{t_2}^n}{dt_2}\frac{dt_2}{d\lambda}\delta_{t_3}^n \ldots \delta_{t_m}^n + \mathrm{A}.$$

A désigne un ensemble de termes qui tendent vers zéro parce que chacun d'eux contient les facteurs évanouissants $\delta_{t_1}^n$ et $\delta_{t_2}^n$, tandis que les facteurs $\frac{dt_i}{d\lambda}$ pour $i > 2$ ne tendent pas vers l'infini, car on suppose que, pour $\lambda = \lambda'$, le groupe de l'involution n'a qu'un point double.

Mais les deux premiers termes de $\pi'(\lambda)$ contiennent les produits $\delta_{t_2}^n \frac{dt_1}{d\lambda}$ et $\delta_{t_1}^n \frac{dt_2}{d\lambda}$ qui, pour $\lambda = \lambda'$, prennent la forme indéterminée $0 \times \infty$. La règle de l'Hospital donne encore

$$\lim\left(\delta_{t_2}^n \frac{dt_1}{d\lambda}\right) = \lim \frac{\dfrac{d\delta_{t_2}^n}{d\lambda}}{\dfrac{}{dt_1}} = \lim \frac{\dfrac{d\delta_{t_2}^n}{dt_2}\dfrac{dt_2}{d\lambda}}{\dfrac{d^2\lambda}{dt_1^2}\dfrac{dt_1}{d\lambda}} = \lim \frac{\dfrac{d\delta_{t_2}^n}{dt_2}\dfrac{dt_2}{dt_1}}{\dfrac{d_2\lambda}{dt_1^2}}$$

$$= -\frac{\dfrac{d\delta_{t'_1}^n}{dt'_1}}{\dfrac{d^2\lambda'}{dt'^2_1}};$$

l'autre produit $\delta_{t_1}^n \frac{dt_2}{d\lambda}$ tend vers la même limite et l'on a

$$\lim \pi'(\lambda) = \pi'(\lambda') = -\frac{2\dfrac{d\delta_{t'_1}^n}{dt'_1}}{\dfrac{d^2\lambda'}{dt'^2_1}}\delta_{t'_2}^n \ldots \delta_{t'_m}^n;$$

remarquons derechef que le dénominateur du second membre n'est pas nul; l'expression $\pi'(\lambda')$ s'annule donc, si l'on a, soit

$$\frac{d\delta^n_{t'_i}}{dt'_i} = 0,$$

soit

$$\delta^n_{t'_i} = 0 \; (i > 2).$$

Calculons ensuite la dérivée de la fonction $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi'(\lambda) = \frac{d\alpha^n_{t_1}}{dt_1}\frac{dt_1}{d\lambda}\delta^n_{t_2}\delta^n_{t_3}\ldots\delta^n_{t_m} + \alpha^n_{t_1}\frac{d\delta^n_{t_2}}{dt_2}\frac{dt_2}{d\lambda}\delta^n_{t_3}\ldots\delta^n_{t_m} + \mathrm{E}$$

$$+ \frac{d\delta^n_{t_1}}{dt_1}\frac{dt_1}{d\lambda}\alpha^n_{t_2}\delta^n_{t_3}\ldots\delta^n_{t_m} + \delta^n_{t_1}\frac{d\alpha^n_{t_2}}{dt_2}\frac{dt_2}{d\lambda}\delta^n_{t_3}\ldots\delta^n_{t_m} + \mathrm{F}$$

$$+ \sum\frac{d\delta^n_{t_i}}{dt_i}\frac{dt_i}{d\lambda}\delta^n_{t_2}\ldots\alpha^n_{t_i}\ldots\delta^n_{t_m} + \Sigma\delta^n_{t_1}\frac{d\delta^n_{t_2}}{dt_2}\frac{dt_2}{d\lambda}\ldots\alpha^n_{t_i}\ldots\delta^n_{t_m} + \Sigma\mathrm{G}_i.$$

E, F et $\Sigma\mathrm{G}_i$ désignent des ensembles de termes qui tendent vers zéro parce qu'ils contiennent les facteurs $\delta^n_{t_1}$ et $\delta^n_{t_2}$, ou l'un des deux, et le facteur $\frac{dt_i}{d\lambda}$ qui, pour $i > 2$, ne tend pas vers l'infini.

Le tableau ci-dessus contient en outre, dans les termes écrits *in extenso*, sauf deux dont nous parlerons plus tard, les produits $\delta^n_{t_2}\frac{dt_1}{d\lambda}$ et $\delta^n_{t_1}\frac{dt_2}{d\lambda}$ dont nous avons déterminé la limite; l'ensemble des termes en question a pour limite

$$\mathrm{M}' = -\frac{2\frac{d\delta^n_{t'_1}}{dt'_1}}{\frac{d^2\lambda'}{dt'^2_1}}\left\{\frac{d\alpha^n_{t'_1}}{dt'_1}\delta^n_{t'_2}\ldots\delta^n_{t'_m} + \Sigma\frac{d\delta^n_{t'_i}}{dt'_1}\ldots\alpha^n_{t'_i}\ldots\delta^n_{t'_m}\right\}$$

Restent deux termes de $\varphi'(\lambda)$ que l'on peut réunir comme suit

$$N = \delta^n_{t_3} \ldots \delta^n_{t_m} \left(\frac{d\delta^n_{t_1}}{dt_1} \frac{dt_1}{d\lambda} \alpha^n_{t_2} + \alpha^n_{t_1} \frac{d\delta^n_{t_2}}{dt_2} \frac{dt_2}{d\lambda} \right) = \delta^n_{t_3} \ldots \delta_{t_m} . P.$$

Le facteur P prend, pour $\lambda = \lambda'$, la forme indéterminée $\infty - \infty$; pour chercher sa limite, écrivons-le de la manière suivante :

$$P = \frac{\frac{d\delta^n_{t_1}}{dt_1} \alpha^n_{t_2} + \alpha^n_{t_1} \frac{d\delta^n_{t_2}}{dt_2} \frac{dt_2}{dt_1}}{\frac{d\lambda}{dt_1}};$$

nous aurons, en dérivant haut et bas,

$$P' = \lim P = \lim \frac{1}{\frac{d^2\lambda}{dt_1^2} \frac{dt_1}{d\lambda}} \left(\frac{d^2\delta^n_{t_1}}{dt_1^2} \frac{dt_1}{d\lambda} \alpha^n_{t_2} + \frac{d\delta^n_{t_1}}{dt_1} \frac{d\alpha^n_{t_2}}{dt_2} \frac{dt_2}{dt_1} \frac{dt_1}{d\lambda} \right.$$

$$\left. + \frac{d\alpha^n_{t_1}}{dt_1} \frac{d\delta^n_{t_2}}{dt_2} \frac{dt_2}{dt_1} \frac{dt_1}{d\lambda} + \alpha^n_{t_1} \frac{d^2\delta^n_{t_2}}{dt_2^2} \left(\frac{dt_2}{dt_1}\right)^2 \frac{dt_1}{d\lambda} + \alpha^n_{t_1} \frac{d\delta^n_{t_2}}{dt_2} \frac{d^2t_2}{dt_1^2} \frac{dt_1}{d\lambda} \right)$$

Divisons haut et bas par $\frac{dt_1}{d\lambda}$, remarquons que le facteur $\frac{d^2\lambda}{dt_1^2}$ du dénominateur ne tend pas vers zéro; nous aurons, en nous rappelant les limites de $\frac{dt_2}{dt_1}$ et de $\frac{d^2t_2}{dt_1^2}$ trouvées plus haut :

$$P' = \frac{1}{\frac{d^2\lambda'}{dt_1'^2}} \left(2 \frac{d^2\delta^n_{t'_1}}{dt_1'^2} \alpha^n_{t'_1} - 2 \frac{d\alpha^n_{t'_1}}{dt'_1} \frac{d\delta^n_{t'_1}}{dt'_1} - \frac{2}{3} \frac{\frac{d^3\lambda'}{dt_1'^3}}{\frac{d^2\lambda'}{dt_1'^2}} \frac{d\delta^n_{t'_1}}{dt'_1} \right).$$

On a finalement

$$\lim \varphi'(\lambda) = \varphi'(\lambda') = M' + \delta^n_{t'_2} \ldots \delta^n_{t'_m} \,.\, P'.$$

Nous savons déjà que l'évanouissement de $\pi'(\lambda')$ exige

$$\frac{d\delta^n_{t'_1}}{dt'_1} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \delta^n_{t'_i} = 0 \ (i > 2);$$

la première de ces hypothèses annule M′ et tous les termes de P′ sauf le premier; donc, dans cette hypothèse, il faut encore, pour annuler $\varphi'(\lambda')$, ou bien $\alpha^n_{t'_1} = 0$ ou bien $\delta^n_{t'_i} = 0$ $(i > 2)$; la seconde hypothèse annule $\delta^n_{t'_2} \ldots \delta^n_{t'_m}$. P′ et tous les termes de la parenthèse figurant dans l'expression de M′ sauf le terme qui contient $\alpha^n_{t'_i}$; donc il faut encore, ou bien $\alpha^n_{t'_i} = 0$, ou bien $\frac{d\delta^n_{t'_1}}{dt'_1} = 0$, ou enfin $\delta^n_{t'_j} = 0$ $(j \gtrless i)$.

L'évanouissement simultané de $\pi'(\lambda')$ et de $\varphi'(\lambda')$ exige donc, si l'on exclut l'hypothèse $\alpha^n_{t'_i} = 0$ $(i \geqslant 1)$, l'un ou l'autre des couples de conditions

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\delta^n_{t'_1}}{dt_1} = 0, \\[2ex] \delta^n_{t'_i} = 0 \ (i > 2) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \delta^n_{t'_i} = 0 \\[2ex] \delta^n_{t'_j} = 0 \ (i, j > 2). \end{array}\right.$$

Les fonctions $\psi'(\lambda')$ et $\chi'(\lambda')$ ne diffèrent de $\varphi'(\lambda')$ que par la substitution de β ou γ à α. L'évanouissement simultané de $\pi'(\lambda')$, $\varphi'(\lambda')$, $\psi'(\lambda')$, $\chi'(\lambda')$ exige donc les conditions que nous venons de trouver si l'on écarte l'hypo-

thèse de l'évanouissement simultané de α_{ii}^n, β_{ii}^n, γ_{ii}^n, δ_{ii}^n, hypothèse que nous avons déjà dû rejeter au début de ce travail.

Donc, pour abaisser de deux unités l'ordre du lieu géométrique quand un groupe de l'involution a un point double à l'infini sur la courbe, il faut que ce groupe contienne encore deux autres points à l'infini de la courbe; l'un de ces derniers peut se confondre avec le premier, la courbe étant tangente au plan de l'infini.

Comme précédemment, les indices i et j peuvent être égaux dans les dernières formules, de sorte que l'ordre du lieu s'abaisse encore de deux unités quand un groupe de l'involution a deux points doubles à l'infini sur la courbe.

En continuant de même, on peut établir qu'il y a une réduction de i unités dans l'ordre du lieu géométrique quand un groupe de l'involution contient $i + 1$ points distincts à l'infini sur la courbe donnée; mais il paraît difficile d'exprimer la réduction qui s'opère quand un groupe de l'involution contient des points multiples en différents points à l'infini de la courbe.

En tout cas, les réductions dues à des groupes distincts de l'involution s'additionnent.

Le théorème est indépendant du nombre des variables. Il fournit un très grand nombre de cas particuliers; pour simplifier les énoncés, nous supposerons toujours que les courbes données, gauches ou planes, ne touchent pas le plan ou la droite de l'infini.

Voici d'abord quelques corollaires concernant les courbes planes rationnelles (nous appelons centre d'une sécante le centre des moyennes distances des intersections de la sécante avec la courbe).

Le centre d'une sécante à une courbe unicursale d'ordre n parcourt une courbe du même ordre quand la sécante décrit un faisceau. Quand ce faisceau est parallèle, la droite de l'infini en fait partie, l'ordre du lieu géométrique s'abaisse de $n - 1$ unités, le centre de la sécante parcourt une droite; c'est le théorème des diamètres, connu pour une courbe de genre quelconque. Quand le sommet du faisceau est au point de rencontre de i asymptotes, le centre des sécantes décrit une courbe d'ordre $n - i$; si ce nombre est nul, le centre des sécantes est un point fixe; donc quand toutes les asymptotes d'une courbe se coupent en un même point, celui-ci est le centre de toutes les sécantes qui y passent.

Les coniques d'un faisceau, dont i points de base sont sur la courbe, découpent sur cette courbe des groupes d'une involution I_1^{2n-i}; les centres de ces groupes sont sur une courbe d'ordre n en général; — d'ordre $n - 1$ si une des coniques du faisceau a deux directions asymptotiques ou une asymptote en commun avec la courbe; — d'ordre $n - 2$ si une des coniques du faisceau a deux asymptotes communes avec la courbe, etc.; — ces centres décrivent une droite si une des coniques du faisceau dégénère en deux droites dont une à l'infini; ce dernier cas est réalisé pour un faisceau de cercles, mais alors il faut que la courbe donnée ne soit pas circulaire.

Voici maintenant quelques propriétés de courbes gauches.

Les milieux des cordes d'une cubique gauche qui font partie d'un même système réglé décrivent en général une cubique gauche, conjuguée de la première sur la quadrique support du système réglé; les courbes ont cinq

points communs, dont trois à l'infini et deux aux contacts des rayons du système réglé tangents à la courbe donnée. Ces milieux décrivent une conique quand la quadrique en question a pour génératrice une asymptote de la cubique primitive ou une corde à l'infini de cette courbe; dans ce dernier cas, la quadrique est un paraboloïde. Ces milieux décrivent une droite quand deux asymptotes ou une asymptote et une corde à l'infini de la cubique sont des rayons du système réglé.

Les triangles découpés sur une cubique gauche par un faisceau de plans ont leurs centres en général sur une autre cubique gauche ayant mêmes directions asymptotiques que la première. Mais cette dernière courbe se réduit à une conique quand l'axe du faisceau rencontre une asymptote de la courbe et les asymptotes de cette conique sont parallèles aux deux autres asymptotes de la cubique gauche donnée. Quand l'axe du faisceau rencontre deux asymptotes, le lieu des centres des triangles est une droite parallèle à la troisième asymptote; pour chaque plan du faisceau, le triangle découpé par la cubique et le triangle découpé par les asymptotes ont même centre de gravité, et ceci généralise un théorème connu sur l'hyperbole plane (*). Le lieu est encore une conique quand l'axe du faisceau et deux des asymptotes de la courbe sont parallèles à un même plan. Le lieu est encore une droite quand le faisceau est parallèle. Quand l'axe du faisceau rencontre les trois asymptotes en des

(*) Voir notre note *Sur la polarité dans les courbes gauches*, etc. (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1900.)

points A, B, C, le centre du triangle est un point fixe coïncidant avec le centre des points A, B, C.

Dans une quartique gauche rationnelle, les milieux des cordes qui rencontrent une bisécante fixe sont sur une autre quartique gauche rationnelle, en général; — sur une cubique si la bisécante rencontre une asymptote ou si la bisécante et deux directions asymptotiques sont parallèles à un même plan; — sur une conique si la bisécante rencontre deux asymptotes, ou si la bisécante est parallèle à une arête diagonale de l'angle tétraèdre formé par les quatre directions asymptotiques, ou si la bisécante et deux des directions asymptotiques sont parallèles à un même plan en même temps que la bisécante rencontre une troisième asymptote.

Les centres des trisécantes de la quartique rationnelle sont sur une autre quartique, en général; — sur une conique quand la courbe est tracée sur un paraboloïde.

Les groupes de quatre points découpés par les plans d'un faisceau sur la quartique gauche rationnelle ont leurs centres sur une autre quartique, en général; — sur une cubique quand l'axe du faisceau rencontre une asymptote; — sur une conique quand il en rencontre deux; — sur une droite quand cet axe est à l'infini ou rencontre trois asymptotes; — ces groupes de points ont le même centre quand l'axe du faisceau est une des deux droites (supposées réelles) qui rencontrent les quatre asymptotes.

Soit une courbe rationnelle gauche d'ordre n et de rang r (ordre de la développable osculatrice). Les contacts des tangentes parallèles à un plan variable forment une involution I_2^r. Si le plan variable pivote autour d'un

axe g, on a une involution I_1^r. Soit J un point à l'infini de la courbe et soit J' le point à l'infini de la droite g; la droite JJ', passant par un point double J de la développable osculatrice, ne la perce plus qu'en $r - 2$ autres points; donc J est un point double du groupe qu'il détermine dans l'involution I_1^r. Il en est de même pour chacun des n points à l'infini de la courbe; donc le centre des moyennes distances des groupes de cette involution I_1^r est un point fixe. Ce point reste le même lorsque la droite g se déplace dans un plan; donc il reste fixe, quel que soit le plan auquel les tangentes sont parallèles. Ce théorème est de M. Fouret (*).

Soit encore la courbe rationnelle gauche d'ordre n et de rang r, et soit O un point fixe dans l'espace. En un point P de la courbe menons la tangente et du point O le plan perpendiculaire à cette tangente; ce plan coupe la courbe en n points Q. Inversement, joignons O à un point Q de la courbe et menons un plan perpendiculaire à ce rayon; il y a r tangentes parallèles à ce plan, dont les contacts sont r points P. La correspondance entre les points P et Q étant (n, r), il y a $n + r$ coïncidences, donc du point O on peut mener $n + r$ plans normaux. Les pieds des plans normaux issus d'un point variable de l'espace forment une involution I_3^{n+r}. Les pieds des plans normaux abaissés des points d'une droite forment une I_1^{n+r}. Le lieu du centre de gravité de ces groupes de points devrait être une courbe d'ordre n. Mais comme les n points à l'infini de la courbe appartiennent à un

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1890.

même groupe de l'involution, le lieu se réduit à une droite.

On pourrait allonger encore la liste des propriétés qui se déduisent de notre premier théorème. Nous croyons inutile d'énoncer les propositions qui se déduisent des précédentes par collinéation. Et nous rappelons aussi pour mémoire que, par dualité, on peut conclure à certaines relations angulaires.

Nous essayerons seulement d'étendre notre théorème à d'autres courbes que les courbes rationnelles. Le lecteur discernera sans peine jusqu'à quel point se généralisent les corollaires énoncés ci-dessus.

Soient

$$f(x, y, z; t) = 0, \quad \varphi(x, y, z; t) = 0, \quad \psi(x, y, z; t) = 0$$

trois équations entières, non homogènes, contenant les coordonnées cartésiennes x, y, z et le paramètre t. Elles définissent une courbe gauche, d'ordre n par exemple, dont on obtient une autre représentation en éliminant t. Les courbes gauches intersections totales de deux surfaces (et par suite toutes les courbes planes) sont des cas particuliers de celles que nous considérons; on les obtient en prenant, pour la fonction ψ, simplement la forme $x - t$. Soit en outre

$$F(t) + \lambda G(t) = 0$$

une relation entière non homogène, du $m^{\text{ième}}$ degré en t, contenant, au premier degré, le nouveau paramètre λ.

A toute valeur de λ répondent m valeurs de t; à chaque valeur de t, par exemple, μ points de la courbe gauche;

donc à chaque valeur de λ répond un groupe de μm points de la courbe.

Un point de la courbe n'appartient, en général, qu'à un seul de ces groupes. Mais il y a des exceptions : pour certains points de la courbe, il se peut que les équations f, φ, ψ soient compatibles pour plus d'une valeur de t. Seulement de tels points singuliers ne sont qu'en nombre fini et nous pouvons supposer qu'aucun d'eux n'est à l'infini.

Entre les quatre équations données, éliminons y, z, t : nous aurons une relation de la forme

$$\Phi(\lambda)x^{m\mu} + \Psi_1(\lambda)x^{m\mu-1} + \ldots = 0,$$

donnant les abscisses x des points du groupe répondant à chaque valeur de λ, ou donnant les valeurs de λ caractéristiques des groupes contenant chacun un point dans un plan $X = x$ parallèle à YOZ. Comme la courbe gauche est d'ordre n, l'équation précédente est du degré n en λ. Pour $\Phi(\lambda) = 0$, l'équation en x a une racine infinie et réciproquement. Donc $\Phi(\lambda) = 0$ détermine les groupes de points qui ont un point à l'infini sur la courbe.

On peut supposer les plans coordonnés choisis de façon qu'aucun point à l'infini de la courbe ne soit dans un de ces plans. Alors, si l'on élimine x, z, t, on a une équation en y qui a aussi $\Phi(\lambda)$ pour coefficient de son premier terme; soit

$$\Phi(\lambda)y^{m\mu} + \Psi_2(\lambda)y^{m\mu-1} + \ldots = 0$$

cette équation; et l'on aura pareillement

$$\Phi(\lambda)z^{m\mu} + \Psi_3(\lambda)z^{m\mu-1} + \ldots = 0;$$

ces égalités sont du degré n en λ.

Soit C le centre de gravité des points d'un groupe mobile correspondant à une valeur variable de λ; les coordonnées de C sont

$$x_1 = -\frac{\Psi_1(\lambda)}{m\mu\Phi(\lambda)}, \quad y_1 = -\frac{\Psi_2(\lambda)}{m\mu\Phi(\lambda)}, \quad z_1 = -\frac{\Psi_3(\lambda)}{m\mu\Phi(\lambda)}.$$

Ces relations définissent une courbe rationnelle d'ordre n.

Cette courbe se réduit à l'ordre $n-1$ quand les fonctions $\Phi, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ admettent un facteur commun $\lambda - \lambda_1$, ou quand ces fonctions s'annulent pour une même valeur λ_1 de λ. Mais, dans ce cas, les équations précédentes en x, en y, en z ont chacune deux racines infinies, c'est-à-dire que deux points à l'infini de la courbe appartiennent à un même groupe λ.

Il ne faut pas que ces deux points à l'infini appartenant à un même groupe soient distincts : si, pour $\lambda = \lambda_1$, le groupe a un point double à l'infini, les équations en x, en y, en z auront chacune deux racines infinies et les quatre fonctions Φ, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 seront divisibles par $\lambda - \lambda_1$.

Pour étudier les cas où la réduction de l'ordre du lieu dépasse l'unité, il faudrait analyser les fonctions $\Phi, \Psi_1, \ldots$ et les autres coefficients des équations précédentes, ce qui semble devoir exiger des calculs pénibles.

Terminons par un court aperçu historique et bibliographique.

L'article de M. Berzolari *(Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven)* dans *Encyclopädie* fournit (pp. 397 et suiv.) de très nombreux renseignements et montre que beaucoup d'auteurs se sont occupés de questions analogues à celle que nous venons de traiter.

La plupart de ces auteurs considèrent les courbes planes et recherchent seulement les cas où le centre de gravité d'un groupe mobile de points reste fixe; le premier résultat, dans cette direction, est dû à Chasles. Toutefois M. Humbert (*), utilisant les fonctions fuchsiennes et le théorème d'Abel, a donné un grand nombre de propriétés et, dans quelques-uns de ses théorèmes, le centre considéré décrit une droite.

Les extensions à l'espace ont eu surtout en vue les surfaces et bien plus rarement les courbes gauches; nous avons cité ci-dessus un théorème de M. Fouret sur ces courbes.

De même que nous avons été arrêté par des difficultés de calcul quand il s'est agi de passer aux dérivées secondes, de même les auteurs précédents se sont trouvés devant des obstacles du même ordre. En effet, Liouville (**) donne bien la composition des termes extrêmes ainsi que du second terme et de l'avant-dernier dans la résultante de deux équations, mais il n'étend pas la règle. Plus tard il a indiqué de quoi dépendent les autres termes, mais sans formuler la loi de dépendance. Malgré leur manque de précision inévitable, ses résultats se sont montrés féconds et ont été utilisés heureusement par M. Fouret (***).

Si notre travail peut prétendre à quelque originalité, celle-ci consiste à considérer directement les courbes et à utiliser le théorème sur le degré des fonctions symétriques.

(*) *Journal de Liouville*, 1887.

(**) *Ibid.* (1841 et 1844).

(***) *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1890.

Sur un alliage de thorium et de nickel; par Ed. Chauvenet.

Moissan et M. Hönigschmidt (1) d'une part, M. Matignon (2) de l'autre, ont essayé de préparer le thorium métallique en réduisant par le sodium le chlorure double de potassium et de thorium, ou le chlorure de thorium. Ces savants ont ainsi obtenu un mélange de métal et d'oxyde, la teneur en thorine variant de 10 à 25 °/₀.

J'ai repris cette expérience en opérant avec du lithium, du chlorure de thorium bien cristallisé et exempt d'eau et du chlorure de potassium ou du chlorure de lithium, dans une nacelle en nickel renfermée dans un tube de même métal et dans lequel je faisais le vide.

J'espérais, dans ces conditions, obtenir du thorium métallique. Il n'en est rien; le thorium réagit avec le nickel, l'attaque de la nacelle le montre d'ailleurs suffisamment, pour donner un composé qui se présente soit en lamelles grises, soit en poudre pyrophorique noire, et auquel l'analyse semble attribuer la formule Th^2Ni.

$$2ThCl^4 + 8Li + Ni = 8LiCl + Th^2Ni.$$

Cette formule prouverait l'existence d'un alliage bien défini.

Résultats de l'analyse :

	I	II	Théorie pour Th^2Ni :
Th °/₀	88.51	88.57	88.72
Ni °/₀	11.56	11.32	11.28

(1) *Annales de chimie et de physique*, 8e série, 1906.

(2) Matignon et Delépine, *Comptes rendus*, pp. 132-137, 1901.

Malgré toutes les précautions prises dans la manipulation, cet alliage renferme 10 % de thorine.

L'alliage pyrophorique s'enflamme spontanément si on le pulvérise finement dans un mortier, ou si on le dessèche à l'étuve vers 115°; aussi suis-je obligé de le laver à l'alcool et à l'éther, et de le dessécher dans une cloche à acide sulfurique.

Chauffé à 60° dans un courant d'oxyde de carbone, il ne donne point de nickel carbonyle; à 400°, il décompose ce gaz avec dépôt de carbone sur la nacelle.

L'acide chlorhydrique dissout rapidement cet alliage, tandis qu'il attaque très difficilement le nickel pur.

Le nickel est attirable à l'aimant, cet alliage est inactif à son action.

Laboratoire de chimie de la Faculté des sciences
de l'Université de Montpellier. (27 juin 1908.)

OUVRAGES PRÉSENTÉS.

Bambeke (*Ch. Van*). Considérations sur la genèse du névraxe, spécialement sur celle observée chez le Pélobate brun (*Pelobates fuscus* Wagl.). Liége, 1907; extr. in-8° (17 p., 2 pl.).

Mourlon (*Michel*). Compte rendu sommaire de l'excursion géologique à Forest lez-Bruxelles, le dimanche 29 mars 1908. Liége, 1908; extr. in-8° (5 p.).

— Sur l'étendue du Famennien de la montagne de Froide-Veau (Dinant) et ses conséquences pour l'exploitation des carrières à pavés. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (8 p.).

— Allocution prononcée à l'occasion de la mort d'Albert de Lapparent. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (2 p.).

Jottrand (*Émile*). La question du téléphone en Belgique. Conférence. Mons, 1908; in-4° (11 p.).

Stuyvaert (*M.*). Théorie de la parabole gauche par la géométrie victorielle. Mons, 1907; extr. in-8° (12 p.).

Bruxelles. *Commission de la Belgica*. Géologie. Les glaciers, par H. Arctowski.

— Zoologie. Scaphopoden; von L. Plate — Cirripedia; by P. Hoek.

— Turbellarien; von L. Böhmig. — Pennatuliden; von Hector Jungersen.

Bruxelles. *Commission de la Belgica.* Physique du globe. Mesures pendulaires; par G. Lecointe.

— Océanographie. Relations thermiques; par H. Arctowski et Hugh Robert Mill.

—

Sobotky (*J.*). Deskriptivní geometrie promítáni parallelního. Prague, 1906; in-8°.

Ludwig (*Adolf*) et *Witavsky* (*L.*). Rationalität von Potenzsummen; Beweis des Fermatschen Satzes. Vienne, 1908; extr. in-8° (10 p.).

Klimmer. Tuberkuloseschutzimpfung der Rinder mit nichtinfektiösen Impfstoffen. Leipzig, 1908; extr. in-4° (166 p.).

Berlin. *Kön. preuss. Institut.* Veröffentlichungen : Bericht für 1907. Meteorologische, magnetische Beobachtungen u. s. w. im Jahre 1904-1905. In-4°.

—

Balch (*Thomas-Willing*). The law of Oresme, Copernicus and Gresham. Philadelphie, 1908; in-8° (21 p.).

—

Gourdon (*Ernest*). Expédition antarctique française (1903-1905) commandée par le Dr Charcot : Géographie physique-Glaciologie-Pétrographie. Paris, 1908; in-4° (VIII-214 p., carte et planches).

—

OXFORD. *University Observatory*. Astrographic Catalogue 1900·0. Oxford section dec. + 24° to + 32°, under the direction of Herbert Hall Turner, vol. I-IV. Edimbourg, 1906-1908; 4 vol. in-4°.

TEDDINGTON. *The national physical laboratory*. Report for the year 1907.

—

ROME. *R. Ufficio geologico*. Carta geologica delle Alpi occidentali. 1908 (carte in-plano).

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — N° 8.

CLASSE DES SCIENCES.

Séance du 1er août 1908.

M. J. Deruyts, vice-directeur, occupe le fauteuil.

M. le chevalier Edm. Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. C. Malaise, Ch. Van Bambeke, Alfr. Gilkinet, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, M. Mourlon, P. De Heen, C. le Paige, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Jorissen, G. Cesàro, Ch.-J. de la Vallée Poussin, *membres;* A. Rutot, V. Willem et Alex. de Hemptinne, *correspondants.*

MM. Julien Fraipont, directeur, Ch. Francotte et Paul Pelseneer ont motivé leur absence.

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts fait connaître que le Gouvernement belge a été invité à se faire représenter au Congrès international pour combattre la tuberculose, qui se tiendra à Washington du 21 septembre au 12 octobre prochains.

« Je vous serai obligé, ajoute ce haut fonctionnaire, de bien vouloir me faire savoir si parmi les membres de l'Académie il s'en trouve qui désirent être délégués officiellement à cette réunion.

» Cette délégation aura un caractère purement honorifique. »

Aucun membre ne s'est fait inscrire.

— Le Sénat de l'Université de Cambridge fait savoir qu'il a décidé de commémorer le centenaire de Charles Darwin, né le 12 février 1809, et le cinquantième anniversaire de son livre sur les *Origines des Espèces* (24 novembre 1859).

Le Sénat de l'Université invite l'Académie royale des sciences à prendre part à cette commémoration, qui aura lieu les mardi 22, mercredi 23 et jeudi 24 juin de l'année 1909.

Il exprime le désir de connaître les noms des délégués à cette manifestation.

— La Société physico-médicale d'Erlangen remercie pour les félicitations et les souhaits de prospérité qui lui ont été adressés à l'occasion de son centenaire.

— Hommages d'ouvrages :

1° *Archives de biologie,* publiées par Édouard Van Beneden et Ch. Van Bambeke, tome XXIII, 4e fascicule;

2° *Sur l'âge des dépôts connus sous les noms de Sable de Moll,* etc.; *Moustérien et Aurignacien; La fin de la question des Éolithes; le Présolutréen ou Aurignacien en Belgique; Essai de comparaison entre le Néolithique de France et de Belgique et celui de la Scandinavie; Les deux grandes provinces quaternaires de la France;* par A. Rutot;

3° *Sur une table d'éléments donnant les facteurs premiers des nombres jusque cent millions*; par Ern. Lebon;

4° *Rapport sur la situation de l'industrie minérale et métallurgique dans la province de Liége en 1907;* par Jos. Libert, inspecteur général des mines;

5° *L'Astronomie ancienne dans l'Inde;* par A. Boutquin.

— Remerciements.

— Travaux soumis à l'examen :

1° *Sur les propriétés physico-chimiques du glycol éthylénique;* par F. Schwers, docteur en sciences. — Commissaires : MM. Spring et De Heen;

2° *Influence de la nature des électrodes sur le potentiel de la décharge disruptive* (1re partie); par A. Odeurs. — Commissaires : MM. A. de Hemptinne et De Heen;

3° *Pour la reconstitution artificielle du diamant;* par Jules Pasquet. — Commissaire : M. Cesàro.

—

PROPRIÉTÉ LITTÉRAIRE ET ARTISTIQUE.

La Classe vote des remerciements à M. Mourlon pour le rapport qu'il a rédigé au sujet de la propriété littéraire et artistique des travaux scientifiques. Ce rapport

est adopté à l'unanimité. Il figure avec ceux de MM. Beernaert (Lettres) et van Duyse (Beaux-Arts) à la fin du *Bulletin* de la Classe des lettres, etc. (août 1908).

RÉSULTATS DU CONCOURS ANNUEL DE 1908.

SCIENCES NATURELLES.

TROISIÈME QUESTION.

On demande des recherches originales concernant la sexualité chez les Sporozoaires.

La Classe a reçu deux manuscrits :

1° *Contribution à l'étude de la sexualité chez les Myxosporidies et chez les Microsporidies* (86 pages et 2 planches) ;

2° *Études sur la sexualité chez les Grégarines* (148 pages, 5 planches et 33 figures), avec la devise : *Correlated with their wide distribution, the sporozoa exibit the utmost diversity of structural and developmental characters* (Minchin).

Commissaires : MM. Francotte, Van Beneden et Van Bambeke.

RAPPORTS.

La Classe décide l'impression au *Bulletin* de la note suivante :

Contribution à l'étude de la conductibilité électrique; par Boleslas Bronislawski. — Rapporteur : M. De Heen.

De l'origine du complément hémolytique et de la nature de l'hémolyse; par P. Nolf.

Rapport de M. Léon Fredericq.

« L'auteur a supprimé les fonctions du foie chez les lapins en leur faisant une fistule d'Eck et liant l'artère hépatique. Chez d'autres, cette première opération a été suivie de l'extirpation totale du foie. Ces animaux meurent très rapidement de convulsions. Si l'on examine le pouvoir hémolytique du sérum du sang agonique et qu'on le compare à celui du sérum prélevé avant l'opération, on constate une diminution considérable du pouvoir hémolytique. Cette diminution est la conséquence de la disparition presque complète de cette partie de l'*hémolysine* que l'on appelle *complément* ou *alexine*.

Chez des lapins auxquels on extirpe tous les viscères abdominaux, sauf le foie, on ne constate rien de pareil.

Il y a une analogie très grande entre cette disparition du complément hémolytique et celle du fibrinogène qui se fait dans les mêmes circonstances, ainsi que l'auteur l'a montré précédemment.

D'autre part, la fixation sur les hématies des deux termes de l'hémolysine, l'*anticorps* et le *complément*, se fait suivant un mécanisme analogue à celle du thrombogène et du fibrinogène sur les leucocytes.

D'après l'auteur, hémolyse et leucolyse (consécutive à la coagulation) sont des phénomènes de même nature.

J'ai l'honneur de proposer l'insertion de l'intéressante note de M. Nolf dans le *Bulletin* de la séance (1). » — Adopté.

---

(1) A cause d'un voyage à l'étranger de M. Nolf, son travail ne pourra être inséré que dans le prochain *Bulletin*.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Quel sens doit-on attacher au mot « dématérialisation »?; par P. De Heen, membre de l'Académie.

Rien ne se perd, rien ne se crée. Tel est sans doute le principe fondamental sur lequel reposent les sciences physiques. Lavoisier le formula pour la première fois d'une manière précise. Pour lui, le mot *rien* signifiait : *aucune quantité de matière pondérable.* Robert Meyer admit, comme on le sait, plus tard, un principe peut-être plus général et qui englobe vraisemblablement le premier : c'est le *principe de conservation de l'énergie.*

Si nous concevons la matière comme une manifestation de l'énergie dans la substance universelle, rien ne s'oppose à ce que nous considérions l'*énergie-matière* comme susceptible de se transformer en une autre, et le mot *rien* signifierait alors : aucune quantité d'énergie.

Nos recherches précédentes nous ont engagé à admettre, à titre d'hypothèse *commode*, que la matière se compose d'un triple enroulement de la substance, à chacun desquels correspond une certaine quantité d'énergie de gyration. A ces trois enroulements correspondraient les trois champs : magnétique, électrique et newtonien.

Lorsque Gustave le Bon fit son immortelle découverte de la radioactivité, il admit avec nous cette opinion qu'il semble que par degrés successifs la matière est susceptible de s'évanouir dans l'univers éthéré. Il y aurait

alors *dématérialisation*, transformation de l'énergie-matière en une autre manifestation de l'énergie.

Le moment est venu maintenant de se demander dans quelle mesure l'expérience confirme cette doctrine et de donner également un sens plus précis au mot *dématérialisation*.

Remarquons, en effet, que la matière étant triple, nous pouvons également concevoir trois degrés de dématérialisation.

La dématérialisation au premier degré sera caractérisée par la destruction de ce que les chimistes appellent l'*atome* et auquel correspondent les manifestations magnétiques ou diamagnétiques.

La *matière* (si toutefois il est encore permis de la désigner sous ce nom) prend alors les caractères de ce que Crookes désigne sous le nom d'*état radiant* et que nous avons désigné également sous le nom d'*infra-électricité* par cela que la manifestation électrique se produit dans cette substance au moment où on oriente ses éléments, au même titre que la manifestation magnétique se produit quand on oriente les éléments atomiques. C'est cette infra-électricité qui constitue les rayons α ou β suivant l'orientation de l'élément et qui s'échappent spontanément de la substance radioactive.

Mais il importe de faire cette remarque importante, qu'il ne peut se produire ici aucun changement de poids. Nous avons uniquement éliminé l'énergie qui correspond à l'enroulement III, tout en laissant subsister les phases qui correspondent aux enroulements II et I qui déterminèrent respectivement les champs électrique et newtonien.

Avant de porter atteinte à l'énergie qui correspond au champ newtonien, il faudrait d'abord éliminer l'énergie qui communique à la matière la faculté de produire des champs électriques.

Il est peu vraisemblable que nos moyens permettent d'obtenir ce résultat. Les remarquables expériences de Landolt confirment cette manière de voir, que les choses se passent pour nous *comme si* la matière *pondérable* était immuable.

En résumé, nous pouvons conclure que théoriquement on peut concevoir la possibilité de l'évanouissement complet de la matière, mais que pratiquement on n'a atteint jusqu'à présent que la première étape.

Sera-t-il possible dans la suite de franchir les deux autres? C'est ce que nous ignorons; mais on peut dire qu'actuellement il n'est pas donné à l'homme d'atteindre cette limite : l'évolution se produit sans doute à travers les âges, toutes les formes de l'énergie apparaissant et disparaissant à travers l'infinité des temps comme la vague qui passe et renaît.

Note. — M. Lorentz pense que l'attraction newtonienne peut être attribuée à cette circonstance qu'il n'y a pas équilibre entre les actions que les électrons des deux signes exercent les uns sur les autres. S'il en était ainsi, tous les corps seraient nécessairement entourés d'un *champ électrique* et non d'un *champ newtonien,* et la prédominance d'un des signes sur l'autre se faisant toujours dans le même sens, tous les corps de la nature, au lieu de s'attirer, se repousseraient.

Larves de Chironomides vivant dans des feuilles; par Victor Willem, correspondant de l'Académie.

J'ai rencontré, très communes dans le lac d'Overmeire et dans certains fossés des environs de Gand, des larves de Chironomides qui, au lieu de s'abriter, comme la plupart des formes similaires, dans des tubes vaseux, se creusent des galeries dans l'épaisseur de tissus végétaux vivants. Semblable particularité est peu connue encore : je trouve seulement signalée, et très accessoirement, l'existence de larves de deux Chironomides indéterminés dans les feuilles d'un Potamogéton (1). J'en ai observé, dès l'année dernière, dans les feuilles de Sparganium, de Stratiotes, dans les pétioles de Nénuphar : leur genre de vie m'a paru digne d'être consigné, en ce moment surtout où les efforts de spécialistes se portent vers ce groupe important encore mal débrouillé.

I.

Les larves du *Sparganium ramosum* s'observent très fréquemment à l'intérieur des feuilles externes de la plante, dans leur région incolore, basale, à 30-60 centimètres sous le niveau de l'eau; elles vivent là dans des galeries rectilignes verticales, obtenues par la suppression des cloisons transversales d'une série des loges

(1) Miall and Hammond, *The structure and life-history of the Harlequin Fly*. Oxford, 1900 (pp. 11 et 35, note 2).

aériennes du parenchyme foliaire. Chaque galerie communique avec le milieu extérieur par deux orifices circulaires, situés l'un au-dessus de l'autre et distants de 2 à 3 centimètres : la larve vit dans un tube rempli d'eau, au sein d'un tissu végétal bourré d'air. Accrochée aux parois de son étui et par ses crochets antérieurs et par ses appendices terminaux, elle agite presque sans cesse son corps non tendu en des ondulations rythmiques, effectuées dans le plan sagittal de l'animal. Le courant d'eau ainsi déterminé dans la galerie va de la tête vers la partie postérieure de la larve. Quelquefois celle-ci, fixée postérieurement, rétracte et allonge, en va-et-vient rythmique, son corps qui joue alors le rôle d'un piston pour renouveler l'eau du tube.

Généralement, la larve est orientée la tête vers le haut, disposition qui favorise l'évacuation des excréments par l'orifice inférieur. La nymphe prend la même position : serrée dans le tube au niveau de son thorax, elle fait onduler son abdomen, dont le mouvement détermine un courant d'eau du haut vers le bas.

Le contenu du tube digestif est constitué, non par des fragments du tissu de la feuille, comme on pourrait s'y attendre, mais par des particules et des débris d'organisme analogues à ceux qui flottent dans l'eau : Desmidiées, Diatomées, Pediastrum, Chlathrocystis, spicules de Spongille, carapaces d'Hydrachnides. Rotifères, avec quelques grains de sable et quelquefois des cellules végétales aérifères étoilées, chez les exemplaires que j'ai examinés. Les larves se nourrissent donc de plankton et le courant qui traverse leurs tubes sert non seulement à assurer leur respiration, mais à leur amener les substances alimentaires.

La galerie est tapissée par un revêtement soyeux, dont la région antérieure sert probablement à la capture des corps flottants qui viennent s'y engluer. Cet enduit interne forme, dans le cadre de chacune des deux lacunes percées par la larve dans l'épiderme foliaire, une sorte de cratère saillant, dont la crête renforcée limite un orifice circulaire d'un quart de millimètre de diamètre. Cette ouverture est incapable de livrer passage à la larve; celle-ci accomplit donc généralement son évolution dans le même tube; elle l'allonge d'ailleurs au besoin, vers le haut et vers le bas, en supprimant de nouvelles cloisons du parenchyme, et en remplaçant, par de nouveaux orifices, les anciens qu'elle ferme d'un voile soyeux. Les larves extraites de leurs étuis sont cependant capables de se creuser, en quelques heures, de nouveaux logis analogues aux anciens.

Deux espèces de Chironomides vivent dans le *Sparganium ramosum*.

La larve du Chironomus auquel M. J.-J. Kieffer donne plus loin le nom de *C. sparganii*, de couleur rouge, atteint une longueur, à son plein développement, d'au moins 12 millimètres. J'en ai représenté (fig. 1) la vue ventrale des pièces buccales; parmi celles-ci, la mandibule surtout est caractéristique en raison de la forme obtuse de ses protubérances et de la bifidité de son sommet. Elle possède quatre tubercules supra-anaux, mais pas de filaments ventraux au onzième segment abdominal.

Chez la nymphe, immédiatement derrière la base des antennes, une paire de protubérances coniques, surmontées d'une petite soie, et se touchant par la base. Les

filaments branchiaux prothoraciques forment une arborisation très fournie, aux ramifications plus nombreuses et moins longues que chez l'autre forme. Chaque membrane latérale de l'avant-dernier segment porte cinq longues soies et, postérieurement, à la face ventrale, quatre-huit épines (fig. 4). Les deux lames du segment terminal sont moins développées que chez l'espèce de la figure 2, mais les soies en sont plus longues; elles sont semblables sur tout le pourtour de la membrane. Dorsalement, les segments abdominaux II-VI portent, en avant, sur la ligne médiane, implantée par une longue insertion longitudinale, une production chitineuse garnie d'épines brunes, rappelant vaguement par sa forme celle d'une épaulette (fig. 5). De plus en plus importantes d'avant en arrière, ces productions atteignent un quart ou la moitié de la longueur du tergite. Les ponctuations chitineuses des tergites abdominaux sont uniformément réparties sur toute la surface; elles manquent dans la région médiane environnant l'insertion de l'épaulette.

La ponctuation uniforme des tergites abdominaux, les dents postérieures de la lame latérale du VIIIe segment, et surtout les productions spéciales que portent certains tergites abdominaux, feraient songer à *Chironomus lobiferus* Say, dont je trouve la description dans la monographie de Johannsen (1), si les appendices dorsaux, très semblables, de cette dernière espèce n'étaient, d'après Johannsen, portés par le bord *postérieur* de *tous* les segments abdominaux, à l'exception du dernier.

---

(1) O.-A. JOHANNSEN, *Aquatic Nematocerous Diptera*. II. *Chironomidae*. New York State Museum, BULLETIN 86, 1905 (p. 233, et pl. 23, fig. 2, 4, 5).

L'imago est décrite plus loin par M. J.-J. Kieffer.

La larve de la seconde espèce est moins trapue et n'atteint que la longueur, un peu moindre, de 11 millimètres. La carapace chitineuse de la tête en est moins épaisse et d'un brun plus pâle; elle est aussi de forme plus large que chez l'espèce précédente. La figure 3 en représente la mandibule et la lèvre inférieure. Pas de filaments branchiaux ventraux.

La figure 2 représente l'extrémité postérieure de la nymphe : la membrane latérale de l'avant-dernier segment porte quatre longues soies et, postérieurement, six ou sept grosses épines. Au dernier segment, la membrane marginale est munie sur la moitié antérieure de son bord, de longs filaments fins; postérieurement, elle porte des soies plus grosses, moins longues de moitié, qui, tout à l'extrémité du corps, forment une sorte de queue hélicoïde grâce à une ondulation de la surface basale. Les régions dorsales des segments II, III, IV, V, VI présentent, en fait de régions à productions chitineuses spéciales, une bande transversale antérieure et deux éminences postérieures, contiguës; de plus, le segment II montre, à son bord postérieur et dans sa moitié médiane, une crête tranchante renforcée par une trentaine d'épines crochues.

Je n'ai pas obtenu d'éclosion de cette espèce.

II.

Des larves d'un autre Chironomide, auquel M. J.-J. Kieffer donne plus loin le nom de *Psectrocladius stratiotis*, se rencontrent, vivant dans des conditions analogues, dans le parenchyme des feuilles périphériques du *Stratiotes*

aloïdes, surtout dans la région basale et décolorée; leurs tubes sont toujours logés dans la région médiane des feuilles, la plus épaisse, entre deux nervures voisines. Les deux orifices en sont plus petits que chez le Sparganium ($^1/_6$ millimètre de diamètre) et moins saillants à la surface de l'épiderme foliaire. Le régime de la larve est le même : j'ai trouvé, dans l'intestin des quelques échantillons examinés à ce point de vue, Clathrocystis, Pediastrum, de petites algues vertes monocellulaires, des diatomées, etc.

La larve, de couleur rouge, a une longueur maximum de 6 millimètres. Les figures 6, 7, 8, 9 en représentent divers organes, que les spécificateurs utilisent généralement pour les diagnoses; pas de filaments ventraux à l'antépénultième (1) segment.

Je ne possède pas, dans mes matériaux, de nymphe de cette espèce.

III.

A la fin du mois de septembre dernier, j'ai observé, au lac d'Overmeire, des feuilles de Nénuphar logeant à la base de leur pétiole, c'est-à-dire à environ 1^m50 sous la surface de l'eau, une ou plusieurs cavités creusées par une larve de Chironomide.

Cette forme a un régime différent des précédentes :

---

(1) Les auteurs cités attribuent aux larves de Chironomides douze segments; j'en compte treize : le douzième portant, à son bord postérieur, les deux touffes dorsales de longues soies, et, bien délimité du précédent avec lequel il est articulé à la manière ordinaire, un treizième, le segment anal, portant deux soies fines dorsales, les quatre tubercules anaux et les deux appendices locomoteurs ventraux.

elle se nourrit non de plankton, mais des tissus de la plante. Le parasite du Nénuphar se trouve logé dans la région périphérique, plus dense, du pétiole, généralement dans l'un des canaux médullaires aérifères agrandi; souvent un réseau de filaments soyeux en recouvre les aspérités de la surface, qui était munie de poils ramifiés ou qui a été déchiquetée par des morsures. La larve attaque la région située immédiatement derrière l'orifice inhalant et ronge les tissus dans la direction de l'extérieur, jusque près de l'épiderme; je ne suis pas sûr qu'aux éléments empruntés à la plante ne se joignent pas quelquefois des matériaux apportés du dehors par le courant d'eau respiratoire.

En se déplaçant à l'intérieur de pétiole, le parasite y creuse ordinairement une galerie longitudinale, plus ou moins irrégulière, qui peut atteindre 8 et 10 centimètres de longueur et qui présente à plusieurs niveaux des paires d'orifices inhalants et exhalants; l'affaissement, en certains points, des parois de la galerie détermine l'apparition, à l'extérieur du pétiole, de sillons longitudinaux profonds, souvent bordés par deux bourrelets. On rencontre aussi parfois des conduits transversaux; la zone centrale de la moelle est rarement attaquée.

La larve du Nénuphar, à laquelle je donne provisoirement le nom de *Chironomus nymphaeae*, peut atteindre 15 millimètres; elle est de couleur rouge et ne présente pas de filaments branchiaux ventraux; mais les protubérances dorsales sont très allongées; de grosses saillies hémisphériques supportent les longues soies dorsales du dernier segment. J'en ai représenté, figures 11 et 12, la mandibule et le labium.

EXPLICATION DE LA PLANCHE.

—

FIG. 1. *Chironomus sparganii.* Bouche de la larve; vue ventrale, × 135.

FIG. 2. Deuxième Chironomide du Sparganium. Extrémité postérieure de la nymphe; vue dorsale schématique (toutes les soies terminales n'ont pas été représentées), × 50.

FIG. 3. *Idem.* Larve : mandibule droite et labium; vue ventrale, un peu oblique, × 90.

FIG. 4. *Chironomus sparganii.* Nymphe : membrane marginale droite de l'avant-dernier segment, épines postérieures; vue dorsale × 275.

FIG. 5. *Idem.* La dernière protubérance épineuse médiane, sur le segment abdominal VI; vue dorsale, × 135.

FIG. 6. Larve de *Psectrocladius stratiotis :* mandibule droite; vue dorsale, × 275.

FIG. 7. *Idem.* Labium; vue ventrale, × 275.

m. position de la maxille.

En 7ᵃ, la pièce médiane du labium est représentée un peu de profil, pour montrer les cinquième et sixième dents latérales, cachées dans la figure 7 par la convexité de la pièce : la flèche indique la trace du plan sagittal.

FIG. 8. *Idem.* Antenne droite; vue ventrale, × 275.

FIG. 9. *Idem.* Les quatre articles terminaux de l'antenne gauche; vue ventrale, × 460.

FIG. 10. *Idem.* Extrémité du corps, de profil, × 45.

FIG. 11. *Chironomus nymphaeae,* larve : mandibule gauche; vue ventrale, × 190.

FIG. 12. *Idem.* Lèvre inférieure; vue ventrale, × 190.

(La plaque dentée médiane porte, au delà de la cinquième dent latérale représentée, une sixième et une septième, de grandeurs décroissantes, masquées dans le dessin par la convexité de la pièce.)

m. Maxille droite.

—

Description de deux nouveaux Chironomides;
par l'abbé J.-J. Kieffer, docteur ès sciences (Bitsch).

Chironomus sparganii n. sp. ♂ ♀.

D'un brun clair; scutellum blanchâtre; bandes longitudinales du mesonotum, metanotum et mesosternum d'un brun noir; balanciers blancs; les bandes du mesonotum sont au nombre de quatre, les deux intermédiaires minces, séparées l'une de l'autre par un espace égal à leur largeur, raccourcies en arrière, où se voit une ligne médiane et longitudinale; bandes externes raccourcies en avant. Yeux glabres, sinueux, minces au tiers supérieur, où ils sont très rapprochés. Antennes du mâle de 14 articles jaunâtres, y compris le basal; 2e article un peu transversal; 3-13 presque trois fois aussi larges que longs; 14e trois fois aussi long que les articles 3-13 réunis, fusiforme à l'extrémité; plumet jaunâtre. Antennes de la femelle composées de sept articles; 2-6 fusiformes, 2-3 fois aussi longs que gros au milieu, à verticille 2-3 fois aussi long que l'article; dernier article cylindrique, plus mince, de moitié plus long que l'avant-dernier, dépourvu de verticille. Palpes à quatre longs articles. Ailes hyalines, nues, avec une tache allongée et à peine distincte, située vers l'extrémité, entre le cubitus et la discoïdale; transversale peu oblique, dépassée par la nervure auxiliaire; extrémité de la 2e nervure quatre fois plus distante du cubitus que de la 1re, située vis-à-vis de l'extrémité du rameau supérieur de la fourche; cubitus droit, non parallèle au bord, aboutissant près de l'extrémité alaire et non dépassé par la nervure costale; extrémité de la discoïdale à peine plus distante de la pointe de l'aile que le cubitus; bifurcation de la posticale

située à peine après la transversale; les deux rameaux presque droits.

Métatarse antérieur du mâle un peu plus long que le tibia; les poils des quatre fémurs et tibias postérieurs 2-3 fois aussi longs que l'épaisseur des pattes; pattes antérieures sans longs poils; peigne des quatre tibias postérieurs conformé comme chez les congénères; empodium filiforme, un peu plus long que les larges pulvilles.

Segment anal du mâle transversal; les deux articles de la pince conformés comme d'ordinaire dans ce genre; lamelle supérieure arrondie en arrière, où elle se prolonge en un stylet fusiforme atteignant l'extrémité des articles basaux de la pince; lamelles intermédiaires glabres, linéaires, courbées en crochet à l'extrémité, élargies et munies de longs poils à leur base; lamelles inférieures deux fois aussi longues que les supérieures, linéaires, pubescentes, atteignant le milieu des articles terminaux de la pince, munies du côté interne de longs poils arqués par en bas et brièvement rameux au bout.

Taille ♂ : 8 millimètres; ♀ : 6 millimètres; abdomen de la femelle deux fois et demie aussi long que le reste du corps. — Gand.

Psectrocladius stratiotis n. s. ♂ ♀.

D'un blanc verdâtre; trois bandes longitudinales sur le mesonotum et mesosternum d'un brun noir; dessus de l'abdomen plus sombre que le dessous; bande médiane du mesonotum divisée par une ligne longitudinale, raccourcie en arrière, les latérales raccourcies en avant; lamelles de l'oviducte blanchâtres, un peu plus longues que larges. Yeux glabres. Palpes de quatre longs articles. Antennes du mâle de 14 articles; le 14e fusi-

forme à l'extrémité, deux fois aussi long que les articles 2-13 réunis. Celles de la femelle composées de 6 articles, les articles 2-5 subcylindriques, deux fois aussi longs que gros, à verticille deux à trois fois aussi long que l'épaisseur de l'article; 6e article deux fois et demie aussi long que l'avant-dernier, graduellement aminci dans sa moitié terminale, sans verticille. Ailes hyalines, nues; nervure auxiliaire dépassant un peu la bifurcation de la posticale, aussi peu marquée que la seconde nervure; 1re nervure bien marquée; extrémité de la 2e de moitié plus rapprochée de la 1re que de la 3e; cubitus ou 3e nervure aboutissant un peu plus près de la pointe alaire que le rameau supérieur de la fourche; discoïdale aboutissant près de la pointe alaire; posticale bifurquée en arrière de la transversale, *son rameau inférieur arqué ou anguleux après le milieu;* transversale très oblique, deux fois aussi longue que la base du cubitus. Tibias antérieurs du mâle sans longs poils, d'un quart plus longs que le métatarse, sans peigne; 5e article trois à quatre fois aussi long que gros; crochets obtus et striés au bout, un peu plus longs que l'empodium qui est filiforme et à longs poils sur le dessous; pulvilles grandes, larges, plus courtes que l'empodium. Tibias postérieurs avec un peigne dense et à spinules libres jusqu'à la base. Lamelle supérieure de la pince graduellement amincie en bec d'oiseau. Article basal de la pince *formant un angle droit avec le lobe situé en son milieu*, article terminal faiblement arqué sur la partie dorsale, droit sur la partie ventrale, un peu aminci aux deux bouts, 4-5 fois aussi long que gros, armé à son extrémité d'un stylet hyalin, sous lequel se trouvent deux courtes soies.

Taille : ♂ 5 millimètres; ♀ 2 millimètres. Larve dans les feuilles de *Stratiotes aloïdes* (Willem). Gand.

—

Contribution à l'étude de la conductibilité électrique; par le Dr Boleslas Bronislawski, ingénieur-électricien, répétiteur de physique à l'Université de Liége.

Le présent travail a pour but d'étudier théoriquement et expérimentalement le rapport qui existe entre les forces extérieures, telles que les ondes électromagnétiques, et la conductibilité des corps qui se trouvent sous l'action de ces ondes.

Notre étude est divisée en trois parties :

I. La première contient l'étude de la nature de l'action des forces extérieures. La question se pose de la manière suivante : Lorsqu'un milieu auquel on applique une différence de potentiel se trouve sous l'action des forces extérieures, ces forces agissent-elles comme si leur action s'ajoutait au travail dû à la différence de potentiel, ou bien agissent-elles seulement comme un agent qui modifie la structure du milieu?

II. La deuxième partie présente l'étude des variations de la conductibilité sous l'action des ondes électromagnétiques et celle du rapport qui existe entre l'absorption des ondes par le milieu et la conductibilité de ce milieu.

III. La troisième partie donne la mesure des variations de la conductibilité.

I. — Action des forces extérieures.

1. — La conductibilité électrique peut être considérée au point de vue de la nature du phénomène ou de sa variabilité.

En connaissant la nature du phénomène, on trouve plus facilement les moyens d'étudier les conditions dans lesquelles peuvent se produire ses variations.

La conductibilité étant l'inverse de la résistance, nous appliquerons tout d'abord à celle-ci l'équation de dimension et nous obtiendrons :

$$R = \frac{E}{I} = \frac{\dfrac{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}}{\dfrac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}} = \frac{T}{L}.$$

D'où la conductibilité :

$$C = \frac{I}{R} = \frac{L}{T} = \text{vitesse.}$$

Ce qui pourrait signifier que la conductibilité est une vitesse. Mais on pourrait se demander à quoi correspond cette vitesse.

P. De Heen (*) a émis la doctrine d'après laquelle la transmission de l'énergie dans l'espace serait due à la variation de l'état de mouvement du milieu.

Il admet donc que l'espace, dans lequel l'énergie peut se propager, est toujours animé d'un mouvement et qu'il suffit de provoquer un changement quelconque dans cet état pour que l'énergie se manifeste (**).

(*) P. De Heen, *Induction électrostatique.*

(**) P. De Heen, *De l'induction de l'énergie*, p. 20. « L'énergie électrique sera capable de se transmettre d'un ion à un autre, chaque fois que l'ion subit une variation de vitesse de gyration. »

On pourrait objecter que si la conductibilité qui est la transmissibilité de l'énergie est due à la variation de la vitesse, elle sera fonction de l'accélération et non de la vitesse, comme le fait présumer l'équation de dimensions.

Mais, d'après la théorie de P. De Heen, le mouvement naturel du milieu organisé est de forme gyrostatique, tandis que ses variations, qui caractérisent la conductibilité, sont de forme oscillatoire.

Aussi, toute variation du mouvement gyrostatique dans un endroit de l'espace impliquerait une vibration longitudinale suivant l'axe du gyrostat et une vibration transversale se propageant d'un gyrostat à l'autre, normalement à l'axe de celui-là.

C'est donc ce mouvement oscillatoire qui constituerait la transmission de l'énergie et la conductibilité serait fonction de la vitesse de ce mouvement (*).

Il en résulte que le milieu peut être conductible, s'il est capable d'entrer en vibration sous l'action des forces extérieures et que cette propriété dépend, non seulement de la nature de la substance, mais aussi des conditions extérieures susceptibles d'influencer la mobilité de la substance.

Un corps conducteur cesse de conduire, lorsque le milieu dans lequel il se trouve le rend insensible à

(*) P. De Heen, *De l'induction de l'énergie*, p. 34. « Il y a donc à considérer trois énergies de mouvement qui se superposent : 1° énergie oscillatoire, relativement très faible et qui ne constitue pour ainsi dire que le *moyen* permettant de réaliser la masse et la transmission ; 2° des énergies gyrostatiques propulsives, lesquelles représentent la presque totalité de l'énergie mise en jeu, et 3° l'énergie de propulsion et d'aspiration. »

l'action des forces extérieures, et un diélectrique devient conducteur, si le milieu le rend mobile.

Cette doctrine fait présumer les variations de la conductibilité sous l'action des forces extérieures.

Nous considérerons, dans la suite, la transmission de l'énergie électrique à trois points de vue :

a. De l'action des forces extérieures considérées comme élément nouveau de l'énergie qui s'ajoute à l'énergie due à la différence de potentiels.

b. De l'action des forces extérieures sur la structure de la substance conductrice.

c. De la forme des forces extérieures agissant sur la substance.

2. — Lorsqu'une force électrique est appliquée à un conducteur, toute action ne se manifeste pas spontanément.

Dans le cas des corps dits conducteurs, la loi d'Ohm ne devient applicable qu'après un certain temps et qu'après une certaine dépense de travail nécessaire pour vaincre l'inertie de l'état du corps.

Le phénomène est analogue à celui du frottement d'un corps à la surface d'un autre corps.

L'intensité du courant ne devient constante qu'à la fin de cette période et la dépense en chaleur du travail électrique reste ensuite constante et proportionnelle à RI^2, donc inversement proportionnelle à la conductibilité.

Lorsque la force électromotrice est appliquée aux diélectriques, le phénomène se manifeste tout différemment.

Au moment où la force électromotrice commence à agir, l'intensité n'est pas constante. La première inten-

sité est grande; elle donne la mesure, non de la conductibilité, mais de la capacité de la couche isolante. Le courant qui perdure plus faible n'est pas constant et n'indique pas la conductibilité vraie de la substance.

L'intensité continue à décroître.

Cet état est appelé par Maxwell « polarisation ». Lorsqu'il est établi, il donne lieu à une force électromotrice intérieure de sens inverse qui dure jusqu'à ce qu'il soit dissipé par la conduction à travers le diélectrique (*).

On peut dire que la période de l'établissement du régime est caractérisée par le phénomène inverse à celui qu'on remarque dans les conducteurs.

Cependant, la différence peut s'atténuer et même disparaître complètement sous l'action des forces extérieures.

P. De Heen démontre (**) que sous l'action de l'aigrette provenant d'une pointe en communication avec une charge électrique, le milieu diélectrique devient conducteur et la charge traverse ce milieu sans subir aucune variation de signe.

P. De Heen appelle ce phénomène « induction électrostatique ».

On pourrait objecter que cette expérience n'est pas exempte de phénomènes étrangers à l'induction électrostatique, et notamment de l'ionisation par convection, et qu'il serait imprudent de tirer une conclusion de cette seule expérience; mais une autre expérience, plus facile à réaliser, vient confirmer le phénomène de l'induction

---

(*) Maxwell, *Électricité et magnétisme*, t. I, p. 559.

(**) P. De Heen, *Induction électrostatique*.

électrostatique, notamment la conductibilisation du milieu diélectrique par les rayons X. On ne peut pas admettre que les rayons X émanant d'une surface diélectrique (le verre de l'ampoule de Crookes) servent de véhicule à des décharges provenant de l'ampoule, mais ils rendent néanmoins le milieu diélectrique conducteur.

Et si l'on établit, dans un milieu diélectrique soumis à l'action des rayons X, une différence de potentiel constante, il s'établira dans ce milieu diélectrique un véritable courant permanent qui perdurera même un peu plus longtemps que l'action des rayons X.

Pour se rendre compte de la nature de cette action extérieure, il faut d'abord examiner comment interviennent les forces extérieures dans la dissipation d'une charge à l'intérieur d'un milieu *invariable*.

L'équation de cette dissipation a été donnée par Maxwell.

Dans un milieu diélectrique, l'induction à travers une *surface* est égale au produit de la force électrique normale par le coefficient de pouvoir inducteur spécifique du milieu (*).

L'équation de Poisson devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi\rho = 0.$$

A la surface de séparation de deux milieux, l'équation caractéristique s'écrira :

$$K_1 \frac{dV_1}{dv_1} + K_2 \frac{dV_2}{dv_2} + 4\pi\sigma = 0,$$

(*) Maxwell, *Électricité et magnétisme*, t. I, p. 104.

v_1 et v_2 étant les normales menées en un point donné de la surface de séparation dans la région positive et dans la région négative.

L'équation de continuité des courants électriques devient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}\right)+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

(où r est la résistance spécifique rapportée à l'unité de volume). Dans un milieu homogène, K et r sont des constantes et l'on trouve :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+4\pi\frac{\rho}{K}=r\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

d'où, en posant,

$$\frac{\partial V}{\partial t}=0,$$

on aura :

$$\rho=Ce^{-\frac{4\pi}{Kr}t};$$

en posant

$$T=\frac{Kr}{4\pi},$$

on obtient :

$$\rho=Ce^{-\frac{t}{T}};$$

d'où

$$\frac{\rho}{\rho}=\text{constante}.$$

Cela signifie que, lorsqu'on considère un instant donné

pendant lequel le potentiel ne varie pas, la variation de la densité par rapport à la densité initiale est constante.

Ce qui montre que les charges intérieures se dissipent suivant une loi qui ne dépend pas de forces extérieures; par conséquent, aucune force extérieure ne pourra maintenir une charge en un point intérieur du milieu, tant que les relations décrites resteront les mêmes (*).

Il en résulte que les forces extérieures n'interviennent pas directement dans la dissipation des charges intérieures et dans l'établissement des courants.

La seule interprétation de l'action extérieure est celle qui assujettit la variation du milieu à l'intervention des forces extérieures.

Les forces extérieures ne s'ajoutent donc pas aux énergies intérieures ; leur action ne fait que modifier la nature du milieu et, *ipso facto*, la transmissibilité de l'énergie électrique.

3. — Plusieurs indices tendent à démontrer que la forme oscillatoire de l'action extérieure est celle qui agit dans le sens de l'accroissement de la transmissibilité.

Ainsi, après le passage des rayons X, la modification du milieu ne disparaît pas de suite.

Sous l'action de cette force extérieure, un diélectrique incapable de transmettre de l'énergie électrique devient conducteur, mais comme la force extérieure n'intervient pas directement dans la transmission de l'énergie, l'énergie dépensée par l'application de cette force perdure dans le diélectrique en le modifiant d'une manière perma-

---

(*) MAXWELL, *Électricité et magnétisme*, t. I, p. 506.

nente, comme cela se voit dans les corps radioconducteurs, ou bien elle se dégage du diélectrique sous forme de radiations, ce qui est le cas des corps fluorescents.

II. — Action des ondes électromagnétiques.

Nous étudions dans ce chapitre l'action des forces extérieures agissant sous forme d'ondes électromagnétiques.

1. — Maxwell établit, dans l'étude des relations qui existent entre l'opacité et la conductibilité électrique, qu'il existe un rapport entre le pouvoir réflecteur du milieu conducteur et son indice de réfraction, d'une part, et la conductibilité électrique, d'autre part.

Il exprime cette relation par l'expression

$$R = I - \frac{2}{cn},$$

c étant la conductibilité en unités électrostatiques et n l'indice de réfraction; cette expression prend la forme

$$R = I - \frac{2}{\sqrt{cT}},$$

T étant la période d'oscillation en secondes. Cette formule est applicable aux métaux.

Les résultats d'observation de Hagen et Rubens (*) s'accordent avec la formule, sauf pour le bismuth.

(*) Hagen et Rubens, *Philosophical Magazine*, 1904, p. 157.

L'expression : $(100 - R)\sqrt{c}$, qui dérive de cette formule, et dans laquelle l'inverse de la résistance d'un conducteur de 1 mètre de longueur et de 1 millimètre carré de section exprimée en ohms, a été trouvée égale à 7.33 (la formule théorique donne 7.23) pour les métaux purs et 7.41 pour les alliages.

Quant au rapport entre la conductibilité et la transparence, Maxwell (*) établit une autre formule, d'après laquelle la portion de la lumière incidente qui sera transmise par une lame de longueur l, de largeur b et d'épaisseur z, sera

$$e^{-2mz} = e^{-4\pi\mu\frac{l}{b}.\,V\,.\,C.}$$

V étant la vitesse de propagation et m le coefficient d'absorption.

Il remarque cependant que la transparence observée est beaucoup plus grande que ne le donnerait la formule.

Si la transparence doit être plus petite pour qu'il y ait accord complet entre la formule et les observations, c'est que l'absorption devra être plus grande.

Donc il résulte déjà de cette constatation qu'un terme pourrait manquer dans la formule de Maxwell et qu'en ajoutant ce terme à cette formule, on la rendrait plus conforme aux résultats d'observation.

Nous avons pensé que ce terme tiendrait au pouvoir réflecteur et qu'en combinant les deux on trouverait un résultat plus juste.

Hagen et Rubens arrivent à la conclusion que les

(*) MAXWELL, *Électricité et magnétisme*, t. II, p. 798.

expériences ne justifient pas la prévision de Maxwell d'après laquelle les transparences des métaux seraient dans le même ordre que leurs conductibilités électriques, au moins en ce qui concerne les radiations de courte longueur d'onde dans le spectre ultra-violet et le spectre visible.

Les écarts s'atténuent quand on considère des radiations de grande longueur d'onde.

Les auteurs arrivent (*) à une autre formule plus exacte :

$$(1 - R)\sqrt{c} = A \text{ (constante).}$$

Si R est assez petit par rapport à l'unité pour qu'on puisse négliger les puissances de R, on pourra présenter cette relation sous la forme

$$\sqrt{c} = A(1 + R),$$

vu que

$$(1 - R)(1 + R) = 1 - R^2,$$

d'où

$$\sqrt{c} = Ae^R,$$

vu que

$$e^R = 1 + \frac{R}{1} + \frac{R^2}{1^2} + \frac{R^3}{1^3} \cdots$$

d'où

$$C = A^2 e^{2R}.$$

Nous retenons cette expression pour montrer qu'elle

(*) Hagen et Rubens, *Drude's Annalen der Physik*, t. XI, 1903, pp. 873 et suiv.

représente un cas particulier de la relation qui existe entre le pouvoir absorbant et la conductibilité électrique.

Avant de préciser, nous ferons remarquer qu'aussi bien la formule de Maxwell que celle de Hagen et Rubens tiennent uniquement compte : l'une, du pouvoir absorbant, et l'autre, du pouvoir réflecteur.

La première néglige la réflexion, la seconde la transparence.

Si, pour une constante, on prenait l'intensité déjà pénétrée dans le milieu conducteur, la formule de Maxwell pourrait suffire ; de même, si on prenait seulement le cas des conducteurs opaques, celle de Hagen et Rubens serait suffisamment complète.

Il est à remarquer que la formule de Maxwell est surtout inexacte lorsqu'il s'agit de longueurs courtes de l'onde.

La conductibilité des métaux est normale quand la longueur d'onde atteint 10μ, ce qui correspond à une période de $3.33.10^{-14}$ secondes (*).

Cette constatation faite par les auteurs s'explique par le fait que l'absorption est beaucoup plus grande pour les longueurs courtes de l'onde.

En conséquence, les formules qui ne tiennent pas compte de l'absorption totale ne peuvent nullement être exactes pour la totalité du spectre.

2. — Les études faites par les auteurs précités démontrent que la conductibilité peut varier sous l'action des

---

(*) Rubens et Hagen, *Ann. der Phys.*, t. XV, 1905, p. 958.

ondes électromagnétiques, sans que la température du corps intervienne pour quelque chose.

Cela devient encore plus évident si l'on établit que la conductibilité est en rapport direct avec l'absorption, car un corps luminescent absorbe, entre autres, tout particulièrement, les rayons qu'il émet lui-même (*) et il n'émet pas toujours les rayons les plus réfrangibles à la haute température.

En effet, Becquerel a établi que, dans certaines substances, la réfrangibilité des rayons émis *diminue* quand la température s'élève; dans d'autres, elle augmente.

Résultat d'observations sur le sulfure de strontium :

Température.	Couleur de phosphorescence.
— 20°	Violet foncé intense.
+ 20°	Violet bleuâtre.
+ 40°	Bleu clair.
+ 70°	Bleu verdâtre.
+ 90°	Jaune verdâtre.
+ 100°	Jaune.
+ 200°	Orangé pâle.

P. De Heen (**) démontre théoriquement que deux corps peuvent émettre des radiations de même intensité sans être en équilibre de température.

(*) O. D. Chwolson, *Traité de physique*, t. II, fasc. I, p. 80.

(**) P. De Heen, *De l'induction de l'énergie*, p. 51. « Deux corps émettant la même radiation avec la même intensité ne sont pas (toujours) en équilibre de température. »

3. — Quant aux corps fluorescents, la manière de voir de Chwolson nous paraît être la plus exacte.

Cet auteur démontre d'abord (*) que la fluorescence est toujours accompagnée d'absorption. Cette absorption donne naissance à des rayons excitateurs, qui peuvent se manifester sous forme quelconque de l'énergie.

Au point de vue qui nous intéresse, les rayons excitateurs peuvent donner naissance à *l'émission des ondes de longueur d'onde identique à celle des ondes incidentes ou bien à l'émission des ondes de réfrangibilité différente.*

Dans le premier cas, il n'y aurait que l'absorption de l'intensité I des ondes identiques; dans le deuxième, leur transformation.

Dans l'un comme dans l'autre, une partie de l'énergie incidente serait absorbée. *Cette énergie absorbée modifie la structure intérieure de la substance*, ce qui fait modifier la conductibilité du corps.

Il y a donc deux sortes d'absorption et deux *causes de la variation de la conductibilité*, l'une provenant de la *diminution de l'intensité* des rayons émis et l'autre de leur *transformation* réfrangible.

Entre cette émission à réfrangibilité modifiée et la réflexion, il y a une certaine analogie, en ce sens que la portion du faisceau émis dans le cas de la fluorescence correspond à celle réfléchie par le corps réflecteur.

Dans les formules concernant la variation de la conductibilité en fonction de la lumière absorbée, le terme de l'émission réfrangible peut être remplacé par le terme correspondant à la réflexion.

(*) O. D. Chwolson, *Traité de physique*, t. II, fasc. I, p. 403.

Les deux sortes d'absorption pourraient être désignées par les noms de : *absorption de l'intensité* (dans la théorie des ondes de Fresnel, elle serait amplitudinale) et *absorption réfrangible.*

4. — Pour trouver le rapport entre la conductibilité et l'absorption, posons

$$C = f(\Sigma I_a),$$

C étant la conductibilité et I_a l'intensité absorbée d'une onde déterminée.

Dans le passage à travers un corps, l'intensité incidente J est réduite à la sortie du corps à la valeur de I_τ, après avoir traversé l'épaisseur du corps x; la fraction $\frac{-dI_\tau}{I_\tau}$ absorbée dans une couche nouvelle est proportionnelle à dx par un facteur m qui représente le coefficient d'absorption relatif à λ (*).

On a donc :

$$I_\tau = Je^{-mx}.$$

L'intensité totale de la radiation incidente étant ΣJ, l'intensité transmise est ΣJe^{-mx} et la fraction de chaque longueur d'onde, primitivement

$$\frac{J}{\Sigma J},$$

devient

$$\frac{Je^{-mx}}{\Sigma Je^{-mx}}.$$

Pour les corps dits à coloration superficielle, la quantité de la fraction réfléchie est ΣJR (R étant le facteur

(*) MASCART, *Traité d'optique*, t. I, p. 332.

relatif à la longueur d'onde λ) et la fraction pour chaque longueur d'onde est

$$\frac{JR}{\Sigma JR}.$$

Si la radiation conserve les mêmes propriétés après n réflexions sous le même angle, l'intensité finale du faisceau réfléchi est

$$\Sigma JR^n$$

et la fraction pour chaque longueur d'onde sera

$$\frac{JR^n}{\Sigma JR^n}.$$

Tel est le cas des métaux.

La portion de la radiation absorbée sera donnée par la différence

$$\Sigma I_a = \Sigma J - [\Sigma J e^{-mx} + \Sigma JR^n].$$

La fonction

$$C = f(\Sigma I_a)$$

prendra la forme

$$C = f[\Sigma J - (\Sigma J e^{-mx} + \Sigma JR^n)],$$

et, pour une intensité donnée :

$$C = f(e^{-mx} + R^n)A,$$

A étant une constante relative à l'intensité incidente et proportionnelle, dans la théorie des ondes de Fresnel, au carré de l'amplitude (a) :

$$J = a^2 \text{ constante.}$$

Nous indiquerons dans la suite par quelle méthode expérimentale nous avons cherché à déterminer cette fonction.

III. — Mesures de la conductibilité en fonction de l'absorption.

Mesure de $C = f(e^{-mx} + R^n)$.

1. — En partant du principe que la conductibilité doit être fonction de l'énergie absorbée, nous avons cherché à déterminer s'il y a une concordance entre les longueurs d'onde absorbées et la variation de la conductibilité.

Nous nous sommes servi, pour cet usage, d'une plaque de verre sur laquelle était disposée une couche d'or. L'épaisseur de la couche était de l'ordre de grandeur colloïdale. La lumière incidente provenait d'un arc électrique.

Dans le premier essai, la lumière blanche de l'arc était projetée sur la plaque de verre sous un angle de 45°.

Un spectroscope placé symétriquement par rapport à la normale sous le même angle de 45° a servi à déterminer les longueurs d'ondes réfléchies par la couche d'or. Les rayons rouges et orangés prédominaient dans ce spectre.

Ensuite le spectroscope a été placé de l'autre côté de la plaque de verre.

La mesure consistait dans la détermination du spectre de la lumière transmise à travers la couche d'or.

Les rayons verts prédominaient dans ce spectre. L'analyse spectrale de l'arc sans l'interposition de la couche d'or montrait le spectre d'émission.

En faisant la différence entre le spectre d'émission,

d'une part, et la somme de deux spectres de la lumière réfléchie et de la lumière transmise, d'autre part, on remarquait l'absence des rayons bleus.

Ce sont donc ces rayons qui ont été absorbés par la couche d'or. On peut en conclure que la conductibilité doit varier davantage sous l'action de la lumière bleue que sous l'action de toute autre lumière simple et presque autant que sous l'action de la lumière blanche.

Pour la mesure des variations de la conductibilité, nous avons utilisé la méthode de Weber, qui consiste dans la production des courants induits par les oscillations d'un cadre métallique autour de la composante horizontale du magnétisme terrestre.

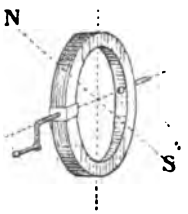


Fig. 1.

Une bobine de 30 centimètres de diamètre (fig. 1) était placée normalement au méridien magnétique, de manière à pouvoir osciller autour d'un axe horizontal (*).

Une extrémité du fil de cette bobine était reliée à l'une des bornes d'un galvanomètre d'Arsonval et l'autre extrémité à la plaque d'or et à l'autre borne du galvanomètre.

L'ensemble de la bobine, de la plaque d'or et du galvanomètre formait un seul circuit, comme l'indique la figure 2.

En faisant tourner la bobine d'une demi-révolution,

(*) Généralement on fait tourner le cadre autour d'un axe vertical : nous le faisons tourner dans un plan perpendiculaire, ce qui, d'ailleurs, ne modifie en rien le flux résultant.

on induit dans la bobine un courant dû à la force magnétique terrestre et la quantité totale d'électricité

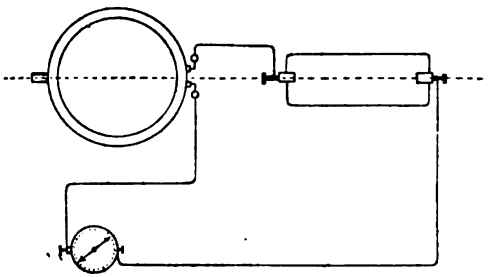


FIG. 2.

transmise par ce courant est, en mesures électromagnétiques :

$$Q = \frac{2gH}{R},$$

où g est le moment magnétique de la bobine par l'unité de courant, H la composante horizontale de la force magnétique terrestre et R la résistance du circuit formé par la bobine, la couche d'or et le galvanomètre.

Si le mouvement de la bobine est suffisamment rapide pour qu'il ne dure qu'une faible fraction de la période d'oscillation du galvanomètre, on aura pour Q une élongation telle que

$$\frac{2Hg}{R} = \frac{H_1}{G} \cdot \frac{T_0}{\pi} \cdot \alpha e^{\frac{\lambda}{\pi} \text{arc. tang.} \frac{\pi}{\lambda}}$$

α étant l'élongation observée, T la période d'oscillation et G la constante du galvanomètre.

Si H est la même pour la bobine et pour le galvano-

mètre, ce qui est facile à vérifier, les deux équations donneront

$$R = 2gG\frac{\pi}{T_0} \cdot \frac{1}{\alpha\beta^{\frac{\lambda}{\pi}\text{ arc. tang.}\frac{\pi}{\lambda}}}.$$

Dans le galvanomètre d'Arsonval, le décrément logarithmique est constant; par conséquent, on peut écrire :

$$R = A\frac{1}{\alpha},$$

ou

$$C = A \,.\, \alpha.$$

Mais nous avons supposé que le temps de la rotation de la bobine est négligeable, ce qui n'est pas tout à fait exact. Pour la première approximation, on peut se contenter du résultat acquis; pour être plus exact, il faut faire des corrections relatives au temps de la rotation.

Comme le montre le photogramme, l'installation se compose d'un arc électrique renfermé dans une lanterne de projections à deux objectifs.

Les deux faisceaux projetés sont employés : l'un pour éclairer la couche d'or renfermée dans une chambre noire, l'autre pour éclairer le miroir du galvanomètre, en passant d'abord par une fente dans un écran noir interposé entre la lanterne et le galvanomètre.

Le premier objectif est muni d'une cuvette contenant une solution d'alun qui réduit l'action calorifique de la source.

Le cadre mobile porte sur son axe un obturateur en feuille d'aluminium.

La chambre noire est munie d'un volet qu'on ouvre un instant avant la mise en rotation du cadre.

L'écran noir porte une échelle qui indique la déviation du miroir.

Les essais ont été faits dans des conditions telles que l'action calorifique de la source était tout à fait négligeable.

Cela était vérifié de la façon suivante : Un thermomètre très sensible, placé auprès de la couche d'or, était chauffé par une source de chaleur obscure de manière à indiquer une faible élévation de la température. La couche d'or ayant été chauffée par la même source, on mesurait les variations de sa conductibilité. On exposait ensuite la couche d'or et le thermomètre à l'action de la lumière à une distance telle que le thermomètre indiquât la même élévation de température et on tenait compte de cette action.

La conductibilité du circuit était d'abord mesurée la couche d'or se trouvant dans l'obscurité, ensuite la couche d'or étant exposée à des lumières de différentes couleurs.

La demi-révolution du cadre s'obtenait par la chute d'un contrepoids déclenché.

Les mesures de la première approximation donnent les résultats suivants :

Lumière incidente.	
Rouge	100
Verte	100
Bleue	175
Blanche	200

La déviation 100 est prise comme unité; c'est en même temps celle qui correspond à l'élongation obtenue par une demi-révolution du cadre, lorsque la couche d'or était maintenue dans l'obscurité.

La courbe des variations de la conductibilité en fonction des couleurs incidentes se présente sous la forme indiquée ci-dessous.

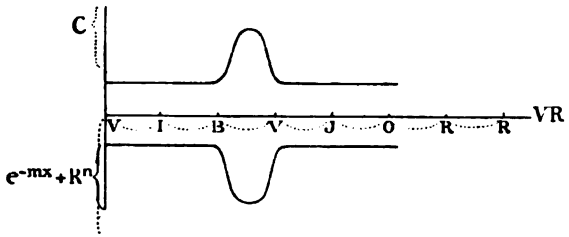


Fig. 3.

Une courbe d'absorption de la lumière par la couche d'or possède la même allure.

Une troisième courbe

$$C = f(e^{-mx} + R^n)$$

s'obtient en prenant pour les abscisses les ordonnées obtenues dans la courbe inférieure et pour les ordonnées celles obtenues au-dessus de l'axe.

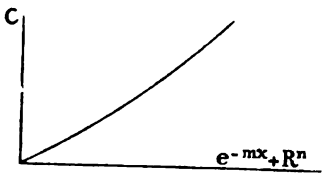


Fig. 4.

Cette courbe étant presque une droite, on pourrait à la limite écrire

$$C = A(e^{-mx} + R^n),$$

d'où

$$\frac{C}{e^{-mx} + R^n} = \text{constante}.$$

Cette formule exprime la proportionnalité entre la conductibilité acquise par un corps sous l'action d'une force extérieure et l'énergie absorbée par ce corps.

Nous arrêtons notre étude sur cette première approximation en résumant les résultats obtenus :

1° Il n'existe aucune différence essentielle entre la propagation de l'énergie dans les corps conducteurs et dans les corps isolateurs.

2° Sous l'action des forces extérieures telles que les ondes électromagnétiques, par exemple, la conductibilité d'un corps peut être sensiblement modifiée.

3° Les forces extérieures modifient la conductibilité en agissant sur la structure des corps. Ces forces appliquées aux diélectriques ne s'ajoutent pas aux forces intérieures qui donnent naissance aux courants.

4° La variation de la conductibilité est en rapport direct avec l'énergie absorbée par le corps.

5° Les variations de la conductibilité sous l'action des ondes électromagnétiques sont indépendantes de l'action calorifique de ces ondes.

On pourrait se demander si les cas de quelques métaux étudiés sont des cas particuliers ou s'il est permis de conclure que les ondes électromagnétiques agissent de la même façon sur tous les corps.

Il nous semble que la généralisation est permise au moins en ce qui concerne les corps dits conducteurs.

Tous les corps semblent absorber une partie de l'énergie des ondes dirigées sur eux, et bien que cette quantité d'énergie absorbée soit très variable d'un corps à l'autre et d'une longueur d'onde à l'autre, la conductibilité doit être toujours influencée par cette absorption.

Les premières études expérimentales de l'action des ondes sur la conductibilité des métaux remontent à la deuxième moitié du XIXe siècle.

Smith (*) a découvert, en 1873, que le sélénium devient plus conducteur sous l'action de la lumière; la modification disparaît très rapidement dès que le corps est ramené à l'obscurité.

Siemens, en 1875 (**), dit qu'en maintenant le sélénium amorphe pendant assez longtemps à 210° et en le refroidissant ensuite, on obtient ce corps sous l'aspect cristallin. Sa conductibilité est alors doublée par la lumière diffuse et décuplée par la lumière solaire directe.

Mercadier (***) a trouvé que la résistance du sélénium diminue d'une manière continue jusqu'à 125° et passe vers 163° par un maximum relatif, qui paraît correspondre à un changement d'état.

D'après Sh. Bidwell (''), le maximum de résistance du sélénium serait entre 20 et 30°. L'action de la lumière paraît instantanée, mais l'effet dure pendant un temps appréciable.

En plaçant entre la source et le sélénium un disque tournant percé d'un certain nombre de trous, Bellati et Romanese (') ont constaté que la résistance moyenne ne change pas quand la vitesse de rotation varie de 1 à 4.

(*) Smith, *Amer. Journ. of sc.*, t. V, p. 301, 1873.

(**) Siemens, *Pogg. Ann.*, t. CLVI, p. 334, 1875.

(***) Mercadier *Compte rendu de l'Acad. des sciences*, t. XCII, p. 1407, 1881.

('') Sh. Bidwell, *Ph. Mag.* (V), t. VI, p. 302, 1881, et t. XX, p. 178, 1885.

(') Bellati et Romanese, *Nouv. Cim.* (3), t. XI, p. 5, 1882.

Majorana (*) trouve que l'accroissement de la résistance est encore sensible au bout de huit secondes.

Boernstein (**) remarque qu'il y a une action de la lumière sur l'or, le platine et l'argent.

Arrhénius (***), en étudiant les sels altérables à la lumière, observe que la conductibilité des couches minces de chlorure et de bromure d'argent obtenues par évaporation de leurs solutions ammoniacales augmente par éclairement.

Nous avons préparé des couches minces de sélénium cristallisé déposées sur des plaques de verre. Le spectre de transparence de ces couches est riche en rouge foncé, le spectre de réflexion donne des teintes bleuâtres.

Nous avons cherché à déterminer, en appliquant la méthode décrite plus haut, s'il y a une concordance entre les raies absorbées par le sélénium et l'accroissement de la conductibilité.

Cette étude n'étant pas encore terminée, nous nous bornons à la constatation du fait que les raies observées dans le spectre de transparence n'ont pas d'action sensible sur la conductibilité du sélénium.

Institut de physique de l'Université de Liége.
Juillet 1908.

(*) Majorana, *Nouv. Cim.* (3), t. XXXV, p. 267, 1894.

(**) Boernstein, *Phys. Mag.* (5), t. III, p. 481, 1877.

(***) Arrhenius, *Wien. Berichte* (2), t. XCVI, p. 837, 1887.

BOLESLAS BRONISLAWSKI, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), nº 8, 1907.

OUVRAGES PRÉSENTÉS.

Rutot (A.). Sur l'âge des dépôts connus sous les noms de sable de Moll, d'argile de la Campine, de cailloux de quartz blanc, d'argile d'Andenne et de sable à facies marin noté *Om* dans la légende de la Carte géologique de la Belgique au 40,000e. Bruxelles, 1908; extr. in-4° (47 p. et 1 carte).

— Les deux grandes provinces quaternaires de la France. Le Mans, 1908; extr. in-8° (35 p.).

— La fin de la question des Éolithes. — Le Présolutréen ou Aurignacien en Belgique.— Essai de comparaison entre le Néolithique de France et de Belgique et celui de la Scandinavie. Le Mans, 1908; extr. in-8° (24 p.).

Arnould (Vincent). Le mode planétaire, chapitres I et II. Bruxelles, 1908; in-8° (50 et 44 p.).

Libert (Jos.). Rapport sur la situation de l'industrie minérale et métallurgique dans la province de Liége en 1907. Liége, 1908; in-8° (88 p.).

Boutquin (A.). L'astronomie ancienne dans l'Inde. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (36 p.).

Godeaux (Lucien). Sur quelques congruences particulières de droites. Mons, 1908; extr. in-8°.

Bruxelles. *Caisse générale d'épargne et de retraite.* Compte rendu des opérations et de la situation de la Caisse pour l'année 1907. In-4°.

Archives de biologie, publiées par Edouard Van Beneden et Charles Van Bambeke, tome XXIII, fasc. 4. Liége, 1908; in-8°.

État Indépendant du Congo. Annales du Musée. Botanique. Étude sur la flore, par Ém. De Wildeman, fasc. 3. 1908; in-4°.

—

Association internationale de sismologie. Comptes rendus de la réunion de 1907 (R. de Kövesligethy). Budapest, 1908; in-4°.

—

Obrecht (A.). Determinacion de la hora y de la latitud geografica de un lugar por la observacion. Santiago de Chile, 1907; in-8° (293 p.).

Bulkley (Duncan). The value of an absolutely vegetarian diet in psoriasis. New-York, 1908; in-8° (14 p.).

New York. *Museum of natural history.* The malaria mosquito; by Dahlgren. 1908, in-8°.

— The Foyer Collection of meteorites; by Edmund Hovey. 1907, in-8°.

—

Leduc (Stéphane). Essais de biologie synthétique. Berlin, 1908; extr. in-8° (7 p. et 2 pl.).

Lebon (Ernest). Sur une table d'éléments donnant les facteurs premiers des nombres jusqu'à cent millions. Paris, 1908; extr. in-8° (22 p.).

—

LONDRES. *Royal Society*. National antarctic Expedition, 1901-1904. Meteorology, part 1 : Observations at winter quarters and on sledge journeys. 1908; in-4°.

Geodetic Survey of South Afrika. Reports on the Geodetic Survey of the Transvaal and Orange River Colony. Londres, 1908; pet. in-folio.

CALCUTTA. *Geological Survey*. A Sketch of the geography and geology of the Himalaya mountains and Tibet, pars I-III; by Colonel Burhard and H. Hayden. 1907; in-4°.

OTTAWA. *Geological Survey of Canada*. General index to Reports, 1885-1906.

— Report of a portion of Northwestern Ontario traversed by the National transcontinental railway (Collins). 1906.

— The Telkwa river and vicinity (Leach). 1907.

— Report on gold values in the Klondike high level gravels (Mac Connell). 1907.

— The falls of Niagara (Jos. Spencer). 1907.

—

ROME. *Società per il progresso delle scienze*. Prima riunione. Parma, 1907.

Onoranze al prof. Alfonso Sella. Rome, 1908; in-8° (55 p.).

—

HARLEM. *Société des sciences*. OEuvres complètes de Christiaan Huygens, tome XI. Travaux mathématiques, 1645-1651. 1908; in-4°.

BATAVIA. *Genootschap van kunsten en wetenschappen.* De Java-oorlog van 1825-1830, deel V. 1908.

—

COPENHAGUE. *Société royale des sciences.* Anecdota cartographica septentrionalia, ediderunt Axel Anthon Bjornbo et Carl S. Petersen. 1908; in-folio.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — Nos 9-10.

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 10 octobre 1908.

M. Julien Fraipont, directeur.

M. le chevalier Edm. Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. J. Deruyts, *vice-directeur;* Éd. Van Beneden, C. Malaise, Ch. Van Bambeke, Alfr. Gilkinet, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, Louis Henry, M. Mourlon, P. Mansion, P. De Heen, C. le Paige, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Jorissen, Paul Pelseneer, A. Gravis, Aug. Lameere, G. Cesàro, Ch.-J. de la Vallée Poussin, *membres;* F. Swarts, Th. Durand, Max. Lohest, A. Demoulin, V. Willem et Alex. de Hemptinne, *correspondants.*

M. Massau exprime ses regrets de ne pouvoir assister à la séance.

CORRESPONDANCE.

La Classe prend notification de la mort d'Alfred Giard, associé de la Section des sciences naturelles, décédé à Paris, le 8 août 1908. — Les condoléances de l'Académie seront exprimées à la veuve du défunt.

— M. le Ministre des Sciences et des Arts envoie :

1° Avec demande d'avis, le rapport que M. le docteur Nolf lui a envoyé sur les résultats de ses études à la Station zoologique de Naples, en 1906. — Renvoi à MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq ;

2° Une requête de M. le docteur Honoré Lams, qui sollicite, pour l'année 1909, l'attribution d'une table d'études à la Station précitée. — Renvoi aux mêmes commissaires, qui ne s'en occuperont qu'après la séance de novembre, date fixée dorénavant pour l'examen des travaux semblables.

— M. Éd. Van Beneden accepte d'aller représenter l'Académie aux fêtes qui auront lieu à Cambridge (Angleterre), les 22, 23 et 24 juin 1909, à l'occasion du centenaire de la naissance de Charles Darwin (12 février 1809) et du cinquantenaire de la publication (24 novembre 1859) de son livre sur les *Origines des espèces*.

— M. Paul Noaillon, docteur en sciences physiques et mathématiques, à Chênée, demande le dépôt d'un pli cacheté dans les archives. — Accepté.

— Hommages d'ouvrages :

1° *Archives de biologie;* par Éd. Van Beneden et Ch. Van Bambeke, tome XXIV, fasc. 1 ;

2° *Interprétation théorique de la loi de Crismer sur l'acidité des beurres;* par G. Cesàro ;

3° *Éléments d'analytique sphérique;* par le même;

4° *Essai de géographie botanique des districts littoraux et alluviaux de la Belgique*: par J. Massart ;

5° *Le mode planétaire*, I et II; par Vincent Arnould;

6° *Commission polaire internationale. Session de 1908 : Procès-verbaux des séances* (présenté par G. Lecointe).

— Remerciements.

— Travaux manuscrits renvoyés à l'examen :

1° *Sur la représentation analytique de la conique dans l'espace;* par Lucien Godeaux. — Commissaire : M. Neuberg ;

2° *Nouvelles recherches sur les fermentations visqueuses;* par Henri Van Laer. — Commissaires : MM. Gilkinet et Henry ;

3° *Sur la faculté des différents corps en mouvement dans l'air de se charger d'électricité, etc.;* par M. Tobiansky d'Althof. — Commissaires : MM. De Heen et de Hemptinne ;

4° *Sur le vol plané de certains oiseaux;* par J. Delaey. — Commissaire : M. Massau.

RAPPORTS.

—

Il est donné lecture des rapports suivants :

1° De MM. Swarts, Cesàro et de Hemptinne, sur un travail de MM. G. De Voldere et G. De Smet, intitulé : *Théorie des gaz analysables par combustion.* — Les rapports seront communiqués aux auteurs avant toute autre décision ;

2° A la demande de l'auteur (M. Bertrand, à Forest), son manuscrit sur les *Principes fondamentaux de la mécanique*, lui sera restitué pour y faire des additions.

—

Nouvelles recherches sur les relations de 4 points; sur le multiplicateur de Jacobi généralisé; par Th. De Donder.

Rapport de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, premier commissaire.

« De ces deux mémoires de M. De Donder, le second surtout m'a intéressé et je ne dirai que quelques mots du premier.

La note *Sur les relations de 4 points* fait naturellement suite à celle publiée sous ce titre dans les *Bulletins* de 1907. Il s'agit d'obtenir la relation des 4 points dans le système de géométrie caractérisé par le groupe de l'espace $x\ y$:

$$p, q, xp - cyq.$$

L'auteur étudie les propriétés de cette relation et la manière de l'obtenir dans diverses hypothèses sur le

paramètre c. Ce sont des recherches qui, sans paraître définitives, présentent un intérêt d'ordre très spécial. J'ai l'honneur de proposer l'insertion de cette note dans le *Bulletin* de la séance.

J'arrive maintenant à la note *Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé.*

Le multiplicateur de Jacobi d'une équation linéaire aux dérivées partielles a d'abord été généralisé par Lie et Mayer (*). Ceux-ci ont étendu la définition aux *systèmes* d'équations linéaires de la manière suivante (**) :

Soit un système *complet* de r équations à n variables indépendantes ($r < n$).

$$(1) \quad . \quad . \quad \begin{cases} A_\rho f = X^\rho_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + X^\rho_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X^\rho_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \\ \qquad (\rho = 1, 2, \ldots r) \end{cases}$$

Un multiplicateur M du système (1) est défini par le système (2).

$$(2) \quad . \quad . \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(MX^\rho_1)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial(MX^\rho_2)}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial(MX^\rho_n)}{\partial x_n} = 0 \\ \qquad (\rho = 1, 2, \ldots r) \end{cases}$$

Un système *jacobien* admet toujours des multiplicateurs, mais un système complet peut n'en pas avoir. Les propriétés classiques du multiplicateur de Jacobi

---

(*) *Math. Ann.*, Bd XI et XII, 1877.

(**) Voy. *Encyclopädie der mathem.* Wiss., Bd II, 1, S. 317 et *Synopsis der höheren Mathem.*, Bd III, S. 368.

s'étendent facilement au multiplicateur ainsi généralisé, *quand il existe.*

M. De Donder a trouvé le moyen de généraliser la définition précédente de manière qu'il n'y ait plus d'exception pour les systèmes complets non jacobiens.

Considérons, avec lui, le système complet (1), qui satisfait à un système d'identités :

$$(A_\rho A_{\rho'} - A_{\rho'} A_\rho) f = \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_\sigma^{\rho\rho'} A_\sigma f$$

$$(\rho, \rho' = 1, 2 \ldots r).$$

Il suffit pour définir le *multiplicateur de M. De Donder* de remplacer le système (2) par le système d'équations complétées :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(MX_1^\rho)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial(MX_2^\rho)}{\partial x_2} + \ldots + \dfrac{\partial(MX_n^\rho)}{\partial x_n} = -M \displaystyle\sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_\sigma^{\rho\sigma} \\ (\rho = 1, 2, \ldots r) \end{cases}$$

Ce système se réduit d'ailleurs à (2) si le système (1) est jacobien.

Toutes les propriétés essentielles du multiplicateur de Jacobi et la théorie du dernier multiplicateur s'étendent au multiplicateur de M. De Donder.

J'ai l'honneur de proposer également l'insertion de cet intéressant travail dans le *Bulletin* de la séance. »

MM. Demoulin et Deruyts déclarent se rallier à ces conclusions, qui sont adoptées par la Classe.

—

Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques (deuxième note); par L. Godeaux.

Rapport de M. Neuberg.

« J'ai l'honneur de présenter à la Classe une petite note de M. Godeaux, intitulée : *Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques.* Cette note est un complément de celle qui figure sous le même titre dans nos *Bulletins.*

Je propose volontiers l'impression de ce petit travail dans nos *Bulletins.* » — Adopté.

—

Sur les propriétés physico-chimiques du glycol éthylénique et de ses solutions dans l'eau; par F. Schwers, docteur en sciences.

Rapport de M. W. Spring, premier commissaire.

« Il y a déjà de nombreuses années que le célèbre chimiste russe Mendeléeff a soumis à un examen minutieux les propriétés physiques de l'alcool éthylique et de ses solutions dans l'eau, à divers titres. Il a constaté nombre de faits dont l'importance pour la théorie atomique n'a pas besoin d'être soulignée. Aussi divers chimistes se sont appliqués à étudier, dans la même direction, d'autres alcools solubles dans l'eau, afin de découvrir dans quelle mesure se modifient les propriétés de ces corps avec l'espèce qu'ils représentent. Un alcool, toutefois, a échappé, jusqu'à présent, à cette étude,

malgré l'intérêt particulier qu'il présentait : c'est le glycol éthylénique ou alcool biatomique, qui réunit, dans sa molécule, deux fois la fonction chimique de l'eau et peut donc être regardé comme un intermédiaire entre celle-ci et les alcools proprement dits.

C'est cette lacune que M. Schwers a comblée. Son travail, tout de mesures et de calculs, ne peut être résumé en quelques lignes; je dois donc me borner à faire connaître les points sur lesquels ont principalement porté les recherches.

L'auteur a eu en vue, surtout, la détermination de la densité du glycol à diverses températures, celle de sa chaleur spécifique, les changements de volume pendant la dissolution dans l'eau et la mesure de la chaleur libérée pendant ce phénomène; bref, il a rempli pour le glycol le programme que Mendeléeff s'était donné pour l'alcool.

La densité du glycol a été déterminée, avec grande exactitude, pour neuf températures différentes comprises entre 11° et 136°5. L'auteur a dressé alors un tableau donnant la densité et le volume spécifique de 5° en 5°, comparativement avec la glycérine, l'éthanol et l'eau.

Il a constaté ensuite que la dissolution du glycol dans l'eau est toujours accompagnée d'une contraction du volume; elle est maximum pour la composition $2\,C_2H_4(OH)_2 + 5\,H_2O$ à 0°. Cette contraction est fonction de la température à laquelle a lieu la solution : elle diminue quand la température s'élève, mais seulement jusque 50° environ; plus haut, elle se relève au contraire. Ce phénomène singulier est bien plus net chez le glycol que chez les autres alcools; c'est ainsi qu'il a passé inaperçu chez ceux-ci, mais M. Schwers a pu le mettre en évidence en soumettant à un calcul attentif les données de

Mendeléeff pour l'alcool et de Frankenheim pour la glycérine ou le méthanol.

Quant à la chaleur spécifique des solutions de glycol dans l'eau, M. Schwers a trouvé qu'elle différait toujours de la chaleur spécifique calculée d'après la composition de la solution; elle lui est toujours supérieure.

La chaleur dégagée pendant la dissolution des deux corps est maximum pour la composition $C_2H_4\ (OH)_2 + 6\,H_2O$. Enfin, la différence entre la chaleur spécifique théorique des solutions et la chaleur spécifique observée est, comme le veut la thermo-dynamique, égale au coefficient de la chaleur du mélange.

Si l'on compare ces propriétés avec celles des alcools monoatomiques et de la glycérine, on voit que le glycol n'occupe pas une position moyenne entre ces deux genres de corps, mais qu'il se rapproche beaucoup plus de la glycérine.

M. Schwers a fourni un travail très consciencieux et très utile; c'est avec plaisir que je propose à la Classe d'en ordonner l'insertion dans les *Bulletins*. »

—

Rapport de M. P. De Heen, deuxième commissaire.

« Je me rallie avec plaisir aux conclusions du savant premier commissaire afin d'ordonner l'impression de l'intéressant et consciencieux travail de M. F. Schwers. »

La Classe décide que le travail de M. Schwers figurera au *Bulletin* de la séance.

—

Recherches sur le potentiel de la décharge disruptive (première partie); par A. Odeurs, docteur en sciences physiques et mathématiques.

Rapport de M. A. de Hemptinne, premier commissaire.

« Un assez grand nombre de physiciens se sont déjà occupés de rechercher l'influence exercée par la nature des électrodes entre lesquelles s'effectue la décharge électrique. Si la distance des électrodes n'est pas trop petite et supérieure à 10^{-4mm}, cette influence a été généralement trouvée faible ou nulle; il y a peut-être une exception pour le magnésium et l'aluminium, mais encore est-elle douteuse. L'auteur a mesuré le potentiel de décharge, non plus entre deux sphères métalliques, mais entre une surface liquide et une sphère métallique, et cela pour des distances explosives variant de 3 à 10 millimètres; il a employé des liquides de diverses natures et des solutions de concentrations variées. Il résulte des mesures que pour une même distance explosive le potentiel de décharge reste sensiblement le même quelle que soit la nature du liquide employé.

Aboutissant à la conclusion générale (peut-être un peu trop absolue) que le potentiel de décharge est indépendant de la nature des électrodes, l'auteur est naturellement amené à conclure que le potentiel dépend principalement de la nature du milieu situé entre les électrodes. C'est ce qu'il a étudié dans la deuxième partie de son travail au point de vue spécial de l'interposition d'un diélectrique solide. Il trouve ainsi que la substitution d'une épaisseur plus ou moins grande d'un diélectrique solide à une même épaisseur d'une couche d'air n'a pas une grande influence sur le potentiel de décharge, principalement pour les grandes distances explosives. Il

étudie également l'effet obtenu lorsqu'on place le diélectrique dans le circuit au lieu de le placer entre les électrodes et que l'on fait varier la capacité du condensateur ainsi formé; enfin il substitue au diélectrique dans le circuit une forte résistance ohmique. Les mesures faites dans ces conditions variées au moyen du micromètre à étincelles semblent prouver que, dans le cas de la décharge alternative rapide, le diélectrique se comporte au point de vue du passage de l'électricité à la fois comme un conducteur de grande résistance et comme un diélectrique. Tout le dispositif expérimental restant le même, lorsqu'un diélectrique est interposé, l'emploi d'un courant continu élève considérablement le potentiel de décharge; dans ces conditions, le diélectrique oppose au passage de l'électricité une résistance beaucoup plus grande.

Le travail de M. Odeurs me semble assez intéressant pour figurer dans les *Bulletins* de la Classe; j'en propose donc l'impression. »

—

Rapport de M. De Heen, deuxième commissaire.

« Je me rallie volontiers aux conclusions de mon savant confrère. Ce qui me paraît particulièrement intéressant dans le joli travail de M. Odeurs, c'est la constatation du fait que, pour l'alternance rapide, le diélectrique se comporte en partie comme un conducteur et que l'emploi du courant continu élève considérablement le potentiel de décharge. C'est là une conclusion à laquelle nous avons été conduit par la théorie. »

La Classe décide l'impression au *Bulletin* du travail de M. Odeurs.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

De l'origine du complément hémolytique et de la nature de l'hémolyse par les sérums; par P. Nolf.

Nos connaissances sur l'origine des hémolysines du sérum manquent d'étendue et de certitude. Ce que l'on sait de science sûre, c'est que, dans les conditions habituelles, elles existent au maximum de concentration dans le plasma du sang et qu'on les retrouve diluées dans les liquides qui dérivent plus ou moins directement du plasma (lymphe, liquides d'exsudat, de transsudat).

Plusieurs auteurs (Pfeiffer et Marx, Wassermann, Deutsch, etc.) ont cependant trouvé que chez les animaux immunisés contre certains microbes, l'anticorps spécifique apparaît dans la moelle osseuse, la rate, le grand épiploon, avant d'exister dans le sang. En raison de l'analogie complète qui existe entre l'anticorps microbien et l'anticorps hémolytique, on sera tenté de supposer que ce dernier aussi peut être sécrété par l'ensemble des cellules mésodermiques auxquelles Metchnikoff attribue la fonction phagocytaire.

Il y a donc là une indication concernant l'origine de l'anticorps. Pour ce qui est de l'autre constituant du complexe hémolysine, le complément, nous savons par les recherches d'un grand nombre d'auteurs, notamment de Falloïse (1), qu'on le trouve dans le plasma circulant

---

(1) Falloise, *Sur l'existence de l'alexine hémolytique dans le plasma sanguin.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique [Classe des sciences], 1903, pp. 521-596; 1905, pp. 230-253.)

en concentration habituellement légèrement supérieure à celle qui existe dans le sérum du sang coagulé.

Faut-il, pour lui comme pour l'anticorps, supposer une origine possible dans le système phagocytaire? C'est une opinion défendue par Metchnikoff et ses élèves, Bordet, Gengou, Tarassévitch, Levaditi, combattue par un grand nombre d'auteurs : Korschun et Morgenroth, Sawtschenko et Bednikoff, Dömeny, Donath et Landsteiner, Lüdke, Lambotte et Stiennon, etc.

D'après Donath et Landsteiner, les extraits leucocytaires ne contiennent pas de complément hémolytique, mais ils possèdent, au contraire, des substances qui empêchent son action.

Personnellement, j'ai eu l'occasion de rechercher le complément hémolytique dans de nombreux extraits d'organes. A l'encontre de l'usage courant, je ne me suis jamais servi que d'organes prélevés à des animaux (chiens) dont tout le sang avait été chassé par un copieux lavage intravasculaire. La précaution est élémentaire quand on veut rechercher l'origine de substances qui existent en abondance dans le sang. Ces extraits furent toujours trouvés complètement exempts de complément. Parmi ces sucs d'organes figuraient des extraits de rate et de ganglions mésentériques.

Les extraits de rate et de ganglions lymphatiques n'hémolysaient pas les hématies d'espèces étrangères, ils ne les hémolysaient pas seuls, ni en association avec du sérum de chien chauffé à 56°.

Quand on les mélangeait au sérum frais de chien, on constatait que les doses faibles n'avaient pas d'action notable (j'ai pu observer, dans de rares cas, une action très légèrement favorisante), tandis que des doses plus élevées s'opposaient nettement à l'hémolyse, qu'elles pouvaient

supprimer complètement. Il y avait, d'un extrait à l'autre, de fortes différences de cette influence empêchante.

Le tableau suivant relate quelques faits d'observation qui peuvent illustrer ces affirmations.

Les tubes furent laissés à 37° pendant deux heures.

ÉMULSION dans le chlorure sodique à 1 % d'hématies lavées de coq.	ÉMULSION dans le chlorure sodique à 1 % de lymphocytes de chien.	SOLUTION de chlorure sodique à 1 %.	SÉRUM du chien I normal frais.	SÉRUM du chien I chauffé à 56°.	SÉRUM du chien II normal frais.	RÉSULTATS.
0cc5	—	1 cc	0cc5	—	—	Hémolyse totale.
0.5	—	1.25	0.25	—	—	Id.
0.5	—	1.4	0.1	—	—	Couleur rose foncé.
0.5	—	1 45	0 05	—	—	Couleur jaune rosé.
0.5	—	1	—	—	0cc5	Couleur rose.
0.5	—	1.25	—	—	0.25	Couleur jaune pâle.
0.5	—	1.4	—	—	0.1	Rien.
0.5	—	1.45	—	—	0.05	Id.
0.5	0cc5	0.75	0.25	—	—	Rien.
0.5	0.25	1	0.25	—	—	Id.
0.5	0.1	1.15	0.25	—	—	Couleur rose pâle.
0.5	0.05	1.20	0.25	—	—	Couleur rose.
0.5	0.5	1	—	—	—	Rien.
0.5	0.25	1.25	—	—	—	Id.
0.5	0.1	1.4	—	—	—	Id.
0.5	0.05	1.45	—	—	—	Id.
0.5	0.5	0.75	—	0cc25	—	Rien.
0.5	0.25	1	—	0.25	—	Id.
0.5	0.1	1.15	—	0.25	—	Id.
0.5	0.05	1.20	—	0.25	—	Id.
0.5	—	0.75	—	0.25	0.5	Hémolyse complète.
0.5	—	1	—	0.25	0.25	Couleur rouge. Hémolyse incomplète.
0.5	—	1.15	—	0.25	0.1	Couleur rose foncé.
0.5	—	1.20	—	0.25	0.05	Rien.

Mes constatations confirment donc celles de Donath et Landsteiner. Elles tendent à faire croire que, loin de produire le complément, les leucocytes le consomment plutôt.

Si cette opinion se confirmait, elle formerait contraste avec l'origine leucocytaire possible de l'anticorps. Il en résulterait que les leucocytes produisent peut-être l'un des termes de l'hémolysine et détruisent l'autre.

L'hémolysine ne serait d'ailleurs pas le premier complexe issu de l'union de plusieurs colloïdes du plasma, d'origine différente. Je crois avoir démontré que la fibrine est formée par l'union de trois colloïdes protéiques du plasma, dont deux proviennent du foie et dont un est fourni par les leucocytes (1).

J'ai défendu ailleurs l'opinion que, d'une manière générale, les albumines du plasma ont une double source : les unes viennent du foie, les autres sont sécrétées par les leucocytes et la paroi vasculaire (2).

Dans ces conditions, il était très intéressant pour moi de rechercher si, à défaut d'une origine leucocytaire, le complément n'a pas une origine hépatique.

Cette recherche était d'autant plus indiquée qu'il existe déjà dans la littérature un argument en faveur de l'origine hépatique du complément. Ehrlich et Morgen-

---

(1) P. Nolf, *Contribution à l'étude de la coagulation du sang.* Cinq mémoires dans Arch. intern. de physiol., 1906 et 1908.

(2) P. Nolf, *Des modifications de la coagulation du sang chez les chiens après extirpation du foie.* (Arch. intern. de physiol., 1905, t. III, pp. 1-43.)

P. Nolf, *Rôle de l'épithélium intestinal dans l'assimilation de l'azote alimentaire.* (Journ. de physiol. et de path. générale, 1907, pp. 957-968.)

roth ont constaté que les lapins intoxiqués par le phosphore n'ont plus de complément dans leur plasma. Or le phosphore est un poison du foie, et l'on s'accorde à admettre que, dans l'intoxication phosphorée, les diverses fonctions du foie sont gravement atteintes. Les deux constituants de la fibrine, le thrombogène et le fibrinogène, qui proviennent du foie, disparaissent dans l'intoxication phosphorée (Corin et Ansiaux, Jacoby, Doyon, Nolf, Morawitz).

Au contraire, le colloïde du plasma, qui est d'origine leucocytaire et qui prend part, comme troisième terme, à la formation de la fibrine, se trouve en excès dans le plasma des chiens empoisonnés par le phosphore (Nolf). J'ai constaté, chez ces derniers, une diminution des hémolysines normales du plasma.

Dans ces conditions, la disparition constatée par Ehrlich et Morgenroth était un premier argument en faveur de l'origine hépatique du complément.

J'ai pratiqué dans ces dernières années, à un grand nombre de chiens, l'extirpation totale du foie. Chez ces animaux, on peut obtenir des modifications de la composition du sang très analogues à celles qui se rencontrent chez les chiens empoisonnés par le phosphore. Seulement ce résultat ne s'obtient qu'à la condition que l'extirpation du viscère soit suivie d'une injection de peptone dans les veines.

Ces animaux étaient impropres à l'étude du point qui m'intéressait, parce que l'injection de la propeptone supprime ou atténue le pouvoir hémolytique chez le chien normal (comme aussi chez le chien sans foie) par un mécanisme d'ailleurs très complexe.

Quand on n'injecte pas de propeptone, l'animal meurt

d'habitude de convulsions deux ou trois heures après l'opération, avant que le sang présente des modifications notables ou de sa coagulabilité ou de son pouvoir hémolytique.

Le chien est donc un animal qui ne se prête pas à ces études.

Je me suis ensuite adressé au lapin.

Malgré la faible taille de cet animal de laboratoire, il est possible de lui faire l'extirpation du foie précédée d'une anastomose d'Eck, c'est-à-dire d'un abouchement de la veine porte dans la veine cave inférieure.

Cette anastomose ne peut se faire par une suture directe des deux veines. Une telle opération est rendue impossible par la minceur extrême des parois de la veine porte. Pour y arriver, il faut recourir à un artifice déjà utilisé par Queirolo (1) chez le chien, dans les mêmes circonstances.

Queirolo coupe la veine porte et la veine cave en travers. Il introduit le bout intestinal de la veine porte ouverte dans un petit tube droit en verre. Il renverse les lèvres de la veine sur l'extrémité du tube et les fixe par une ligature. De cette façon, il a donné à la veine un squelette résistant qui permet de la manier facilement. Il l'introduit dans le segment central de la veine cave (sectionnée au-dessous des reins) et l'y fixe par une ligature.

Le sang veineux de l'intestin se déverse ainsi aisément dans la veine cave.

Ce procédé a un inconvénient : celui de supprimer

(1) Queirolo, *Ueber die Funktion der Leber als Schutz gegen Intoxikationen vom Darm aus.* (Moleschott's Unters. z. Naturl., 1894, t. XV, pp. 228-240.)

ou, tout au moins, de gêner considérablement la circulation de retour des membres inférieurs et du bassin, c'est-à-dire d'une grande partie de l'organisme. Je l'ai modifié de la façon suivante : au lieu d'un tube en verre, j'emploie une petite bague métallique à paroi très mince, portant latéralement une oreille que l'on saisit dans une pince de Péan.

La pince permet de manier très facilement la bague pendant l'opération. Celle-ci terminée, on retire la pince et laisse la petite bague en place.

La veine porte est fixée sur la bague comme dans le procédé de Queirolo (1). Mais au lieu de l'anastomoser bout à bout avec la veine cave coupée en travers, on l'abouche latéralement dans la veine cave au-dessus des veines rénales, entre les reins et le foie. On fait à la veine cave, après hémostase, une boutonnière latérale. On introduit le tube tapissé de la veine porte entre les lèvres de cette plaie vasculaire, on attire très légèrement celles-ci sur l'extrémité du tube dont les bords sont revêtus par la veine porte et on lie. L'opération n'est pas des plus aisées; mais avec un peu d'habitude, on arrive à l'exécuter sans trop grand déchet opératoire.

La veine porte une fois fixée, on rétablit le cours du sang dans les deux veines. Le sang portal se déverse dans la veine cave, dont le trajet n'est pas interrompu, de sorte que la circulation est normale dans l'intestin et dans la partie postérieure du corps. Et comme il n'y a aucune discontinuité de l'endothélium vasculaire, il ne se produit aucun thrombus dans la nouvelle canalisation.

---

(1) Pendant toute la durée de l'opération, deux serre-fines appliquées l'une sur le tronc cœliaque, l'autre sur l'artère mésentérique empêchent le sang de s'accumuler dans l'aire splanchnique.

Les premiers lapins auxquels j'ai fait cette opération ne subirent pas d'autre mutilation. Je me bornai à jeter une ligature sur le pédicule hépatique, de façon à supprimer toute circulation dans le foie; l'organe fut laissé en place et la cavité abdominale refermée.

Dans ces conditions, le foie est voué à la nécrose et l'opération équivaut pratiquement à l'extirpation. Elle lui équivaut à une différence près : le foie reste appendu à la veine cave inférieure et le sang de celle-ci peut refluer dans les origines des veines sus-hépatiques. La possibilité existe donc pour l'organe d'agir encore sur la composition du sang par cette voie, soit pour y déverser des produits de sécrétion interne ou de décomposition, soit pour enlever au sang des substances qu'il contient. Pour éviter cette objection, probablement plus théorique que pratique, j'ai complété, chez un certain nombre d'animaux, la première opération par une extirpation totale de l'organe hépatique.

Pour réussir cette dernière, tout en maintenant la circulation dans la veine cave, on peut utiliser le procédé suivant : On se munit d'une canule droite en verre mince longue d'environ 4 centimètres, taillée en bec à ses deux extrémités; on l'enduit soigneusement de paraffine sur ses deux faces; on jette sur sa partie médiane une ligature de soie très fine, qui servira à la manier.

L'extirpation du foie ne peut être faite sans ouvrir la poitrine.

Dès que la fistule d'Eck a été établie, on ouvre largement la cavité thoracique par section médiane du sternum. A partir de ce moment, la ventilation pulmonaire est assurée par un soufflet mécanique qui injecte de l'air chaud

Le champ opératoire ainsi préparé, on ouvre sur

l'index gauche la veine cave entre deux lobes du foie, on y introduit vivement la canule paraffinée, on la pousse entièrement vers le cœur et la retire aussitôt (grâce au fil de soie), de façon à introduire son extrémité inférieure dans la partie de la veine qui se trouve en arrière de la boutonnière (du côté des reins). Une ligature l'y fixe un peu au-dessus du point où a été faite l'anastomose d'Eck; une autre ligature fixe l'extrémité supérieure près du cœur.

Dès lors, le trajet hépatique de la veine cave étant ainsi remplacé par un canal rigide, paraffiné intérieurement, on peut procéder à l'extirpation totale du foie qui ne demande plus que quelques secondes.

Cette seconde opération assez difficile, qui vient se greffer sur la première, augmente la mortalité opératoire d'une manière très sensible. Je l'ai réussie quatre fois. Les résultats de ces quatre opérations reproduisirent, à tous points de vue, ceux des cinq cas de fistule d'Eck isolée, de sorte que l'on peut dire que l'anastomose d'Eck avec ligature de l'artère hépatique est bien l'équivalent de l'extirpation complète du foie.

Les lapins ne supportent pas mieux que les chiens l'extirpation de l'organe hépatique. Comme eux, ils succombent à des convulsions éclamptiques. Les convulsions du chien affectent, tout au moins au début, le type clonique pur.

Au début elles sont parcellaires, atteignent quelques muscles de la face ou des membres, puis peu à peu elles envahissent toute la musculature; elles deviennent de plus en plus fréquentes, de plus en plus violentes et se terminent, après une période d'énergie croissante allant de quelques minutes à une demi-heure, par une violente crise toni-clonique qui épuise l'organisme.

Chez le lapin, elles sont du type tonique ou toniclonique d'emblée; immédiatement elles sont généralisées et violentes. Il n'est pas rare de voir l'animal (s'il est détaché), calme jusque-là, se renverser brusquement sur le dos, se raidir et mourir en quelques secondes.

Je me suis toujours assuré qu'aucun caillot, en se détachant, n'avait causé cette morte subite. Le mécanisme de cette fin reste à élucider.

Nul doute qu'il ne s'agisse d'une intoxication spéciale, de nature totalement inconnue, dont la connaissance serait précieuse pour la pathologie humaine.

Les animaux étaient conservés en vie le plus longtemps possible. Au moment de l'agonie, on les saignait par la carotide, et si le sang coulait mal, on favorisait son issue en massant rythmiquement le cœur.

Pour se rendre compte des changements survenus à l'hémolysine, on prélevait un échantillon de sang avant de commencer l'opération. Cet échantillon était le témoin auquel on comparait le sérum du sang agonique.

On a examiné l'action du sérum sur des globules lavés de poule.

Dans d'autres expériences, les globules employés étaient des globules de bœuf lavés et préalablement traités par un grand excès de sérum normal de chien chauffé à 56°.

Voici deux protocoles d'expériences :

Lapin mâle de 2kg07.

A 10 h. 40 m., prise de sang. Caillot après 10 minutes. Sérum I, jaune.

A 10 h. 55 m., lié les vaisseaux hépatiques.

A 11 h. 15 m., fistule d'Eck établie. Fermeture du ventre.

A 11 h. 30 m., animal dispos, mais couché. Légère dyspnée.

A 11 h. 45 m., animal se tient debout. Idem à 12 h. 45 m.

A 12 h. 50 m., mort en 30 secondes, en opisthotonos.

On le saigne aussitôt à la carotide par massage du cœur. Le sang donne un caillot normal. Sérum II, rose.

Pas de caillot dans les veines.

Le lendemain, on examine l'action des sérums, conservés dans la glace, sur des globules lavés de bœuf préalablement traités par du sérum chauffé de chien et relavés à l'eau salée.

Les mélanges furent conservés pendant deux heures à 37° et puis centrifugés. On note la couleur du liquide surnageant les globules et l'importance du résidu globulaire.

Globules normaux de bœuf.	Globules de bœuf préalablement traités par le sérum de chien chauffé.	Solution de chlorure sodique à 1 °/o	Sérum I du lapin.	Sérum II du lapin.	RÉSULTATS.
0cc25	—	1cc50	0cc25	—	Rien
—	0cc25	1.5	0.25	—	Couleur rouge. Hémolyse incomplète
—	0.25	1.55	0.20	—	Couleur rose.
—	0.25	1.6	0.15	—	Couleur jaune.
—	0.25	1.65	0.1	—	Couleur jaune pâle.
—	0.25	1.7	0.05	—	Rien.
—	0.25	1.15	—	0cc6	Rien.
—	0.25	1.25	—	0.5	Id.
—	0.25	1.5	—	0.25	Id.
—	0.25	1.65	—	0.1	Id.
—	0.25	1.7	—	0.05	Id.

Lapin de 3kg95, à jeun depuis un jour.

A 11 h. 45 m., prise de sang. Sérum I, incolore.

A 12 h. 5 m., l'anastomose d'Eck est faite.

A 12 h. 30 m., le foie est complètement extirpé. Respiration artificielle.

A 14 h. 55 m., prise de sang. La coagulation est lente. Sérum II, rose.

A 15 h. 5 m., éclampsie violente.

A 15 h. 15 m., mort. Saignée; coagulation lente. Sérum III, rose.

A 18 heures, on met à centrifuger les sangs I, II, III qui ont été recueillis dans des tubes de la machine à force centrifuge.

A 20 heures, on constate qu'il y a dans le tube II un voile dans le sérum, tandis que le tube III est rempli d'un caillot plasmatique compact.

Ces coagulations secondaires prouvent qu'au moment où les échantillons II et III furent mis à centrifuger, la coagulation n'était pas achevée. On dilacéra ces caillots, on recommença la centrifugation et on conserva à 0° les sérums. Le sérum II montra le même pouvoir hémolytique que le sérum III.

Globules lavés normaux de coq.	Sérum de chien chauffé à 56°.	Solution à 1 °/o de chlorure sodique.	Sérum I.	Sérum III.	RÉSULTATS.
0cc2	—	0cc,3	0cc5	—	Couleur rose foncé.
0.2	—	0.5	0.3	—	Couleur rose.
0.2	—	0.7	0.1	—	Couleur jaune.
0.2	—	0.75	0.05	—	Rien.
0.2	—	0.3	—	0cc5	Couleur jaune.
0.2	—	0.5	—	0 3	Rien.
0.2	—	0.7	—	0.1	Id.
0 2	—	0.75	—	0.05	Id.
0.2	0cc1	0.2	0.5	—	Hémolyse presque complète.
0.2	0.1	0.4	0.3	—	Hémolyse presque complète
0.2	0.1	0.6	0.1	—	Couleur rouge. Hémolyse incomplète.
0.2	0.1	0 65	0 05	—	Couleur rose très foncé.
0.2	0.1	0.7	0 01	—	Couleur rose très pâle
0 2	0.1	0.2	—	0.5	Couleur rose très foncé.
0.2	0.1	0.4	—	0.3	Couleur rose foncé.
0.2	0.1	0.6	—	0.1	Couleur rose pâle.
0.2	0.1	0.65	—	0.05	Rien.

La lecture des tableaux ne laisse pas de place au doute. Il est avéré que, chez le lapin, la suppression du foie a pour conséquence rapide une forte diminution du pouvoir hémolytique normal du sérum. Chez les neuf animaux que j'ai observés, cette diminution a été nette. Chez quelques-uns, tels ceux dont les protocoles précèdent, elle fut réellement très considérable. Et comme on la constate tout aussi nettement quand, au lieu de globules normaux, on utilise des globules traités au préalable par un sérum chauffé, qui apporte l'anticorps, on peut être sûr que cette diminution du pouvoir hémolytique est due (en ordre principal) à la disparition du complément.

Les modifications observées du côté de la coagulation rappellent celles que l'on constate dans les mêmes conditions chez le chien. On note souvent un retard de coagulation après la suppression du foie, retard qui fut considérable chez le second des deux lapins précités. Les caillots fournis après la suppression de la glande hépatique ne subirent jamais l'autolyse. Il en est de même chez le chien, à moins qu'on n'injecte de la propeptone dans une veine.

De ce que le complément hémolytique disparaît après la suppression du foie, est-on autorisé à conclure à sa sécrétion par le foie? L'étude de ce qui se passe du côté de la coagulation du sang doit mettre en garde contre des conclusions trop hâtives.

Après la suppression du foie chez le chien, le fibrinogène disparaît de la circulation. L'observation attentive de ce phénomène, faite sur de très nombreux animaux, m'a amené à conclure que le mécanisme de la disparition du fibrinogène est double : le colloïde n'est plus déversé dans le sang, puisque son organe formateur, le

foie, est supprimé, et de plus il est consommé avec excès. A vrai dire, cette consommation exagérée s'observe surtout à la suite des injections intraveineuses de propeptone, mais elle existe encore, à un moindre degré, chez les animaux sans foie qui ne subissent pas cette influence favorisante.

La disparition du fibrinogène doit être attribuée à une fixation exagérée de ce colloïde par les leucocytes et les endothélia vasculaires.

Par une remarquable analogie, on observe, tant chez les chiens que chez les lapins, un phénomène qui tend à faire croire que le complément hémolytique subit une évolution parallèle.

Si l'on examine la couleur des différents échantillons de sérum d'un chien auquel on a supprimé le foie et que l'on injecte de propeptone, on observe régulièrement que les derniers échantillons sont plus colorés que les premiers. L'observation se fait surtout bien quand le sang est recueilli en milieu oxalaté ou fluoré.

En effet, il n'est pas rare de voir, chez le chien normal, le sérum se teinter légèrement d'hémoglobine, surtout s'il reste quelque temps au contact du caillot. Cela n'arrive jamais avec les plasmas fluoré ou oxalaté, qui sont régulièrement tout à fait privés d'hémoglobine à l'état normal. Après la suppression du foie, ces liquides sont, au contraire, habituellement roses.

Or, j'ai constaté régulièrement la répétition de ce fait chez les lapins dans les mêmes conditions (sans injection de propeptone).

On ne peut interpréter autrement ces faits qu'en disant qu'il se produit dans la circulation des animaux privés de foie une auto-hémolyse. On pourrait supposer

que cette auto-hémolyse est un phénomène normal, que normalement de l'hémoglobine est déversée dans le plasma circulant et qu'elle en est enlevée par le foie.

On sait que cet organe remplit cet office quand on injecte de l'hémoglobine dans les veines; on sait aussi que cette fixation de l'hémoglobine circulante est suivie d'une formation abondante de pigments biliaires.

On pourrait supposer de plus que cette auto-hémolyse se fait dans la rate; et, si cette supposition se vérifiait, on aurait la démonstration expérimentale du cycle évolutif complet des hématies : produites dans la moelle osseuse, détruites dans la rate avec abandon au plasma sanguin de l'hémoglobine que recueille le foie.

Si les choses se passent ainsi à l'état normal, elles se compliquent un peu chez le chien privé de foie et injecté de propeptone. Chez cet animal, j'ai pu constater que du sang arrêté dans un segment de veine y subissait aussi une légère hémolyse. Ce sang était moins teinté que celui de la circulation générale. Ce fait prouve que, tout au moins après injection de peptone, l'hémolyse se produit non pas dans un organe spécial, mais partout à l'intérieur des vaisseaux. Cette auto-hémolyse dans les vaisseaux peut être mise sur le compte des hémolysines humorales naturelles. Elle entraîne donc une consommation exagérée de celles-ci. Quand on n'injecte pas de propeptone au chien, le plasma n'est d'habitude pas teinté.

Chez le lapin, au contraire, l'injection de propeptone n'est pas nécessaire; le sérum se colore régulièrement un peu, après la suppression du foie.

Par analogie avec ce qui se passe chez le chien, on peut admettre que, chez le lapin aussi, l'auto-hémolyse

constatée n'est pas normale, qu'elle est un phénomène anormal ou tout au moins l'exagération d'un phénomène normal et qu'elle entraîne une consommation exagérée des hémolysines humorales, notamment du complément hémolytique. Nous verrions donc se produire pour le complément hémolytique ce que j'ai démontré chez le chien pour le fibrinogène. L'analogie serait complète : le fibrinogène fixé sur les leucocytes; le complément hémolytique, sur les hématies.

On voit donc apparaître ici une explication de la disparition du complément hémolytique des lapins après la suppression du foie. Ces animaux auraient moins de complément, parce que celui-ci s'est fixé en excès sur leurs propres globules rouges. Mais cette explication est-elle complète? La disparition du fibrinogène est due à un mécanisme double : consommation exagérée, production arrêtée. En raison de l'analogie profonde, dans la première partie, entre la disparition du fibrinogène et celle du complément hémolytique, je serais tenté d'admettre qu'elle se poursuit dans la seconde. Il me semble qu'il ressort de l'ensemble de ces faits une sérieuse présomption en faveur de l'origine hépatique du complément.

Pour que cette présomption se change en certitude, il faudra écarter les objections qui se présenteront. La première qui vient à l'esprit, c'est que la disparition du complément hémolytique est un phénomène sans signification, la conséquence banale du formidable traumatisme qu'a subi l'animal opéré.

Pour éprouver cet argument, j'ai soumis deux lapins à une mutilation plus considérable encore. Je leur ai enlevé tous les viscères abdominaux (estomac, intestin, rate,

reins) à l'exception du foie et j'ai réduit la circulation à la moitié antérieure du corps et au foie.

Comme la circulation de cet organe n'est, en bonne partie, que le prolongement de la circulation intestinale, on peut craindre que la suppression *anatomique* de l'intestin n'entraîne la suppression *fonctionnelle* du foie. Pour parer, dans la limite du possible, à cet inconvénient, pour fournir au foie les grandes quantités de sang auxquelles il est habitué, j'ai fait suivre la suppression de l'intestin d'une anastomose bout à bout de l'aorte abdominale avec la veine porte. Cette suture vasculaire se fait aisément avec la petite bague qui m'a servi à l'établissement des fistules d'Eck. Le sang de l'aorte se déverse abondamment dans la veine porte qui pulse énergiquement, et le foie, largement irrigué de sang artériel, se colore en rouge vif.

Les deux animaux m'ont fourni exactement le même résultat. Voici le détail d'une expérience :

Lapin de 2kgr9, à jeun depuis un jour.

A 15 h. 55 m., prise de sang. Sérum I, légèrement jaune.

A 16 h. 5 m., tout le tube digestif est extirpé, depuis le cardia jusqu'au rectum. Pendant cette partie de l'opération, l'irrigation sanguine du foie est assurée par l'artère hépatique seule. L'aorte abdominale est sectionnée sous les rénales et anastomosée avec le tronc de la veine porte à 16 h. 25 m On lie ensuite la veine cave sous le foie.

La vitalité de l'animal est parfaite. Respiration énergique. Pas de convulsions.

On le tue par saignée à 19 h. 30 m. Coagulation normale. Sérum II, légèrement jaune.

L'action des deux sérums est essayée sur des globules normaux lavés de poule.

Les tubes sont laissés à 37° pendant deux heures, puis centrifugés.

Émulsion à 1/10 de globules de poule dans le chlorure sodique à 1 %.	Solution à 1 % de chlorure sodique.	Sérum I.	Sérum II.	RÉSULTATS.
1 c. c.	0cc5	0cc5	—	Hémolyse presque totale.
1	0.7	0.3	—	Id.
1	0.9	0.1	—	Couleur rouge.
1	0.95	0.05	—	Couleur rose pâle.
1	0.5	—	0cc5	Hémolyse presque totale.
1	0.7	—	0.3	Id.
1	0.9	—	0.1	Couleur rouge.
1	0.95	—	0.05	Couleur rose franc.

Bien que la mutilation organique fût plus considérable chez ces lapins que chez ceux auxquels je fis une fistule d'Eck avec ligature de l'artère hépatique, elle eut de tout autres résultats.

Tout d'abord, elle est beaucoup mieux supportée. Les lapins privés de leur foie meurent rapidement, habituellement endéans les deux heures qui suivent l'opération.

Ceux auxquels on laisse le foie comme seul viscère abdominal peuvent vivre plus longtemps. Celui dont l'opération est relatée ci-dessus était encore bien vivant après trois heures. Chez des chiens opérés de la même façon, j'ai eu des survies de plus de six heures.

Ces animaux ne meurent pas de convulsions.

A la mort, la coagulation est normale. Le sérum contient exactement autant d'hémolysine que le sang normal.

Ce résultat confirme donc les conclusions précédemment tirées. Il tend à démontrer qu'il y a bien une relation de cause à effet entre la suppression du foie et la disparition du complément hémolytique.

Comme il a été dit plus haut, ce fait établit une analogie entre l'hémolyse et la coagulation. Ce n'est pas la seule. La coagulation du plasma doit être considérée comme le résultat de l'union de trois colloïdes du plasma, la thrombozyme d'origine leucocytaire, le thrombogène et le fibrinogène d'origine hépatique. On peut la produire en ajoutant une émulsion de leucocytes, préalablement lavés, à un liquide qui contient du thrombogène et du fibrinogène. Dans un milieu de ce genre, la fibrine commence à se former à la surface des leucocytes (qui sont des centres de formation); de là elle s'étend vers le liquide ambiant. Cette localisation double s'explique par la diffusion dans ce liquide de la thrombozyme, c'est-à-dire du constituant leucocytaire qui entre dans la formation de la fibrine. La formation du complexe fibrine se fait donc en deux endroits : 1° sur et dans l'écorce leucocytaire qui est imbibée de thrombozyme; 2° dans le liquide ambiant, là où se rencontrent les granules de thrombozyme échappés aux leucocytes et ceux de thrombogène et de fibrinogène.

Un caillot complet est donc formé de deux parties : le caillot périleucocytaire et le caillot plasmatique.

Si les leucocytes sont très nombeux et si la quantité de thrombogène et de fibrinogène est faible, la coagulation se fait uniquement à la surface des leucocytes. Le caillot plasmatique manque. A l'œil nu, ce phénomène a l'aspect suivant : les leucocytes s'agglutinent rapidement en un ou plusieurs flocons visqueux, tandis que la grande masse du liquide reste fluide.

Quelle que soit la localisation de la fibrine, une fois la coagulation faite, l'union est définitive. Le phénomène est irréversible.

Examinons maintenant l'hémolyse.

Ehrlich et Morgenroth ont démontré qu'elle est précédée par la fixation, sur l'hématie, de l'anticorps et du complément, qui disparaissent du milieu liquide. Morgenroth a prouvé de plus que cette fixation est définitive, irréversible. Comme les deux substances sont des colloïdes, on exprimera le mieux la nature de la réaction en disant qu'elles se sont coagulées à la surface et dans l'épaisseur de l'hématie. Cette absorption des deux termes de l'hémolysine est suivie le plus souvent d'une agglutination des hématies. On voit que le parallélisme est complet jusqu'ici entre la coagulation et l'hémolyse. La seule différence, c'est que, pour le premier de ces phénomènes, la localisation est d'habitude double : la coagulation a lieu sur les leucocytes et entre eux, tandis que dans l'hémolyse, la coagulation se fait exclusivement dans l'épaisseur de la paroi des hématies.

Cela provient tout uniment de la différence de solubilité dans l'eau salée qui existe entre la thrombozyme leucocytaire et le constituant des globules rouges (que l'on peut appeler antigène) qui entre en combinaison avec l'anticorps et le complément hémolytiques.

La thrombozyme est soluble dans l'eau salée, l'antigène est insoluble. Étant soluble, la thrombozyme se répand dans le milieu ambiant et propage la coagulation autour des leucocytes. Étant insoluble, l'antigène ne sort pas des hématies et son union avec l'anticorps et le complément a lieu exclusivement dans l'épaisseur de la paroi globulaire. L'insolubilité de l'antigène n'est probablement

pas absolue. Et quand on se place dans des conditions spéciales, quand on ajoute à peu de globules et peu de complément de grandes quantités d'anticorps, on constate que l'union de l'antigène, de l'anticorps et du complément se fait en partie hors des globules (phénomène de Neisser-Wechsberg) : le caillot est en partie plasmatique.

Cette coagulation est la chose essentielle dans les deux phénomènes. Elle peut en constituer la totalité. On a en effet décrit des cas où la fixation de l'anticorps et du complément par les hématies n'était pas suivie d'hémolyse (Muir, Gay, Bordet et Gay). L'hémolyse est donc secondaire; elle est une complication. En quoi consiste-t-elle? Elle n'est pas autre chose que la diffusion du contenu de l'hématie à travers la paroi globulaire altérée par la coagulation, paroi qui lui est devenue perméable (Nolf) (1).

Voyons maintenant ce qui se passe du côté des leucocytes pendant la coagulation. A. Schmidt a attiré, il y a quelque trente ans (2), l'attention des physiologistes sur l'intense destruction leucocytaire qui s'opère pendant la coagulation et qui fait disparaître plus de la moitié des leucocytes du sang circulant. Il a suivi au microscope, dans du sang où la coagulation était retardée par le froid, l'évolution des leucocytes englobés dans le caillot fibrineux.

Voici ce qu'il a constaté : La fibrine se dépose autour

---

(1) Nolf, Article *Hémolyse*, dans le *Dictionnaire de physiologie* de Ch. Richet.

(2) A. Schmidt, *Ueber die Beziehungen des Faserstoffes zu den farblosen und den rothen Blutkörperchen und über die Entstehung der letzteren.* (Arch. f. d. ges. Physiol., 1874, t. IX, pp. 353-358.)

des leucocytes, auxquels elle fait une gangue. Les leucocytes sont tellement nombreux à ce moment qu'ils forment la grosse masse de la fibrine. Ils sont encore intacts et l'on reconnaît leurs contours et leur noyau. Mais très rapidement, le tableau change d'aspect : les contours leucocytaires s'effacent, le corps protoplasmique se fusionne avec la fibrine qui l'enserre, le noyau se résout en granulations de moins en moins distinctes, qui marquent pendant quelque temps l'ancien emplacement du leucocyte. Bref, ici aussi, comme dans l'hémolyse, la coagulation est suivie d'une altération profonde des cellules sur lesquelles elle s'est faite et de la diffusion des constituants de ces cellules dans le milieu liquide ou solide (fibrine) qui les entoure. En un mot, on constate une leucolyse tout à fait analogue à l'hémolyse.

Quand des liquides naturels qui contiennent beaucoup de leucocytes et très peu de thrombogène et de fibrinogène, tels que le liquide péritonéal, viennent au contact d'objets étrangers, dans l'organisme ou hors de l'organisme, il ne se produit pas un vrai caillot plasmatique; la coagulation est purement péri- et intracellulaire, tout comme dans l'expérience citée plus haut (p. 751). Ce que l'on observe, c'est une agglutination des cellules et leur résolution en un amas de granules qui disparaissent ultérieurement. Metchnikoff a attaché à ce phénomène une importance primordiale. D'après lui, cette altération leucocytaire est un phénomène préparatoire, destiné à mettre en liberté les compléments hémolytiques et microbiens. Il ressort à l'évidence de cet exposé que cette leucolyse est la première manifestation des processus de coagulation, qui pourront se localiser ensuite sur les hématies ou sur les microbes que l'on introduira dans le

milieu. Leucolyse, hémolyse, vibriolyse sont des phénomènes de même nature.

Cela ne signifie pas que les substances coagulées par les différentes cellules soient identiques. Le complément hémolytique n'est pas du fibrinogène. Il en a certaines propriétés, notamment celle d'être détruit à 56°. Est-il une substance simple ou un complexe? C'est ce qu'il est impossible de dire actuellement.

Si d'ailleurs la coagulation du thrombogène et du fibrinogène par le leucocyte peut être identifiée, au point de vue de sa nature chimique, à la fixation par l'hématie de l'anticorps et du complément, il semble que les deux phénomènes aient, en physiologie, une signification quelque peu différente. Sans vouloir discuter ce point, je me bornerai à dire ici qu'il paraît plus exact de comparer la coagulation des deux termes connus de l'hémolysine par le globule rouge à la coagulation des trois termes de la fibrine (thrombozyme, thrombogène et fibrinogène) par un spermatozoïde, une cellule musculaire, une cellule de levure ou un microbe (1).

C'est à l'avenir à mieux définir les analogies. Mais il est hautement intéressant de constater dès maintenant que le foie sécrète très probablement le complément hémolytique, comme il sécrète le thrombogène et le fibrinogène (2).

Cette façon de comprendre les phénomènes d'hémolyse

---

(1) P. Nolf, *Contribution à l'étude de la coagulation du sang* (3e mémoire). (Arch. intern. de physiol., 1908, t. VI, pp. 1-72.)

(2) Dans des expériences faites à Naples, il y a deux ans, j'ai pu constater également une diminution des hémolysines numorales chez des poissons *(Scyllium)* auxquels j'avais enlevé le foie.

et de coagulation rend compte des analogies que l'on constate entre eux au sujet de l'influence marquée qu'exercent sur l'un et l'autre les concentrations salines. Il est particulièrement intéressant de comparer l'action des sels de calcium. La coagulation plasmatique ne peut se faire sans la présence de petites quantités de calcium à la température ordinaire et à la température du corps (1). Mais il se peut (le fait est encore douteux) que la coagulation péricellulaire puisse se passer de ce concours. La concentration optima de chlorure calcique est d'environ 0.5 %. Passé cette concentration, le chlorure calcique exerce une action empêchante. A partir de 2 %, il supprime toute coagulation plasmatique.

Le plasma oxalaté normal hémolyse comme le sérum normal. L'absence de chaux ne paraît donc pas empêcher l'hémolyse. Mais les concentrations quelque peu élevées de chaux (solutions $^1/_{10}$ M. de $CaCl^2$) suppriment toute hémolyse, ainsi que je l'ai montré antérieurement (1900).

Il était intéressant de déterminer quelle était la dose empêchante de chlorure calcique dans un mélange où étaient réalisées simultanément les conditions d'une coagulation et d'une hémolyse.

Le milieu était du plasma propeptoné de chien qui se coagule sous l'influence de leucocytes de chien et qui hémolyse les globules lavés de coq. On lui ajoutait ces deux espèces de cellules et des quantités croissantes de chlorure calcique. On voyait à quelle concentration l'hémolyse et la coagulation étaient supprimées. Les con-

---

(1) P. Nolf, *Le plasma oxalaté peut se coaguler, sans addition d'un sel de chaux.* (Festband de Hamburger, 1908.)

centrations de calcium qui empêchaient l'hémolyse et celles qui empêchaient la coagulation n'étaient jamais très éloignées, souvent elles coïncidèrent.

Émulsion d'hématies de coq.	Émulsion de lymphocytes de chien.	Plasma propeptoné de chien.	Solution molaire de chlorure calcique.	Solution de chlorure sodique à 1 %.	RÉSULTATS.	
					Coagulation.	Hémolyse.
0cc5	0cc5	1c c	—	—	Caillot après 3 minutes.	Hémolyse forte.
0.5	0.5	1	0cc05	—	Id. 3 id.	Id.
0.5	0.5	1	0.1	—	Id. 3 id.	Coul. rose pâle.
0.5	0.5	1	0.15	—	Id. 5 id.	Rien.
0.5	0.5	1	0.2	—	Id. 30 id.	Id.
0.5	0.5	1	0.25	—	Fluide après 12 heures.	Id.
0.5	0.1	1	—	0.45	Caillot après 6 minutes.	Hémolyse totale.
0.5	0.1	1	0.05	0.4	Id.	Hémolyse forte.
0.5	0.1	1	0.1	0.35	Quelques grumeaux après 2 h.	Rien.
0.5	0.1	1	0.15	0.3	Fluide après 2 heures.	Id.
0.5	0.1	1	0.20	0.25	Id.	Id.

(Travail de l'Institut de physiologie de Liége.)

—

Les yeux branchiaux des Lamellibranches;
par Paul Pelseneer.

I. — En 1899 (1), j'ai fait connaître ces petits organes, dans quelques genres de Mytilidae et dans *Avicula tarentina*. Leur existence a été confirmée ultérieurement pour les Mytilidae, par List (2), et pour *Avicula tarentina*, par Thiele (3).

Parmi les autres formes passées comparativement en revue, lors de mes premières recherches, *Arca* manquait accidentellement (4). Or, en 1902, Thiele signala l'existence d'un œil à l'extrémité de la palpe postérieure de *Arca lactea* (5).

Depuis, j'ai examiné de nombreuses espèces de *Arca* et j'y ai trouvé un œil, non pas précisément sur la palpe labiale, mais sur la base (branche directe), toute voisine, du filament le plus antérieur de la lame interne de la branchie : c'est-à-dire exactement dans la même situation que chez les Mytilidae et *Avicula*. Ce petit appareil se rencontre dans la généralité des formes que j'ai étu-

---

(1) *Les yeux céphaliques chez les Lamellibranches*. (ARCH. DE BIOL., t. XVI, 1899.)

(2) LIST, *Die Mytiliden*. (FAUNA UND FLORA DES GOLFES VON NEAPEL, 1902, p. 215, pl. XIX)

(3) THIELE, *Die systematische Stellung der Solenogastren und die Phylogenie der Mollusken*. (ZEITSCHR. F. WISS. ZOOL., LXXII, 1902, p. 380.)

(4) *Loc. cit.*, p. 99.

(5) THIELE, *loc. cit.*, p. 380, pl. XXVI, fig. 145, 146.

diées, soit une trentaine d'espèces; il possède la même structure que chez les autres Lamellibranches où il est connu : c'est un œil ouvert, à rétine pigmentée, à cristallin cuticulaire.

Il peut sembler étrange que des organes sensibles à la lumière existent dans des animaux entièrement recouverts d'une coquille épaisse, comme celle des Arcidae; il faut noter toutefois que, chez beaucoup de ces formes où la coquille est fort opaque, celle-ci présente une étroite zone *translucide* triangulaire, naissant au sommet des crochets, c'est-à-dire précisément au-dessus de la région où l'œil est situé : celui-ci peut ainsi demeurer fonctionnel.

Cet œil est donc déjà reconnu dans trois familles importantes du groupe *Filibranches*, auquel il paraît jusqu'ici spécial : 1° dans un certain nombre d'Arcidae ci-dessus; 2° dans des Mytilidae; 3° dans des Aviculidae (1). Mais, en outre, dans chacune de ces dernières familles, il est aussi généralement répandu.

II. — En effet, dans les Mytilidae, en plus de *Mytilus*, *Modiola*, *Lithodomus*, *Modiolaria*, où il est déjà signalé, il se rencontre encore chez le genre *Septifer*, où il est placé dans le sommet du crochet de la coquille.

---

(1) Leur absence chez les Pectinidae paraît due au grand développement d'yeux palléaux très hautement différenciés. Les seuls autres Lamellibranches possédant des yeux palléaux de structure complexe sont : *Cardium muticum* (KISHINOUYE, 1894) et le genre *Anatina* (chez ce dernier, où ils ont échappé aux anciens auteurs, MITTRE et WOODWARD, ils présentent une structure toute différente des yeux à rétine « renversée » des Pectinidae et de *Cardium* : ils ressemblent plutôt à des yeux céphaliques fermés de Gastropodes, mais à pigment situé hors de la rétine).

III. — Pareillement, dans les Aviculidae, il s'observe communément : en plus de *Avicula tarentina*, toutes les autres espèces de *Avicula* examinées le possèdent aussi; et il en est de même pour toutes les formes étudiées de deux autres genres : *Malleus* (où il est particulièrement gros et souvent visible du dehors) et *Meleagrina*.

IV. — Enfin, deux dernières familles de Filibranches ont encore révélé l'existence de ces petits organes : ce sont les Anomiidae et les Pernidae, respectivement dans les genres *Anomia* et *Perna*, chez les multiples espèces qui en ont pu être observées.

V. — Dans une larve de *Ostrea* d'espèce non déterminée, Stafford décrit la présence d'un œil de situation analogue (1). Comme les larves de Aviculidae et de Mytilidae en sont pourvues de même que les adultes, on pouvait supposer que les huîtres âgées le possèdent également. Toutefois, je n'en ai rencontré sur aucun *Ostrea* d'Europe ou exotique; d'ailleurs, les larves des huîtres européennes et américaines jusqu'ici étudiées n'en montrent pas non plus (2).

VI. — Ces appareils si petits et assez profonds ont pu paraître des organes rudimentaires et presque non fonctionnels. Des expériences ont été tentées pour appré-

---

(1) *On the larva and spot of the canadian Oyster*. (AMER. NATUR., XXXIX, 1905, p. 42.)

(2) Voir par exemple : BROOKS. *The Development of the Oyster* (STUD. BIOL. LAB. JOHNS HOPKINS UNIVERS., 1880); — HORST, *Embryogénie de l'Huître* (TIJDSCHR. NED. DIERK. VER., 1884); — WOODWARD, *Larva of the European Oyster* (PROC. MALACOL. SOC., 1895); etc.

cier et mesurer quelque peu leur sensibilité. Elles m'ont donné (1) comme résultat, chez deux formes négativement phototropiques, que les impressions dermatoptiques (*Kellya*, sans yeux branchiaux) sont aussi vives que celles de l'œil branchial (*Modiolaria*).

Mais la nature offre des expériences ne laissant aucun doute sur le fonctionnement et la sensibilité de ces appareils, expériences supérieures à celles de laboratoire, car elles conservent l'organisme dans son milieu et dans ses conditions habituelles d'existence :

1° Le genre abyssal *Dacrydium* dans la famille des Mytilidae et les espèces abyssales dans le genre *Arca* (provenant d'une profondeur supérieure à 250-300 mètres, c'est-à-dire de la zone aphotique) fournissent cette constatation intéressante que les yeux branchiaux y manquent totalement.

Ceci concorde d'ailleurs avec l'absence d'yeux *palléaux* chez d'autres Lamellibranches abyssaux dont les espèces littorales en sont pourvues : parmi les Arcidae, des *Limopsis* et divers *Arca*, parmi les Pectinidae, les *Amussium* et *Spondylus gussoni* Costa ;

2° La généralité des genres présentant des yeux branchiaux en montrent une paire symétrique, c'est-à-dire un de ces organes de chaque côté. *Anomia* et *Meleagrina*, au contraire, ne possèdent qu'*un seul œil* : celui du côté gauche (2).

---

(1) *Mollusques*. (Résultats du voyage du S. Y. Belgica. Zoologie, 1903, p. 44.)

(2) Rien ne prouve qu'il en soit de même dans la larve de *Meleagrina*. Une figure de Herdmann (*Report on the Pearl Oyster Fisheries of the Gulf of Manaar*, Roy. Soc. London, part I, 1903, p. 128,

Or, *Meleagrina* et *Anomia* vivent couchés horizontalement au fond, où ils sont étroitement appliqués, fixés sur leur côté *droit*, le byssus entaillant le bord de cette face (et le perforant même : *Anomia* adulte). Le côté gauche y est donc supérieur et conséquemment le seul éclairé. L'œil qui manque à ces deux genres est ainsi celui que n'atteint plus la lumière. Sa disparition indique bien qu'il était fonctionnel auparavant et que l'œil gauche l'est demeuré.

Au surplus, cette disposition concorde avec la réduction constante, bien connue (1), des yeux palléaux de droite chez les Pectinidae, fixés eux aussi sur ce même côté : réduction poussée très loin chez *Amussium pleuronectes*, où il ne reste que quelques yeux au bord droit du manteau (une douzaine contre quatre-vingts à gauche) et conduisant à la disparition *complète* de ces yeux droits dans quelques autres espèces de *Amussium* et de *Pseudoamussium*, ainsi que chez *Pecten groenlandicus* (2).

VII. — La particularité offerte par *Meleagrina* et *Anomia* montre donc que les yeux branchiaux sont suffisamment sensibles à l'action de la lumière. Elle témoigne d'autre part que l'organisation est toujours le reflet des

---

fig. 41) représente une larve vue du côté gauche seulement; on y voit l'œil sur le premier filament branchial, non encore réfléchi; mais l'imparité n'est nullement indiquée (voir aussi : part VI, *General Summary*, fig. 20 et 21, *e*).

(1) Carriere, *Die Sinnesorgane der Thiere*, 1885, p. 100. — Patten, *Eyes of Mollusks and Arthropods* (Mitth. Zool. Stat. Neapel, t. VI, 1886), etc.

(2) Van Haren Noman, *Die Lamellibranchiaten gesammelt während der Farht des « Willem Barents »*. (Nied. Arch. f. Zool. Suppl. Band I, 1882, p. 17.)

conditions du milieu et que les êtres vivants sont fonction de leur ambiance : c'est-à-dire que (contrairement aux exagérations des néo-darwiniens) les facteurs lamarkiens jouent, dans l'évolution organique, un rôle capital (1).

VIII. — Autrefois, ces petits organes sensoriels étaient qualifiés d'yeux « céphaliques », pour les distinguer des yeux palléaux, situés sur le bord du manteau). Or, ils se trouvent, chez la larve, en dehors et en arrière du velum; conséquemment, au point de vue de l'origine, ils ne sont pas homologues à la paire d'yeux céphaliques des Gastropodes et des Céphalopodes. De sorte que, pour éviter tout malentendu, je proposerai de les appeler désormais, en vertu de leur localisation, « yeux branchiaux ».

IX. — Les appareils en question manquent dans les plus archaïques des Lamellibranches (Protobranches : *Nucula*, *Yoldia*, etc.), même pendant le cours du développement.

Or, il est invraisemblable que ces Protobranches les aient perdus par le fait que, dans les larves errantes, le velum rabattu postérieurement et recouvrant tout le corps sous forme d'un « test » (2) aurait pu, en cachant l'œil, en produire l'atrophie. Car ce test vélaire est

---

(1) En effet, *Anomia* à l'état de larve possède deux yeux, dont l'adulte perd le gauche : ce dernier est devenu un simple organe larvaire, conservé pendant la vie *libre* seulement.

(2) Drew, *Yoldia limatula*. (Mem. biol. labor. Johns Hopkins Univers., t. IV, 1899.) — *The life history of Nucula delphinodonta*. (Quart. journ. micr. sc., XLIV, 1901.)

transparent et, à coup sûr, moins opaque que la coquille des Lamellibranches adultes à yeux branchiaux. Il semble donc que ces derniers ont été acquis dans le cours de l'histoire phylétique des Lamellibranches, *après* le stade Protobranche et seulement quand le stade filibranche s'est trouvé constitué.

Nouvelles recherches sur les relations de 4 points;
par Th. De Donder.

1. — Le groupe continu (*), d'ordre fini, de l'espace x, y

$$(1) \qquad p,\ q,\ xp - cyq. \qquad c \gtrless 0$$

admet un seul invariant de deux points; désignons par 12 l'invariant ou l'intervalle relatif aux points (x_1, y_1), (x_2, y_2); on aura

$$(2) \qquad 12 = (x_1 - x_2)^c\,(y_1 - y_2).$$

On a démontré (*) qu'entre les 6 intervalles de 4 points il existe une seule relation : c'est la *relation de 4 points*. Désignons-la par

$$\psi\,[12, 13, 14, 23, 24, 34] = 0,$$

ou plus simplement par $\psi = 0$.

On a posé (*)

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3};$$

(*) Voir mon travail *Sur les relations de 4 points*. (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1907.)

nous poserons encore

$$\begin{pmatrix}12\\13\end{pmatrix} = z.$$

Nous avons trouvé (*) (n° 4) l'équation

$$(5) \qquad [-12 + 13z^c]\,[-1 + z^{-1}]^c = 23,$$

permettant de calculer z en fonction des intervalles 12, 13, 23; connaissant z, on obtiendra immédiatement la relation de 4 points du système (1), grâce à l'identité

$$(4) \qquad \begin{pmatrix}12\\13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\13\end{pmatrix}.$$

On pourrait aussi utiliser la relation (*) (6).

Une troisième méthode consisterait à éliminer z et u entre les trois équations

$$(5) \quad \begin{cases} -12[1-z]^c + 13z^c[1-z]^c - 23z^c = 0. \\ -14[1-u]^c + 12u^c[1-u]^c - 42u^c = 0. \\ -14[1-zu]^c + 13z^cu^c[1-zu]^c - 43z^cu^c = 0. \end{cases}$$

Le résultat de cette élimination serait la relation de 4 points du système (1). Cette troisième méthode ne diffère pas essentiellement de la première, puisque chacune des deux premières équations (5) n'est autre que l'équation (3) et puisque la troisième équation (5) résulte immédiatement de (3) et de (4). Il était cependant intéressant de remarquer que *l'élimination des 8 quantités* $x_1, y_1, \ldots x_4, y_4$ *entre les 6 équations telles que* (2) *relatives aux 6 intervalles 12, ..., 34 pouvait se ramener à l'élimination de 2 quantités* z *et* u *entre les 3 équations* (5).

(*) *Ibid.*

2. — La *résolution* de l'équation (3) présente en général des difficultés insurmontables. Les cas où cette résolution pourra être tentée avec quelque chance de succès sont ceux où c est un nombre entier; l'équation sera du *degré* $2c$, si c est *positif;* elle se ramènera aisément à une équation du *degré* — c seulement, si c est *négatif.*

D'autre part, *de la connaissance de la relation de 4 points* $\psi = 0$ *relative à une certaine valeur de* c, *on pourra toujours déduire celle* $\psi_{\frac{1}{c}} = 0$ *relative à la valeur* $\frac{1}{c}$, *inverse de la précédente :* à cet effet, dans $\psi_c = 0$ on remplacera

$$(12)_c \equiv (x_1 - x_2)^c (y_1 - y_2)$$

par

$$\left[(12)_{\frac{1}{c}}\right]^c \equiv (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^c.$$

Pour le démontrer, il suffira de remplacer les x par les y, et les y par les x; après cette transformation, la relation $\psi_c = 0$ subsistera, et l'intervalle $(12)_c$ deviendra identique à $\left[(12)_{\frac{1}{c}}\right]^c$. C. Q. F. D.

La recherche des relations de 4 points pour les valeurs de $c = \frac{1}{\pm n}$, où n est un nombre entier positif, sera donc ramenée à la recherche plus facile où c est un nombre entier positif ou négatif.

3. — En considérant l'équation (3) ou les équations (5), on présume que la relation $\psi = 0$ sera d'une très grande complexité pour certaines valeurs de c; on peut se demander *s'il existe une fonction* ψ *dérivable par rapport*

à c. Cette hypothèse conduirait, en vertu de $\psi = 0$, à la relation

$$\frac{\partial\psi}{\partial 12} 12 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial 34} 34 = 0.$$

Or cette relation est satisfaite, puisque ψ est *homogène* en 12, ..., 34 (voir n° 2 de ma note citée). Il n'y a donc pas de contradiction.

On peut se demander aussi ce que devient $\psi = 0$, si un des intervalles, (12) par exemple, s'annulait; on est amené ainsi au théorème suivant :

Le système $\begin{cases} \psi = 0 \\ (12) = 0 \end{cases}$ *est équivalent au système* $\begin{cases} \psi_{12} = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$

où

$$\psi_{12} = \left\{ \left[42^{\frac{1}{e}} + (-14)^{\frac{1}{e}} \right]^e + \left[13^{\frac{1}{e}} - 23^{\frac{1}{e}} \right]^e \right\} \left\{ (-14)^{\frac{1}{e}} 23^{\frac{1}{e}} + 13^{\frac{1}{e}} 42^{\frac{1}{e}} \right\}^e$$

$$- 43 \left[42^{\frac{1}{e}} + (-14)^{\frac{1}{e}} \right]^e \left[13^{\frac{1}{e}} - 23^{\frac{1}{e}} \right]^e.$$

Cette fonction est du 1er degré par rapport à l'intervalle des deux autres points 3 et 4.

Pour obtenir cette fonction ψ_{12}, on tire des deux premières équations (5) successivement

$$z = \frac{13^{\frac{1}{e}} - 23^{\frac{1}{e}}}{13^{\frac{1}{e}}},$$

$$u = \frac{(-14)^{\frac{1}{e}}}{42^{\frac{1}{e}} + (-14)^{\frac{1}{e}}},$$

et on substitue ces valeurs dans la troisième équation (5).

4. — Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \end{vmatrix}$$

On voit immédiatement que Δ, Δ' et Δ'' sont des invariants des transformations p et q. Désignons par Zf la troisième transformation $xp - cyq$ du groupe (1); nous aurons

$$\begin{aligned} Z\Delta &= \Delta(1-c) \\ Z\Delta' &= 3\Delta' \\ Z\Delta'' &= -3c\Delta''. \end{aligned} \tag{6}$$

Si $c = 1$, Δ est un invariant du groupe (1) (géométrie euclidienne). De (6), on déduit aisément que

$$I_1 = \frac{\Delta^{\frac{3}{1-c}}}{\Delta'}$$

$$I_2 = \frac{\Delta^{\frac{-3c}{1-c}}}{\Delta''} \quad \ldots\ldots \quad c \gtrless 1$$

sont des invariants du groupe (1).

Remarquons que

$$I_2 = \frac{I_1^{-c}}{12 \,.\, 13 \,.\, 23};$$

donc quand on aura obtenu I_1 en fonction des intervalles 12, 13, 23, on en déduira immédiatement I_2 en fonction des mêmes intervalles.

Considérons maintenant 4 points, et désignons par Δ_i, Δ'_i, Δ''_i les déterminants déduits des tableaux rectangulaires :

$$\left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \\ 1 & y_4 & y_4^2 \end{matrix} \right\|$$

après suppression de la i^e ligne ($i = 1, 2, 3, 4$).

Le système (1) admet donc les invariants

$$\begin{matrix} \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4 \\ \Delta'_1 : \Delta'_2 : \Delta'_3 : \Delta'_4 \\ \Delta''_1 : \Delta''_2 : \Delta''_3 : \Delta''_4. \end{matrix}$$

Entre 9 quelconques de ces invariants, il existe au moins 4 relations distinctes, dont 3 au moins se réduiront à des identités quand on exprimera ces invariants par les 6 intervalles 12, ..., 34. Cela résulte de ce que le groupe (1) n'a que 5 invariants distincts.

5. — *Quand* $c = 1$, le système (1) représente le groupe des mouvements euclidiens dans le plan. J'ai déjà étudié ce cas; je désire cependant ajouter quelques détails. L'équation (3) devient :

$$\left[-12 + 13z\right] \left[-1 + \frac{1}{z}\right] = 23,$$

ou

$$13z + 12\frac{1}{z} = -23 + 12 + 13,$$

d'où

$$z = \frac{-23+12+13 \pm \sqrt[2]{23^2+12^2+13^2-2.12.23-2.12.13-2.13.23}}{2.13}.$$

La quantité sous le radical peut s'écrire :

$$\Sigma 12^2 - 2\Sigma 12.13 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 12 & 13 \\ 1 & 12 & 0 & 23 \\ 1 & 13 & 23 & 0 \end{vmatrix} = D_{123}.$$

De la deuxième équation en z, on tire

$$\begin{aligned} -13z + 12\frac{1}{z} &= -23 + 12 + 13 - 2.13.z \\ &= (-23 + 12 + 13) - (-23 + 12 + 13 \pm \sqrt[2]{D_{123}}) \\ &= \pm \sqrt[2]{D_{123}}, \end{aligned}$$

ou, en exprimant le premier membre de cette relation en fonction des coordonnées :

$$+ \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \pm \sqrt[2]{D_{123}}.$$

Donc (n° 4)

$$\Delta^2 = D_{123};$$

D_{123} étant le carré d'une fonction entière et rationnelle

en x_1, x_2, x_3, on fera précéder le radical d'un signe tel que la racine carrée de D_{123} devienne identique à $+\Delta$.

De z on déduira u, et en substituant dans la troisième équation (5) on aura la relation de 4 points du système euclidien. — On sait que cette relation peut se mettre sous la forme d'un déterminant; l'ingénieuse méthode de A. Cayley (*) revient ici à multiplier entre eux les deux déterminants nuls

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x_1y_1 & -(x_1+y_1) & (x_1-y_1) & 0 \\ 1 & 2x_2y_2 & -(x_2+y_2) & (x_2-y_2) & 0 \\ 1 & 2x_3y_3 & -(x_3+y_3) & (x_3-y_3) & 0 \\ 1 & 2x_4y_4 & -(x_4+y_4) & (x_4-y_4) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_1y_1 & 1 & (x_1+y_1) & (x_1-y_1) & 0 \\ 2x_2y_2 & 1 & (x_2+y_2) & (x_2-y_2) & 0 \\ 2x_3y_3 & 1 & (x_3+y_3) & (x_3-y_3) & 0 \\ 2x_4y_4 & 1 & (x_4+y_4) & (x_4-y_4) & 0 \end{vmatrix}$$

D'où :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 12 & 0 & 23 & 24 \\ 1 & 13 & 23 & 0 & 34 \\ 1 & 14 & 24 & 34 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(*) *On a theorem in the geometrie of position.* (COLL. MATH. PAPERS, livre I, art. 1, p. 1, 1841.)

6. — *Quand* $c = -1$, les calculs sont particulièrement simples (n° 5 de mon travail cité ci-dessus). La relation peut s'écrire sous la forme plus symétrique :

$$(12 + 34)(13.24 - 14.23) - (13 + 24)(12.34 - 14.23) + (14 + 23)(12.34 - 13.24) = 0.$$

Remarquons que dans chacune de ces parenthèses figure la somme ou le produit de deux intervalles formant les trois couples 12 et 34, 13 et 24, 14 et 23; il y a symétrie gauche par rapport à ces trois couples.

7. — *Quand* $c = -2$, l'équation (3) devient

$$z^2(12 + 23) - 2.23.z + (23 - 13) = 0,$$

d'où

$$z = \frac{23 \pm \sqrt[2]{-12\,23 + 12\,13 + 13.23}}{12 + 23}.$$

Désignons encore par D_{123} la quantité placée sous le radical; en remplaçant les intervalles par leurs valeurs en fonction des coordonnées, on obtient

$$D_{123} = \frac{\Sigma(x_1 - x_2)^2 (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}{(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2}.$$

Le dénominateur est égal à Δ'^2 (n° 4). Il est probable que le numérateur $= \Delta^2$, car l'invariant I_1 devient $\frac{\Delta}{\Delta'}$; on vérifie qu'on a, en effet :

$$D_{123} = \left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)^2.$$

On a donc

$$z(12 + 23) - 23 = \pm \frac{\Delta}{\Delta'};$$

de là on déduira la détermination du signe $\pm$.

On aura donc successivement :

$$\binom{12}{13} = \frac{23 \pm \sqrt[2]{D_{123}}}{12 + 23},$$

$$\binom{14}{13} = \frac{43 \pm \sqrt[2]{D_{14}}}{14 + 43},$$

$$\binom{14}{12} = \frac{42 \pm \sqrt[2]{D_{142}}}{14 + 42}.$$

En substituant dans $\binom{12}{13}\binom{14}{12} = \binom{14}{13}$, on obtiendra *la relation de 4 points du système* (1) *au cas où* $c = -2$. On en déduira immédiatement la relation de 4 points du système (1) au cas où $c = -\frac{1}{2}$ (n° 2).

8. — *Quand* $c = -3$, l'équation (3) devient, en posant $y = \frac{1}{z}$:

$$-12 + 13y^3 = 23[-1 + y]^3,$$

ou

$$y^3(13 - 23) + 2.23y^2 - 3.23.y + (23 - 12) = 0.$$

La méthode de Hudde appliquée à cette équation conduit à de longs calculs qu'il est inutile de reproduire ici;

après avoir réduit cette équation à la forme canonique $t^3 + pt + q = 0$, on obtient :

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{\Sigma 12^2 13^2 - 2\Sigma 12^2.13.23}{4(13-23)^4}$$

$$= \frac{\Sigma(y_1-y_2)^2(y_1-y_3)^2(x_2-x_3)^6 - 2\Sigma(y_2-y_3)^2(y_1-y_2)(y_1-y_3)(x_1-x_2)^3(x_1-x_3)^3}{4.(13-23)^4.(x_1-x_2)^6(x_1-x_3)^6(x_2-x_3)^6}$$

Cette expression figure, comme on sait, sous un signe radical du 2d degré ; le dénominateur est un carré ; occupons-nous maintenant du numérateur.

Remarquons d'abord que

$$(7)\quad \Sigma 12^2 13^2 - 2\Sigma 12^2.13.23 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 12.13 & 12.23 \\ 1 & 13.12 & 0 & 13.23 \\ 1 & 23.12 & 23.13 & 0 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant présente une grande analogie avec celui qu'on rencontre dans la géométrie euclidienne (n° 5).

L'invariant I_1 devient

$$\frac{\Delta^{\frac{3}{4}}}{\Delta'};\ \text{d'où}\ I_1^6 = \frac{\Delta^{\frac{9}{2}}}{\Delta'^6};$$

on vérifie du reste que *le numérateur de la seconde et dernière expression de*

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

n'est pas un carré parfait par rapport aux coordonnées $x_1, \ldots, y_3$; pour cela, il suffit de remplacer ces coordon-

nées par des nombres entiers choisis arbitrairement : on trouvera en général un nombre non carré parfait.

En utilisant la méthode de résolution de l'équation du 3e degré indiquée à la page 237 du *Traité d'algèbre* par M. J. Neuberg, on retrouve la même expression (7) sous un radical du 2d degré.

9. — Abandonnons le groupe (1) et considérons le groupe (3) (*); son invariant de deux points est

$$12 = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Si l'on remarque que

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

on aura successivement

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 23 - x_2 13 + x_3 12 + 0x_4 = 0 \\ x_1 24 - x_2 14 + 0x_3 + x_4 12 = 0 \\ x_1 34 + 0x_2 - x_3 14 + x_4 13 = 0 \\ 0x_1 + x_2 34 - x_3 24 + x_4 23 = 0 \end{array}\right.$$

d'où, après quelques changements de signes :

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 12 & 13 & 23 \\ -12 & 0 & 14 & 24 \\ -13 & -14 & 0 & 34 \\ -23 & -24 & -34 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(*) *Loc. cit.*

Ce déterminant symétrique gauche, d'ordre pair, est le carré de $12.34 - 13.24 + 14.23$ (voir n° 6) (*).

10. — Considérons enfin le groupe (4) (*); son invariant de 2 points est

$$12 = (x_1 - x_2)\, e^{-\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}.$$

Posons

$$\binom{1}{2} = \binom{2}{1} = -\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

d'où

$$\frac{12}{e^{\binom{1}{2}}} = x_1 - x_2.$$

Posons encore

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha_1 &= e^{\binom{1}{2}-\binom{3}{2}} \\
\alpha_2 &= e^{\binom{1}{2}-\binom{4}{2}} \\
\alpha_3 &= e^{\binom{1}{3}-\binom{2}{3}} \\
\alpha_4 &= e^{\binom{1}{3}-\binom{4}{3}} \\
\alpha_5 &= e^{\binom{1}{4}-\binom{2}{4}} \\
\alpha_6 &= e^{\binom{1}{4}-\binom{3}{4}}
\end{aligned}\right.$$

Remarquons qu'on a l'identité

$$\frac{12}{e^{\binom{1}{2}}} + \frac{23}{e^{\binom{2}{3}}} = \frac{13}{e^{\binom{1}{3}}},$$

d'où, après quelques transformations faciles :

$$(a) \qquad \alpha_3 = \frac{13\alpha_4}{12 + 23\alpha_1}.$$

(*) *Loc. cit.*

Permutons les points 3 et 4; alors α_3 devient α_5 et α_1 devient α_2; d'où la nouvelle équation

$$(b) \qquad \alpha_5 = \frac{14\alpha_2}{12 + 24\alpha_2}.$$

Permutons (*) dans (*b*) les points 2 et 3; alors α_5 devient α_6 et α_2 devient α_4; d'où la nouvelle équation

$$(c) \qquad \alpha_6 = \frac{14\alpha_4}{13 + 34\alpha_4}.$$

Remarquons qu'on a aussi l'identité

$$\frac{12}{\underset{e}{\binom{1}{2}}}\binom{1}{2} + \frac{24}{\underset{e}{\binom{2}{3}}}\binom{2}{3} \equiv \frac{13}{\underset{e}{\binom{1}{3}}}\binom{1}{3},$$

d'où

$$\frac{12}{\alpha_1}\binom{1}{2} + 23\binom{2}{3} = \frac{13}{\alpha_3}\binom{1}{3};$$

or

$$\binom{2}{3} = \binom{1}{2} - \log \alpha_1$$

$$\binom{1}{3} = \log \alpha_3 + \binom{2}{3} = \log \alpha_3 + \binom{1}{2} - \log \alpha_1.$$

Substituons, d'où

$$\binom{1}{2}\left[\frac{12}{\alpha_1} + 23 + \frac{31}{\alpha_3}\right] - 23 \log \alpha_1 + \frac{31}{\alpha_3} \log \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 0.$$

(*) Ce procédé de permutations ne conduit pas à des équations distinctes de (*a*), (*b*), (*c*) et $\frac{\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5}{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_6} = 1$.

Le coefficient de $\left(\frac{1}{2}\right)$ est nul, en vertu de (a).
On a donc :

$$-23 \log \alpha_1 + \frac{31}{\alpha_3} (\log \alpha_3 - \log \alpha_4) = 0.$$

Remplaçons x_3 par sa valeur en fonction de α_1 tirée de (a); d'où, après quelques transformations faciles :

$$(d) \qquad \alpha_1^{\frac{23\alpha_1}{12+23\alpha_1}} = \frac{13}{12 + 23\alpha_1}.$$

Permutons les points 3 et 4, d'où

$$(e) \qquad \alpha_2^{\frac{42\alpha_2}{12+24\alpha_2}} = \frac{14}{12 + 24\alpha_2}.$$

Permutons ensuite les points 2 et 3, d'où

$$(f) \qquad \alpha_4^{\frac{43\alpha_4}{13+34\alpha_4}} = \frac{14}{13 + 34\alpha_4}.$$

Des 6 équations (a) ... (f) on tirera α_1 ... α_6, qu'on substituera dans

$$\frac{\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5}{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_6} = 1.$$

La recherche de la relation de 4 points du système de géométrie considéré est ainsi ramenée à la résolution de l'équation transcendante (d).

Au numéro 5 de ma note citée, j'ai trouvé la relation de 4 points du système où l'intervalle est $\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)$ sous la forme suivante :

$$(12—42)\,(13—23)\,(14—34) = (12-32)\,(13—43)\,(14—24).$$

Cette relation peut s'écrire ici

$$\log \alpha_2 \log \alpha_3 \log \alpha_6 = \log \alpha_1 \log \alpha_4 \log \alpha_5.$$

En y substituant les expressions de $\alpha_1 \ldots \alpha_6$ en fonction des intervalles, on obtiendra une autre forme de la relation de 4 points du système considéré.

10. — Le système (6) (*) admet l'invariant de 2 points :

$$12 \equiv z_2 - z_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Ce système présente beaucoup d'analogie avec le système étudié au n° 9 de ces recherches. Reportons-nous aux cinq équations linéaires en $z_1, \ldots, z_5$ écrites au n° 4 (*) et posons :

$$ijk \equiv ij + jk + ki \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Écrivons le déterminant des coefficients de z_1, z_2, z_3 et z_4 pris dans les 2e, 3e, 4e et 5e équations; on obtient :

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 125 & 135 & 235 \\ -125 & 0 & 145 & 245 \\ -135 & -145 & 0 & 345 \\ -235 & -245 & -345 & 0 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant symétrique gauche, d'ordre pair, est le carré du premier membre de la relation de 5 points que j'ai trouvée au n° 4 de mon mémoire *Sur la condition des 6 points*; donc *ce déterminant* (9), très analogue au déterminant (8), *égalé à zéro fournira encore la relation de 5 points du système considéré.*

(*) Voir les numéros 2 et 4 de mon mémoire : *Sur la condition des 6 points.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1906.)

—

Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé;
par Th. De Donder.

1. — Définition du multiplicateur de Jacobi généralisé.

Considérons le système *complet* de r équations

$$(1) \qquad A_\rho f \equiv \sum_1^n {}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} X_k^\rho = 0 \qquad \begin{matrix} \rho = 1, \ldots r \\ r < n. \end{matrix}$$

c'est-à-dire un système tel qu'on ait

$$(2) \qquad A_\rho A_{\rho'} f - A_{\rho'} A_\rho f \equiv \sum_1^r {}_\sigma \alpha_\sigma^{\rho\rho'} A_\sigma f \qquad \rho' = 1, \ldots r$$

ce qui entraîne les conditions nécessaires et suffisantes

$$(3) \qquad \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial X_i^{\rho'}}{\partial x_k} X_k^\rho - \frac{\partial X_i^\rho}{\partial x_k} X_k^{\rho'} \right) = \sum_1^r {}_\sigma \alpha_\sigma^{\rho\rho'} X_i^\sigma. \qquad i = 1, \ldots n$$

Nous supposerons que les r équations (1) soient distinctes, c'est-à-dire qu'on n'ait pas de relation de la forme

$$\sum_1^r {}_\sigma \beta_\sigma A_\sigma f = 0,$$

où β_σ seraient des fonctions de $x_1, \ldots x_n$. On en conclut que $\alpha_\sigma^{\rho\rho} = 0$ et que $\alpha_\sigma^{\rho\rho'} = -\alpha_\sigma^{\rho'\rho}$.

En étudiant certains travaux de S. Lie (*) et de A. Mayer (**), et en utilisant des résultats que j'avais obtenus antérieurement par la théorie des invariants intégraux (***), j'ai été amené à la définition suivante :

Toute solution N *des* r *équations*

$$(4) \qquad A_\rho N = -N\left(\sum_1^n{}_k \frac{\partial X_k^\rho}{\partial x_k} + \sum_1^r{}_\sigma\, a_\sigma^{\rho\sigma}\right)$$

s'appellera un multiplicateur de Jacobi généralisé du système (1).

On dira aussi *un multiplicateur généralisé du système* (1).

2. — Existence du multiplicateur généralisé.

Les r équations (4) admettent-elles une solution commune N?

La réponse est affirmative.

Première démonstration. — On sait que les r équations (1) admettent $n - r$ invariants distincts communs; désignons-les par $f_1, \ldots f_{n-r}$.

(*) S. Lie, *Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.* (Zweite Abhandlung.) (Math. Annalen, Bd XI, 1876.)

(**) A. Mayer, *Multiplicator eines Jacobi'schen Systems.* (Math. Annalen, Bd XII, 1877.)

(***) Th. De Donder, *Sur les invariants intégraux.* (Mémoire présenté par M. E. Pascal au Congrès international tenu en 1908 à Rome. Ce mémoire paraîtra dans les *Atti* de ce Congrès.)

Formons, d'après Lie (*), la fonction suivante :

$$\frac{\dfrac{\partial(f_1 \ldots f_{n-r})}{\partial(x_a \ldots x_g)}}{\sum \pm X_k^1 \ldots X_l^r} = L,$$

où $a, \ldots g, k, \ldots l$ est une permutation des n éléments $1, \ldots n$.

La théorie des invariants intégraux nous apprend que

$$\frac{\partial(f_1 \ldots f_{n-r})}{\partial(x_a \ldots x_g)} < > (-1)^{k+\ldots+l} M^{k\ldots l}.$$

On en déduit immédiatement (**)

$$A_\rho \frac{\partial(f_1 \ldots f_{n-r})}{\partial(x_a \ldots x_g)}.$$

Un calcul direct donne, après avoir posé

$$\sum \pm X_k^1 X_j^2 \ldots X_m^{r-1} X_l^r = \lambda_{kj\ldots ml},$$

$$(5) \qquad A_\rho \lambda_{kj\ldots ml} = \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial X_k^\rho}{\partial x_i} \lambda_{ij\ldots ml} + \ldots + \frac{\partial X_l^\rho}{\partial x} \lambda_{kj\ldots mi} \right)$$
$$+ \lambda_{kj\ldots ml} \sum_1^r{}_\sigma \, \alpha_\sigma^{\rho\sigma}.$$

Ce calcul sera grandement simplifié grâce à la remarque suivante :

En général, pour calculer la transformation infinitésimale A_ρ d'un déterminant, on effectue l'opération A_ρ *sur toutes les lignes* successivement ou bien *sur toutes les*

(*) *Loc. cit.*

(**) Th. De Donder, *Étude sur les invariants intégraux.* (Rendiconti Circ. Mat. di Palermo, t. XV, 1901.) (Voir spécialement n° 39.)

colonnes successivement; il y aura lieu ensuite de remplacer dans cet exemple-ci :

$$\begin{cases} A_\rho X_k^1 \text{ par } \sum_1^n{}_e \dfrac{\partial X_k^\rho}{\partial x_e} X_e^1 + \sum_1^r{}_\sigma \alpha_\sigma^{\rho 1} X_k^\sigma \\ \vdots \\ A_\rho X_k^r \text{ par } \sum_1^n{}_e \dfrac{\partial X_k^\rho}{\partial x_e} X_e^r + \sum_1^r{}_\sigma \alpha_\sigma^{\rho r} X_k^\sigma, \text{ etc.} \end{cases}$$

Mais on verra bien vite que lorsqu'on remplacera par

$$\sum_1^n{}_e \frac{\partial X_k^\rho}{\partial x_e} X_e^1, \text{ etc},$$

il y a avantage à effectuer l'opération A_ρ sur les rangées d'indices $k, j, \ldots m, l$; tandis que lorsqu'on remplacera par

$$\sum_1^r{}_\sigma \alpha_\sigma^{\rho 1} X_k^\sigma, \text{ etc},$$

il y aura avantage à effectuer l'opération A_ρ sur les rangées d'indices $1, 2, \ldots, r-1, r$.

On démontrerait aisément que cette double manière d'opérer est légitime.

Ce qui précède nous permettra de calculer rapidement $A_\rho L$; on verra ainsi que L satisfait aux r équations (4) et que cette fonction est un multiplicateur généralisé du système (1).

Afin de rendre ce mémoire indépendant de la théorie des invariants intégraux, je vais donner une autre démonstration.

Deuxième démonstration. — *Lemme.* Je dis qu'on a

$$\sum_1^r{}_\tau \left(A_\rho \alpha_\tau^{\rho'\tau} + A_{\rho'} \alpha_\tau^{\tau\rho} + A_\tau \alpha_\tau^{\rho\rho'} - \alpha_\tau^{\rho\rho'} \sum_1^r{}_\sigma \alpha_\sigma^{\tau\sigma} \right) = 0.$$

En effet, l'identité de Poisson

$$\big((A_\rho f, A_{\rho'} f), A_\tau f\big) + \big((A_{\rho'} f, A_\tau f), A_\rho f\big) + \big((A_\tau f, A_\rho f), A_{\rho'} f\big) \equiv 0$$

devient, en vertu de (2) :

$$\left(\sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho\rho'} A_\sigma f, A_\tau f\right) + \left(\sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho'\tau} A_\sigma f, A_\rho f\right) + \left(\sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\tau\rho} A_\sigma f, A_{\rho'} f\right) \equiv 0,$$

ou

$$\sum_1^r{}_\sigma \Big[\alpha_\sigma^{\rho\rho'}(A_\sigma f, A_\tau f) - A_\sigma f A_\tau \alpha_\sigma^{\rho\rho'} + \alpha_\sigma^{\rho'\tau}(A_\sigma f, A_\rho f) - A_\sigma f A_\rho \alpha_\sigma^{\rho'\tau}$$
$$+ \alpha_\sigma^{\tau\rho}(A_\sigma f, A_{\rho'} f) - A_\sigma f A_{\rho'} \alpha_\sigma^{\tau\rho}\Big] \equiv 0,$$

ou, en vertu de (2) (*) :

$$\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\mu \Big[\alpha_\sigma^{\rho\rho'} \alpha_\mu^{\sigma\tau} A_\mu f - A_\sigma f A_\tau \alpha_\sigma^{\rho\rho'} + \alpha_\sigma^{\rho'\tau} \alpha_\mu^{\sigma\rho} A_\mu f - A_\sigma f A_\rho \alpha_\sigma^{\rho'\tau}$$
$$+ \alpha_\sigma^{\tau\rho} \alpha_\mu^{\sigma\rho'} A_\mu f - A_\sigma f A_{\rho'} \alpha_\sigma^{\tau\rho}\Big] \equiv 0,$$

ou, en vertu de l'indépendance des r transformations $A_\mu f$:

$$\sum_1^r{}_\sigma \Big[\alpha_\sigma^{\rho\rho'} \alpha_\mu^{\sigma\tau} - A_\tau \alpha_\mu^{\rho\rho'} + \alpha_\sigma^{\rho'\tau} \alpha_\mu^{\sigma\rho} - A_\rho \alpha_\mu^{\rho'\tau} + \alpha_\sigma^{\tau\rho} \alpha_\mu^{\sigma\rho'} - A_{\rho'} \alpha_\mu^{\tau\rho}\Big] \equiv 0.$$

Faisons $\mu = \tau$, puis sommons par rapport à τ, d'où

$$\sum_1^r{}_\tau \Big[A_\tau \alpha_\tau^{\rho\rho'} + A_\rho \alpha_\tau^{\rho'\tau} + A_{\rho'} \alpha_\tau^{\tau\rho} - \alpha_\tau^{\rho\rho'} \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\tau\sigma}\Big] = 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

(*) Pour la simplicité de l'écriture, j'ai placé les deux Σ^σ Σ^μ devant le crochet; si le terme ne renferme pas le symbole μ, on aura soin de ne considérer que le signe sommatoire $\sum_1^r{}_\sigma$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème d'existence.

Posons

$$\begin{cases} -\left(\sum_1^n{}_k \frac{\partial X_k^\rho}{\partial x_k} + \sum_1^r{}_\sigma \alpha_\sigma^{\rho\sigma}\right) = Z^\rho \\ \operatorname{Log} N = z. \end{cases}$$

Soit θ une fonction des $n+1$ variables indépendantes $x_1, \ldots x_n$ et z.

Les systèmes (1) et (4) sont équivalents (*) au système unique

$$(6) \qquad D_\rho \theta = \sum_1^n{}_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} X_k^\rho + \frac{\partial \theta}{\partial z} Z^\rho = 0.$$

Si ce système est *complet*, il admettra $n+1-r$ invariants distincts; un au moins de ces invariants renfermera z, car le système (1) n'a que $n-r$ invariants distincts; de cet invariant nous tirerons la fonction z, après l'avoir égalé à une constante; d'où enfin le multiplicateur généralisé $N = e^z$. Il suffira donc de montrer que (6) forme un système complet, c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{cases} D_\rho D_{\rho'} x_i - D_{\rho'} D_\rho x_i = \sum_1^r{}_\tau \gamma_\tau^{\rho\rho'} X_i^\tau & i=1,\ldots n \\ D_\rho D_{\rho'} z - D_{\rho'} D_\rho z = \sum_1^r{}_\tau \gamma_\tau^{\rho\rho'} Z^\tau \end{cases}$$

(*) Toute *solution* θ du système (6) est un *invariant* des r systèmes d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dx_k}{X_k^\rho} = \frac{dz}{Z^\rho} = dt_\rho \qquad \begin{matrix} k=1,\ldots n \\ \rho=1,\ldots r. \end{matrix}$$

ou

$$\frac{dx_k}{X_k^\rho} = \frac{dN}{NZ^\rho} = dt_\rho$$

et *réciproquement*.

ou que

$$\left\{\begin{array}{l} A_\rho X_i^{\rho'} - A_{\rho'} X_i^\rho = \sum_1^r{}_\tau\, \gamma_\tau^{\rho\rho'} X_i^\tau \\ D_\rho Z^{\rho'} - D_{\rho'} Z^\rho = -\sum_1^r{}_\tau\, \gamma_\tau^{\rho\rho'} \left(\sum_1^n{}_k \frac{\partial X_k^\tau}{\partial x_k} + \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\tau\sigma}\right). \end{array}\right.$$

En vertu de (2), on voit que $\gamma_\tau^{\rho\rho'} = \alpha_\tau^{\rho\rho'}$.

Donc, il faut et il suffit qu'on ait

$$A_\rho \left(\sum_1^n{}_k \frac{\partial X_k^{\rho'}}{\partial x_k} + \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho'\sigma}\right) - A_{\rho'} \left(\sum_1^n{}_k \frac{\partial X_k^\rho}{\partial x_k} + \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho\sigma}\right)$$
$$= \sum_1^r{}_\tau\, \alpha_\tau^{\rho\rho'} \left(\sum_1^n{}_k \frac{\partial X_k^\tau}{\partial x_k} + \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\tau\sigma}\right),$$

où

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial^2 X_k^{\rho'}}{\partial x_k \partial x_i} X_i^\rho - \frac{\partial^2 X_k^\rho}{\partial x_k \partial x_i} X_i^{\rho'}\right) + \sum_1^r{}_\sigma \left(A_\rho \alpha_\sigma^{\rho'\sigma} - A_{\rho'} \alpha_\sigma^{\rho\sigma}\right)$$
$$= \sum_1^r{}_\tau\, \alpha_\tau^{\rho\rho'} \left(\sum_1^n{}_k \frac{\partial X_k^\tau}{\partial x_k} + \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\tau\sigma}\right).$$

Or de (3) on déduit

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial^2 X_k^{\rho'}}{\partial x_k \partial x_i} X_i^\rho - \frac{\partial^2 X_k^\rho}{\partial x_k \partial x_i} X_i^{\rho'}\right) = \sum_1^r{}_\sigma\, A_\sigma \alpha_\sigma^{\rho\rho'}$$
$$+ \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho\rho'} \sum_1^n{}_k \frac{\partial X_k^\sigma}{\partial x_k}.$$

De là, on conclut que les conditions précédentes peuvent s'écrire :

$$\sum_1^r{}_\tau \left(A_\rho \alpha_\tau^{\rho'\tau} + A_{\rho'} \alpha_\tau^{\tau\rho} + A_\tau \alpha_\tau^{\rho\rho'} - \alpha_\tau^{\rho\rho'} \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\tau\sigma}\right) = 0.$$

En vertu du lemme précédent, toutes ces conditions

sont remplies; l'existence du multiplicateur généralisé est donc démontrée.

Remarque. — Si $r = n$, il y aura encore *un* multiplicateur généralisé : celui-ci est égal à l'inverse du déterminant $\Sigma \pm X_1^1 \ldots X_n^n$; on le démontrera grâce à la formule (5).

Si $r > n$, il n'y aura plus de multiplicateur généralisé, en général; il n'y en aura jamais deux.

3. — Forme la plus générale du multiplicateur généralisé.

Soit N_1 une solution du système (4); remarquons que $N_1 \varphi (f_1 \ldots f_{n-r})$ sera encore une solution du même système; φ est une fonction arbitraire des $n - r$ invariants $f_1, \ldots f_{n-r}$ de (1). Je dis que c'est la solution la plus générale de (4); en effet, si N et N_1 sont deux solutions de (4), $\frac{N}{N_1}$ sera un invariant de (1); donc on pourra écrire, de la manière la plus générale :

$$\frac{N}{N_1} = \varphi(f_1, \ldots, f_{n-r}),$$

d'où

$$N = N_1 \varphi(f_1, \ldots, f_{n-r}). \qquad \text{c. q. f. d.}$$

4. — Propriété d'invariance du multiplicateur généralisé.

Remplaçons les n variables $x_1, \ldots x_n$ par n nouvelles variables distinctes $y_1, \ldots y_n$. *Si* N *est un multiplicateur généralisé de* (1),

$$[N] \frac{\partial(x_1 \ldots x_n)}{\partial(y_1 \ldots y_n)}$$

sera un multiplicateur généralisé du système (1)′ *transformé :*

$$(1)' \qquad B_\rho[f] \equiv \sum_1^n{}_k \frac{\partial[f]}{\partial y_k} Y_k^\rho = 0 \qquad \rho = 1, \ldots r.$$

où

$$Y_k^\rho \equiv \sum_1^n{}_i \left[\frac{\partial y_k}{\partial x_i} X_i^\rho\right]$$

Les crochets [ ] indiquent qu'on a remplacé les x en fonction des y dans les quantités qui y sont comprises.

On aura :

$$B_\rho B_{\rho'}[f] - B_{\rho'} B_\rho[f] = \sum_1^r{}_\sigma [a_\sigma^{\rho\rho'}] B_\sigma[f].$$

Soit $\delta x_1 \ldots \delta x_n$ un élément différentiel tel qu'on en considère dans une intégrale n - uple; on a

$$A_\rho(\delta x_1 \ldots \delta x_n) = (\delta x_1 \ldots \delta x_n) \sum_1^n{}_k \frac{\partial X_k^\rho}{\partial x_k}.$$

Si N est un multiplicateur généralisé de (1), on aura la relation

$$A_\rho(N \delta x_1 \ldots \delta x_n) = -(N \delta x_1 \ldots \delta x_n) \sum_1^r{}_\sigma a_\sigma^{\rho\sigma}.$$

Réciproquement, de ces deux derniers systèmes de relations, on déduit que N est un multiplicateur généralisé de (1).

Cela étant établi, remplaçons les x par les y, nous aurons

$$A_\rho\left(\frac{N}{\frac{\partial(y_1 \ldots y_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)}} \delta y_1 \ldots \delta y_n\right) = -\left(\frac{N}{\frac{\partial(y_1 \ldots y_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)}} \delta y_1 \ldots \delta y_n\right) \sum_1^r{}_\sigma a_\sigma^{\rho\sigma}$$

ou

$$B_\rho\left([N]\frac{\partial(x_1\ldots x_n)}{\partial(y_1\ldots y_n)}\delta y_1\ldots\delta y_n\right) = -\left([N]\frac{\partial(x_1\ldots x_n)}{\partial(y_1\ldots y_n)}\delta y_1\ldots\delta y_n\right)\sum_1^r{}_\sigma\,[\alpha_\sigma^{\rho\sigma}].$$

Donc

$$[N]\frac{\partial(x_1\ldots x_n)}{\partial(y_1\ldots y_n)}$$

est un multiplicateur généralisé de (1)'.

5. — Propriété ou principe du dernier multiplicateur généralisé.

Si l'on connaît n — r — 1 *invariants distincts de* (1), *ainsi qu'un multiplicateur généralisé du même système, on pourra obtenir l'invariant manquant au moyen d'une quadrature.*

Lemme. — Considérons *un système complet de* r *équations à* $r+1$ *variables indépendantes :*

$$(1)'' \qquad B_\rho f \equiv \sum_1^{r+1}{}_j \frac{\partial f}{\partial y_j} Y_j^\rho = 0, \qquad \rho = 1,\ldots r.$$

dont on connaît un multiplicateur généralisé P.

Représentons par Δ_i le déterminant obtenu en supprimant la i^e colonne du tableau rectangulaire

$$\left\| \begin{matrix} Y_1^1 & \ldots & Y_{r+1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ Y_1^r & \ldots & Y_{r+1}^r \end{matrix} \right\|$$

après multiplication par $(-1)^i$. *Je dis que*

$$P \sum_1^{r+1}{}^i \Delta_i \, dy_i$$

est une différentielle exacte et que

$$\int P \, \Sigma^i \Delta_i \, dy_i$$

est un invariant du système $(1)''$.

En effet, représentons par ψ un invariant de $(1)''$; nous aurons

$$\sum_1^{r+1}{}^j \frac{\partial \psi}{\partial y_j} Y_j^\rho = 0 \qquad \rho = 1, \ldots r.$$

d'où

$$\frac{\frac{\partial \psi}{\partial y_1}}{\Delta_1} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y_2}}{\Delta_2} = \ldots = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y_{r+1}}}{\Delta_{r+1}} = L.$$

On voit d'après le n° 2 (première démonstration), ou par vérification directe, que la fonction L est un multiplicateur généralisé de $(1)''$.

En vertu du n° 3 et de ce qu'il n'y a qu'un invariant distinct du système $(1)''$, on aura

$$L = P\theta(\psi),$$

$\theta(\psi)$ étant donc une fonction de l'invariant ψ.

Différentions totalement l'invariant ψ :

$$d\psi = \sum_1^{r+1}{}^j \frac{\partial \psi}{\partial y_j} dy_j = P\theta(\psi) \sum_1^{r+1}{}^j \Delta_j dy_j.$$

Posons

$$\frac{d\psi}{\theta(\psi)} \equiv d\omega(\psi) \equiv d\varphi;$$

$\omega(\psi)$ ou φ est un invariant du système $(1)''$.

On a donc enfin

$$\mathrm{P}\sum_{1}^{r+1}{}_j\, \Delta_j dy_j = d\varphi$$

et

$$\varphi = \int \mathrm{P}\sum_{1}^{r+1}{}_j\, \Delta_j dy_j. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Ce lemme va nous permettre d'établir la propriété du dernier multiplicateur généralisé.

Nous connaissons du système complet

$$(1) \qquad \mathrm{A}_\rho f \equiv \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \mathrm{X}_k^\rho = 0 \qquad \begin{matrix} \rho = 1, \ldots r \\ r < n \end{matrix}$$

les $n - r - 1$ invariants distincts $f_{r+2}, \ldots f_n$ et le multiplicateur généralisé N.

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_{r+1} = x_{r+1} \\ y_{r+2} = f_{r+2}(x_1, \ldots x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots x_n) \end{array} \right.$$

En employant les n nouvelles variables indépendantes

$y_1, \ldots y_n$, le système (1) devient

$$(1)''' \qquad B_\rho[f] \equiv \sum_1^{r+1}{}_j \frac{\partial[f]}{\partial y_j} Y_j^\rho \qquad \rho = 1, \ldots r.$$

Ce système peut être considéré comme un système *complet* à $r + 1$ variables indépendantes $y_1, \ldots y_{r+1}$; nous en connaissons le multiplicateur généralisé (n° 4) :

$$P \equiv \left[\frac{N}{\dfrac{\partial(f_{r+1} \ldots f_n)}{\partial(x_{r+1} \ldots x_n)}}\right].$$

En vertu du lemme précédent, on en déduira l'invariant φ au moyen d'une quadrature :

$$\varphi \equiv \int P \sum_1^{r+1}{}_j \Delta_j dy_j.$$

Du système (1)''', considéré comme un système complet à n variables indépendantes $y_1, \ldots y_n$, nous connaissons donc les $n - r$ invariants *distincts* $y_{r+2}, \ldots y_n$ et φ $(y_1, \ldots y_{r+1})$. En revenant aux anciennes variables $x_1, \ldots x_n$ on aura donc les $n - r$ invariants distincts du système proposé (1). c. q. f. d.

6. — Théorème.

Si le système (1) *admet les* n — r *transformations infinitésimales*

$$T_\nu f \equiv \sum_1^n{}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \zeta_k^\nu \qquad \nu = 1, \ldots (n-r).$$

c'est-à-dire si l'on a

$$(7) \qquad A_\rho T_\nu f - T_\nu A_\rho f \equiv \sum_1^r{}_\sigma \beta_\sigma^{\rho\nu} A_\sigma f,$$

l'inverse du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1^1 & \dots & X_n^1 \\ \vdots & & \\ X_1^r & \dots & X_n^r \\ \zeta_1^1 & \dots & \zeta_n^1 \\ \vdots & & \\ \zeta_1^{n-r} & \dots & \zeta_n^{n-r} \end{vmatrix}$$

est un multiplicateur généralisé (*) *du système* (1).

Pour calculer $A_\rho\Delta$, on pourra appliquer l'opération A_ρ respectivement à toutes les lignes ou à toutes les colonnes du déterminant Δ, puis on remplacera, en vertu de (7) :

$$\left\{\begin{array}{ll} A_\rho X_i^1 \text{ par } \sum_1^n{}_k \dfrac{\partial X_i^\rho}{\partial x_k} X_k^1 + \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho 1} X_i^\sigma & \\ \vdots & \\ A_\rho X_i^r \text{ par } \sum_1^n{}_k \dfrac{\partial X_i^\rho}{\partial x_k} X_k^r + \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho r} X_i^\sigma & i=1,\dots n. \\ & \\ A_\rho \zeta_i^1 \text{ par } \sum_1^n{}_k \dfrac{\partial X_i^\rho}{\partial x_k} \zeta_k^1 + \sum_1^r{}_\sigma\, \beta_\sigma^{\rho 1} X_i^\sigma & \\ \vdots & \\ A \zeta_i^{n-r} \text{ par } \sum_1^n{}_k \dfrac{\partial X_i^\rho}{\partial x_k} \zeta_k^{n-r} + \sum_1^r{}_\sigma\, \beta_\sigma^{\rho(n-r)} X_i^\sigma. & \end{array}\right.$$

En utilisant encore ici l'artifice de calcul exposé au n° 2, on trouvera

$$A_\rho\Delta = \Delta\left(\sum_1^n{}_k \frac{\partial X_i^\rho}{\partial x_k} + \sum_1^r{}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho\sigma}\right),$$

d'où l'on conclut aisément que $\frac{1}{\Delta}$ satisfait au système (4).

c. q. f. d.

(*) A comparer avec le théorème de S. Lie (*loc. cit.*, p. 507).

7. — Théorème (*).

Si N *est un multiplicateur généralisé du système complet* (1) *et si ce système admet la transformation infinitésimale*

$$Tf \equiv \sum_1^n{}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \zeta_k,$$

c'est-à-dire si l'on a

$$A_\rho Tf - TA_\rho f \equiv \sum_1^r{}_\sigma \beta_\sigma^\rho A_\sigma f, \tag{8}$$

on connaîtra l'invariant

$$T \log N + \sum_1^n{}_k \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_k} - \sum_1^r{}_\sigma \beta_\sigma^\sigma$$

du système proposé (1).

DÉMONSTRATION.

En vertu de (8), on aura

$$\sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_k} X_k^\rho - \frac{\partial X_i^\rho}{\partial x_k} \zeta_k \right) = \sum_1^r{}_\sigma \beta_\sigma^\rho X_i^\sigma \qquad i = 1, \ldots, n.$$

d'où

$$\sum_1^n{}_k \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial x_k \partial x_i} X_k^\rho - \frac{\partial^2 X_i^\rho}{\partial x_k \partial x_i} \zeta_k \right) = \sum_1^r{}_\sigma A_\sigma \beta_\sigma^\rho + \sum_1^r{}_\sigma \beta_\sigma^\rho \sum_1^n{}_i \frac{\partial X_i^\sigma}{\partial x_i}$$

ou

$$A_\rho \sum_1^n{}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_i} - T \sum_1^n{}_i \frac{\partial X_i^\rho}{\partial x_i} = \sum_1^r{}_\sigma A_\sigma B_\sigma^\rho + \sum_1^r{}_\sigma \beta_\sigma^\rho \sum_1^n{}_i \frac{X_i^\sigma}{\partial x_i}.$$

(*) A comparer avec le théorème de S. Lie (*loc. cit.*, p. 508); ce géomètre suppose que N est un multiplicateur de Jacobi (*non* généralisé) d'un système *jacobien*.

N étant un multiplicateur généralisé, on a

$$A_\rho \log N = -\sum_1^n \frac{\partial X_i^\rho}{\partial x_i} - \sum_1^r {}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho\sigma}.$$

En substituant dans les relations précédentes, on obtient

$$(9)\quad \begin{cases} A_\rho \sum_1^n \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_i} + TA_\rho \log N + T \sum_1^r {}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho\sigma} = \sum_1^r {}_\sigma\, A_\sigma \gamma_\sigma^\rho \\ -\sum_1^r {}_\sigma\, \beta_\sigma^\rho \left[A_\sigma \log N + \sum_1^r {}_\tau\, \alpha_\tau^{\sigma\tau} \right]. \end{cases}$$

L'identité de Poisson devient successivement :

$$\big((A_\rho f, A_{\rho'} f), Tf\big) + \big((A_{\rho'} f, Tf), A_\rho f\big) + \big((Tf, A_\rho f), A_{\rho'} f\big) \equiv 0$$

$$\left(\sum_1^r {}_\sigma\, \alpha_\sigma^{\rho\rho'} A_\sigma f, Tf\right) + \left(\sum_1^r {}_\sigma\, \beta_\sigma^{\rho'} A_\sigma f, A_\rho f\right) - \left(\sum_1^r {}_\sigma\, \beta_\sigma^\rho A_\sigma f, A_{\rho'} f\right) \equiv 0$$

$$\sum_1^r {}_\sigma \Big[\alpha_\sigma^{\rho\rho'}(A_\rho f, Tf) - A_\sigma f\, T\alpha_\sigma^{\rho\rho'} + \beta_\sigma^{\rho'}(A_\sigma f, A_\rho f) - A_\sigma f\, A_\rho \beta_\sigma^{\rho'}$$
$$- \beta_\sigma^\rho (A_\sigma f, A_{\rho'} f) + A_\sigma f\, A_{\rho'} \beta_\sigma^\rho \Big] \equiv 0$$

$$\sum_1^r {}_\sigma \Big[\alpha_\sigma^{\rho\rho'} \sum_1^r {}_\tau\, \beta_\tau^\sigma A_\tau f - A_\sigma f\, T\alpha_\sigma^{\rho\rho'} + \beta_\sigma^{\rho'} \sum_1^r {}_\tau\, \alpha_\tau^{\sigma\rho} A_\tau f - A_\sigma f\, A_\rho \beta_\sigma^{\rho'}$$
$$- \beta_\sigma^\rho \sum_1^r {}_\tau\, \alpha_\tau^{\sigma\rho'} A_\tau f + A_\sigma f\, A_{\rho'} \beta_\sigma^\rho \Big] \equiv 0.$$

D'où, en vertu de l'indépendance des r transformations infinitésimales $A_\rho f$:

$$\sum_1^r {}_\sigma \left[\alpha_\sigma^{\rho\rho'} \beta_\tau^\sigma - T\alpha_\tau^{\rho\rho'} + \beta_\sigma^{\rho'} \alpha_\tau^{\sigma\rho} - A\, \beta_\tau^{\rho'} - \beta_\sigma^\rho \alpha_\tau^{\sigma\rho'} + A_\tau \beta_\tau^\rho\right] = 0.$$

Remplaçons ρ' par τ, puis sommons par rapport à τ :

$$\sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left[\alpha_\sigma^{\rho\tau}\beta_\tau^\sigma - T\alpha_\tau^{\rho\tau} + \beta_\sigma^\tau\alpha_\tau^{\tau\rho} - A_\rho\beta_\tau^\tau - \beta_\sigma^\rho\alpha_\tau^{\sigma\tau} + A_\tau\beta_\tau^\rho\right] = 0,$$

ou

$$T\sum_1^r{}_\sigma \alpha_\sigma^{\rho\sigma} = -A_\rho \sum_1^r{}_\tau \beta_\tau^\tau - \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \beta_\sigma^\rho\alpha_\tau^{\sigma\tau} + \sum_1^r{}_\sigma A_\sigma\beta_\sigma^\rho.$$

En substituant dans (9), on obtient

$$A_\rho \sum_1^n{}_i \frac{\partial\zeta_i}{\partial x_i} + TA_\rho \log N + \sum_1^r{}_\sigma \beta_\sigma^\rho A_\sigma \log N - A_\rho \sum_1^r{}_\sigma \beta_\sigma^\sigma = 0.$$

ou en vertu de (8) :

$$A_\rho\left[T\log N + \sum_1^n{}_k \frac{\partial\zeta_k}{\partial x_k} - \sum_1^r{}_\sigma \beta_\sigma^\sigma\right] = 0.$$

Donc

$$T\log N + \sum_1^n{}_k \frac{\partial\zeta_k}{\partial x_k} - \sum_1^r{}_\sigma \beta_\sigma^\sigma$$

est un invariant du système (1). c. q. f. d.

Avril 1908.

—

Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques **(deuxième note); par Lucien Godeaux, étudiant en mathématiques.**

Dans une première note publiée sous le même titre (*), nous avions abordé le problème de la recherche des caractères essentiels des complexes bilinéaires de coniques; nous donnons maintenant un résultat définitif.

1. — Une conique de l'espace est représentée par les deux équations

$$u_x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{6} k_i v_x^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Soit L un complexe bilinéaire de coniques. Dans un plan (1) se trouve une seule conique du complexe, donc à un de ces plans correspond une *seule* quadrique du système (2). Les quadriques de (2) correspondant aux plans de l'espace forment une variété à trois dimensions (au sens de Plücker) que nous désignerons par M.

Nous arrivons à un premier résultat, à savoir que *les paramètres* $k_1, \ldots, k_6$ *peuvent s'exprimer en fonctions monodromes des* u_1, u_2, u_3, u_4.

2. — *Les coniques du complexe* L *dont les plans passent par une droite fixe* d *engendrent une surface cubique contenant* d.

Un plan passant par *d* contient une seule conique de

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), 1908, pp. 597-601.

la surface. Le complexe étant de première classe, par un point de d passe une seule conique de la surface, d'où le théorème énoncé.

3. — *Une quadrique de* M *ne contient généralement qu'une conique du complexe* L.

En effet, supposons qu'une quadrique en contienne deux et soient α, β les plans de ces deux coniques. Prenons pour d la droite commune à ces deux plans α, β. Alors les coniques du complexe dont les plans passent par d engendrent une surface cubique; mais les points communs à d et à la quadrique choisie sont doubles sur cette surface cubique et il en résulte que par un point de d ne passe pas toujours une conique du complexe dont le plan contient d, ce qui est contraire à l'hypothèse (la classe égale à l'unité).

On en conclut que la variété M et la variété constituée par les plans de l'espace sont en correspondance birationnelle et que, par conséquent, M est unicursale.

4. — Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes suivants :

Tout complexe bilinéaire de coniques est engendré par l'intersection des éléments de deux variétés en correspondance birationnelle; l'une de ces variétés est constituée par les plans de l'espace, l'autre par une triple infinité unicursale de quadriques appartenant à un ∞^3*- système linéaire.*

Tout complexe bilinéaire de coniques est birationnellement équivalent au complexe engendré par l'intersection des plans de l'espace et des quadriques du ∞^3*- système linéaire en correspondance birationnelle.*

Liége, août 1908.

Sur les propriétés physico-chimiques du glycol éthylénique et de ses solutions dans l'eau; par F. Schwers, docteur en sciences.

La densité et la dilatation de l'alcool éthylique et de ses mélanges avec l'eau ont fait l'objet de très nombreux travaux, parmi lesquels il convient de citer ceux de Mendeleeff (*).

En opérant sur la glycérine, alcool trivalent, Th. Gerlach (**) a fait une étude analogue concernant les changements de température et de volume qui se produisent lors de son mélange avec l'eau.

Malgré l'existence de ces travaux, il reste une lacune concernant les alcools bivalents, les diols. C'est cette lacune que nous avons voulu combler par la présente étude sur le glycol et ses solutions.

Le glycol éthylénique qui a servi à notre étude a été préparé suivant la méthode de L. Henry, par action de l'acétate de potassium sec sur le bromure d'éthène (***); la diacétine éthylénique ainsi obtenue a été séparée par distillation fractionnée du bromure de potassium formé, puis saponifiée par l'alcool méthylique en présence d'une minime quantité d'acide chlorhydrique concentré (env. 2 à 3 %) agissant comme catalyseur (IV); la séparation par

---

(*) Mendeleeff, *Zeitschr. für Chemie,* 1865; *Pogg. Ann.*, 1869, t. CXXXVIII.

(**) Th. Gerlach, *Chem. Industrie,* 1884, n° 9. — *Frez. Zeit.*, 1885.

(***) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1896 (3), t. XXXII, nos 9-10.

(IV) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1906, pp. 732-740; *C.*, 1907, p. 1314.

distillation fractionnée du glycol (point d'ébullition 197°5) et de l'acétate de méthyle (éb. 56°) est des plus aisées.

Nous en avons préparé de la sorte une assez grande quantité (1kg5 environ), qui a d'abord été utilisée par M. W. Spring en vue d'étudier sa couleur sous forte épaisseur (*); le produit a été ensuite soumis à une série de rectifications sous pression réduite, jusqu'à ce qu'il eût passé à une température absolument constante.

Dilatation du glycol par la chaleur.

Pour pouvoir étudier les changements de volume subis par les différents mélanges d'eau et de glycol, il était de toute nécessité de faire des déterminations très exactes de la densité des constituants purs aux différentes températures. Celle de l'eau, déterminée maintes fois avec une très grande précision, a été considérée comme connue (**); au sujet du glycol, on possède quelques données de P. De Heen (***), s'étendant entre les températures de 15° et de 73°26; nous avons répété ces déterminations endéans des limites de température plus étendues, et les résultats obtenus concordent assez bien avec ceux de De Heen, comme on le verra plus loin.

La méthode suivie est celle du thermomètre à poids. Le liquide est introduit dans le picnomètre (voir la figure 1) en y faisant le vide à plusieurs reprises jusqu'à remplissage complet : de cette façon, l'air dissous est

(*) *Sur la couleur du glycol éthylénique et de la glycérine.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE [Classe des sciences], 1907.)

(**) *Chemiker Kalender.*

(***) *Mém. cour. de l'Acad. roy. de Belgique,* 1884.

totalement expulsé. Le thermomètre à poids, suspendu par un fil en platine, plonge dans un vase contenant de ce même liquide dont on cherche la densité. Le vase en verre, de forme assez élancée, laisse passer en outre un thermomètre sensible, soigneusement vérifié (*t*), et un agitateur en platine (*p*). Le tout est placé dans un thermostat, composé d'un réservoir circulaire A, en cuivre, communiquant par sa partie inférieure avec un ballon également en cuivre dans lequel on fait bouillir tel liquide que l'on désire : les vapeurs produites, sans cesse condensées par les réfrigérants R, donnent en A une température très constante, qui est communiquée au vase et au thermomètre à poids par l'intermédiaire d'un bain d'huile interposé entre le réservoir et le vase. Un second réservoir B entoure le premier et sert à amortir les causes extérieures de changements de température; on peut, le cas échéant, le pourvoir également de ballons et de réfrigérants et y faire bouillir un liquide.

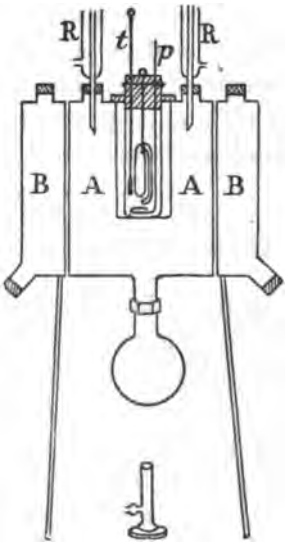


Fig. 1.

Lorsque l'égalité de température est bien établie, on retire le thermomètre à poids que l'on pèse après l'avoir lavé à l'alcool et soigneusement essuyé. Pour les températures ordinaires, qui doivent du reste être toujours légèrement supérieures à celles de la salle des balances,

on se sert de l'appareil tel quel, sans y faire bouillir de liquide : il suffit de fermer, au moyen de bouchons, les orifices du thermostat en vue d'éviter les courants d'air.

Le volume du thermomètre à poids a été déterminé au moyen d'eau, à la température ordinaire et aux différentes températures auxquelles nous avons effectué tous nos essais, à savoir aux températures d'ébullition de l'éther, de l'acétone, de l'alcool méthylique, de l'alcool éthylique et de l'eau.

En opérant de même sur du glycol pur, on a obtenu les résultats suivants :

Degrés C.	Densité (H_2O à 4° = 1)
11.0	1,11886 (*)
17.9	1,11479
34.05	1,10313
55.0	1,08757
62.6	1,08181
75.25	1,07180
96.85	1,05470
116.0	1,03960
136.5	1,02340

La marche de la dilatation correspond sensiblement à une ligne droite, légèrement concave vers l'axe des abscisses, entre 0° et 55° ; la densité de 5 en 5 degrés (H_2O à

(*) L'erreur d'observation la plus forte réside dans la pesée ; la balance n'étant sensible qu'au dixième de milligramme, les résultats sont exacts jusqu'à la quatrième décimale, la cinquième étant douteuse.

4°=1) obtenue par interpolation est renseignée dans le tableau suivant :

0°	1,12570	105°	1,04828
5	1,12260	110	1,04433
10	1,11943	115	1,04038
15	1,11619	120	1,03643
20	1,11287	125	1,03248
25	1,10948	130	1,02853
30	1,10601	135	1,02458
35	1,10246	140	1,02063
40	1,09883	145	1,01668
45	1,09513	150	1,01273
50	1,09137	155	1,00878
55	1,08757	160	1,00483
60	1,08363	165	1,00088
65	1,07975	170	0,99693
70	1,07583	175	0,99298
75	1,07198	180	0,98903
80	1,06803	185	0,98508
85	1,06408	190	0,98113
90	1,06013	195	0,97718
95	1,05618	197.5	0,97520
100	1,05223		

La densité à 0° est donc de 1,1257 ; une détermination faite au moyen de la méthode du picnomètre de Sprengel a fourni 1,1260 ; ces résultats sont très voisins de 1,125, nombre donné par Würtz, auteur de la découverte du glycol. Plus récemment, Dunstan (*) a trouvé 1,1110 à 25°/4° et Walden (**) 1,1274 à 0°/4° et 1,1099 à 25°/4°.

(*) DUNSTAN, *Zeitschr., f. phys. Chem.*, 51 (1905), p. 732.
(**) WALDEN, *Ibid.*, 55 (1906), p. 219.

En posant le volume à 0° = 1, on obtient par un simple calcul le volume aux différentes températures; le tableau suivant donne cette grandeur de 5 en 5 degrés :

0°	1,00000	105°	1,07385
5	1,00276	110	1,07794
10	1,00560	115	1,08201
15	1,00843	120	1,08613
20	1,01153	125	1,09028
25	1,01462	130	1,09447
30	1,01780	135	1,09869
35	1,02108	140	1,10294
40	1,02445	145	1,10723
45	1,02791	150	1,11155
50	1,03145	155	1,11590
55	1,03506	160	1,12029
60	1,03882	165	1,12471
65	1,04256	170	1,12916
70	1,04636	175	1,13366
75	1,05011	180	1,13813
80	1,05400	185	1,14275
85	1,05791	190	1,14735
90	1,06185	195	1,15199
95	1,06582	197.5	1,15432
100	1,06982		

La courbe obtenue (voir diagramme I) peut être représentée par une expression analytique de la forme

$$V_t = V_0(1 + at + bt^2 + ct^3 + \cdots).$$

En posant

$$V_0 = 1$$

et en faisant le calcul avec trois constantes, on obtient l'expression

$$V_t = 1 + 0{,}0005657\,t + 0{,}000001707 4\,t^2 + 0{,}00000000293\,t^3.$$

Les résultats trouvés par De Heen (*) ne sont pas très différents : ils sont reproduits ci-dessous en regard des nôtres.

Comme on le voit, les nombres de De Heen sont un peu plus forts, mais ils n'intéressent que les limites de température endéans lesquelles le coefficient de dilatation n'a pas encore atteint sa valeur maxima ; d'après nos résultats, le coefficient de dilatation moyen entre 0° et la température d'ébullition serait un peu plus grand.

TEMPÉRATURE.	DE HEEN.	SCHWERS.	DIFFÉRENCE.
15°0	1.00000	1,00000	0,00000
23.33	1,00551	1,00511	0,00040
32.36	1,01136	1,01082	0,00054
45.07	1,02005	1,01932	0,00073
56.9	1,02827	1,02782	0,00045
73.26	1,04012	1,04004	0,00008

En comparant la dilatation du glycol à celle de l'alcool et de la glycérine, on voit (diagramme I) qu'elle suit une marche intermédiaire, ce qui était à prévoir.

L'eau, avec son coefficient de dilatation très petit et

(*) *Loc. cit.*, p. 68.

anormal, occupe une situation tout à fait à part, comme c'est généralement le cas pour toutes les propriétés de ce liquide.

Mélanges de glycol et d'eau.

Des mélanges de glycol et d'eau ont été faits dans les proportions de 10, 20, 30 °/₀, etc., de glycol et la densité en a été déterminée par la méthode indiquée à différentes températures comprises entre la température ordinaire et 100°. De plus, les densités de ces mélanges ont été prises à 0° au moyen du picnomètre de Sprengel.

Si l'on désigne par p le pourcentage de l'eau et par p' celui du glycol, par d et d' les densités respectives à la température considérée, l'expression

$$\frac{100}{\frac{p}{d} + \frac{p'}{d'}}$$

nous donnera la densité théorique dans le cas où le mélange aurait lieu sans changement de volume. Le rapport de la densité théorique à la densité observée nous donnera le volume du mélange, celui-ci étant égal à l'unité dans le cas où il n'y a ni contraction ni dilatation. Enfin, la contraction en °/₀ du volume primitif sera connue en multipliant par 100 les nombres obtenus en soustrayant de l'unité les chiffres de la colonne V.

De même que pour les mélanges alcool-eau, glycérine-eau, on constate que tous les mélanges glycol-eau ont une densité plus grande que la théorie ne le prévoit, qu'ils donnent donc lieu à une condensation.

Nous reproduisons ci-dessous le détail de nos expériences (pp. 822-825). En portant en abscisses les températures col. I et en ordonnées les contractions en °/₀ du volume primitif (col. V), on peut réunir par une courbe plate les points obtenus pour chaque concentration étudiée; ces courbes sont réunies sur les diagrammes V et VI.

	TEMPÉRATURE. I	DENSITÉ OBSERVÉE. II	DENSITÉ THÉORIQUE. III	Densité théorique divisée par densité observée. IV	Contraction en °/₀ du volume primitif. V
10 °/₀ de glycol.	0°00	1,01512	1,01117	0,99611	0,389
	18.32	1,01201	1,00995	0,99707	0,293
	34.08	1,00881	1,00438	0,99758	0,242
	53.32	0,99798	0,99597	0,99798	0,202
	64.88	0,99220	0,99007	0,99785	0,215
	75.25	0,98558	0,98367	0,99806	0,194
	93.10	0,97346	0,97209	0,99890	0,110
20 °/₀ de glycol.	0°00	1,02974	1,02273	0,99319	0,681
	13.70	1,02677	1,02188	0,99526	0,574
	32.15	1,01970	1,01525	0,99563	0,437
	53.40	1,00921	1,00550	0,99632	0,368
	72.75	0,99573	0,99418	0,99649	0,351
	94.70	0,98210	0,97972	0,99758	0,242

	TEMPERATURE. I	DENSITÉ OBSERVÉE. II	DENSITÉ THÉORIQUE. III	Densité théorique divisée par densité observée. IV	Contraction en % du volume primitif. V
30 % de glycol.	0°00	1,04537	1,03456	0,98956	0,034
	13.95	1,04112	1,03190	0,99114	0,886
	33.50	1,03226	1,02501	0,99297	0,703
	53.12	1,02149	1,01531	0,99395	0,605
	62.45	1,01582	1,00987	1,99414	0,586
	73.65	1,00821	1,00289	0,99472	0,528
	94.65	0,99241	0,98874	0,99738	0,370
40 % de glycol.	0.00	1,06120	1,04667	0,98631	1,369
	19.05	1,05265	1,04150	0,98941	1,059
	32.50	1,04545	1,03602	0,99097	0,903
	52.78	1,03366	1,02542	0,99203	0,797
	62.20	1,02720	1,01964	0,99264	0,763
	73.15	1,01976	1,01260	0,99298	0,702
	93.90	1,00355	0,99820	0,99467	0,533
50 % de glycol.	0.00	1,07538	1,05906	0,98482	1,518
	15.70	1,06784	1,05443	0,98744	1,256
	34.05	1,05683	1,04603	0,98978	1,022
	53.65	1,04417	1,03502	0,99124	0,876
	62.20	1,03827	1,02943	0,99148	0,852
	73.65	1,03004	1,02181	0,99201	0,799
	94.20	1,00364	1,00734	0,99375	0,625

	TEMPÉRATURE. I	DENSITÉ OBSERVÉE. II	DENSITÉ THÉORIQUE. III	Densité théorique divisée par densité observée. IV	Contraction en % du volume primitif. V
60 % de glycol.	0°00	1,08851	1,07175	0,98460	1,540
	18.90	1,07807	1,06449	0,98740	1,260
	33.55	1,06884	1,05719	0,98910	1,090
	52.97	1,05550	1,04573	0,99074	0,926
	63.00	1,04825	1,03890	0,99108	0,892
	73.80	1,04004	1,03145	0,99174	0,826
	93.50	1,02400	1,01720	0,99335	0,665
70 % de glycol.	0.00	1,10003	1,08474	0,98610	1,390
	17.80	1,08977	1,07700	0,98837	1,163
	33.90	1,07889	1,06822	0,99011	0,989
	53.12	1,06497	1,05615	0,99173	0,827
	64.75	1,05627	1,04783	0,99201	0,799
	75.25	1,04809	1,04034	0,99260	0,740
	94.00	1,03277	1,02649	0.99392	0,608
80 % de glycol.	0.00	1,10982	1,09806	0,98940	1,060
	16.05	1,10023	1,09035	0,99102	0,898
	33.60	1,08824	1,07987	0,99230	0,770
	54.10	1,07345	1,06615	0,99320	0,680
	74.85	1,05701	1,05014	0,99350	0,650
	96.60	1,03950	1,03420	0,99490	0,510

	TEMPÉRATURE. I	DENSITÉ OBSERVÉE. II	DENSITÉ THÉORIQUE. III	Densité théorique divisée par densité observée. IV	Contraction en % du volume primitif. V
85 % de glycol.	0°00	1,11679	1,10842	0,99107	0,903
	20.40	1,10189	1,09387	0,99272	0,728
	34.35	1,09209	1,08510	0,99360	0,640
	55.00	1,07706	1,07105	0,99442	0,558
	66.30	1,06838	1,06224	0,99425	0,575
	74.45	1,06187	1,05613	0,99459	0,541
	95.75	1,04459	1,03994	0,99555	0,445
90 % de glycol.	0.00	1,11966	1,11171	0,99290	0,710
	14.20	1,11030	1,10381	0,99415	0,585
	34.20	1,09617	1,09413	0,99540	0,460
	54.48	1,08128	1,07682	0,99587	0,413
	63.30	1,07292	1,06827	0,99566	0,434
	74.05	1,06187	1,05613	0,99570	0,430
	96.95	1,04785	1,04405	0,99637	0,363
95 % de glycol.	0°00	1,12537	1,11941	0,99470	0,530
	16.20	1,11350	1,10905	0,99600	0,400
	20 00	1,11088	1,10664	0,99618	0,382
	34.10	1,10053	1,09716	0,99694	0,306
	54.30	1,08540	1,08241	0,99725	0,275
	66.20	1,07619	1,07302	0,99705	0,295
	73.95	1,07007	1,06692	0,99705	0,295
	95.90	1.05252	1,04980	0,99742	0,258

Réunissons en un tableau ces données pour les différentes concentrations à 0° :

°/o en poids de glycol p' I	°/o en poids d'eau p II	Densité observée. III	Densité théorique. IV	Densité théorique divisée par densité observée. V	Contraction en °/o du volume primitif. VI
0	100	0,99987	0,99987	1,00000	0,000
10	90	1,01512	1,01117	0,99611	0,389
20	80	1,02974	1,02273	0,99319	0,689
30	70	1,04537	1,03456	0,98966	1,034
40	60	1,06120	1,04667	0,96632	1,369
50	50	1,07538	1,05906	0,98482	1,518
60	40	1,08851	1,07175	0,98460	1,540
70	30	1,10003	1,08474	0,98613	1,390
80	20	1,10982	1,09806	0,98940	1,060
90	10	1,11966	1,11171	0,99690	0,710
100	0	1,12570	1,12570	1,00000	0,000

En interpolant de la sorte de 10 en 10°, on arrive aux chiffres suivants (colonne VI seulement) :

p'	p	10°	20°	30°	40°	50°
10	90	0,333	0,286	0,250	0,222	0,205
20	80	0,593	0,515	0,448	0,402	0,372
30	70	0,919	0,818	0,719	0,662	0,617
40	60	1,193	1,047	0,930	0,844	0,803
50	50	1,338	1,180	1,049	0,952	0,887
60	40	1,387	1,242	1,124	1,017	0,943
70	30	1,256	1,134	1,010	0,913	0,844
80	20	0,959	0,868	0,792	0,729	0,689
90	10	0,620	0,542	0,481	0,437	0,413

p'	p	60°	70°	80°	90°	100°
10	90	0,212	0,211	0,175	0,128	0,073
20	80	0,374	0,363	0,321	0,268	0,209
30	70	0,592	0,553	0,486	0,408	0,324
40	60	0,775	0,722	0,652	0,571	0,480
50	50	0,848	0,817	0,746	0,659	0,558
60	40	0,905	0,831	0,782	0,700	0,611
70	30	0,815	0,774	0,713	0,641	0,555
80	20	0,682	0,669	0,625	0,560	0,483
90	10	0,425	0,433	0,419	0,388	0,340

En portant en abscisses les *pourcentages* en glycol et en ordonnées les contractions en °/₀ du volume primitif, on voit (diagramme II) que, à 0°, le maximum de contraction est de 1,545 °/₀ à une concentration d'environ 58 °/₀ de glycol + 42 °/₀ d'eau. Remarquons qu'un mélange de 57,944 °/₀ de glycol + 42,056 °/₀ d'eau correspondrait à la formule

$$2C_2H_4(OH)_2 + 5H_2O.$$

Ici encore on peut faire observer que le glycol possède des propriétés intermédiaires entre celles des monols et des triols. En effet, le maximum de contraction pour l'alcool éthylique est d'environ 4 °/₀ du volume primitif pour un mélange de 46 °/₀ d'alcool + 54 °/₀ d'eau (Mendeleeff); la glycérine fournit un maximum de contraction de 1.38 °/₀ à 0° pour un mélange de 58 °/₀ de glycérine + 42 °/₀ d'eau (Gerlach).

Revenons-en à l'allure des courbes (diagrammes V et VI) qui représentent, comme il a été dit, la marche de la contraction avec la température pour chaque mélange de

glycol et d'eau. La remarque générale qui se dégage de l'inspection de ces courbes est que *la contraction va diminuant avec la température.*

Voyons ce qui en est à ce sujet dans la série des monols. Pour l'alcool éthylique, la contraction ne diminue avec la température que pour des mélanges renfermant plus de 16.5 °/₀ d'alcool; pour des concentrations plus faibles, la contraction va augmentant avec la température; à la concentration de 16.5 °/₀ d'alcool, la contraction est la même, quelle que soit la température à laquelle se fasse le mélange (*).

En ce qui concerne l'alcool méthylique, nous avons trouvé deux séries d'essais de Dittmar et Fawsitt (**) (à 0° et à 15°56); en calculant comme précédemment la contraction en °/₀ du volume primitif, on observe que deux mélanges, l'un de 25.4 °/₀ (1 CH_3OH + 5 H_2O) et l'autre de 78.05 °/₀ (2 CH_3OH + 1 H_2O) d'alcool, présentent une contraction identique aux deux températures susmentionnées; entre ces deux concentrations, la contraction diminue avec la température; elle augmente, au contraire, avec ce facteur pour des mélanges plus riches ou plus pauvres en alcool (***). Ces données figurent sur les diagrammes III et IV.

Des points singuliers de cette espèce se représentent vraisemblablement dans toute la série des monols, si l'on

---

(*) Kopp, *Pogg. Ann.*, Bd LIII. — Mendeleeff, *Pogg. Ann.*, Bd CXXXVIII.

(**) *Chemiker Kalender*, 1905, p. 256.

(***) Le second point singulier de la courbe (78.05 °/₀ d'alcool) est moins net que le premier, et tant que des données à des températures supérieures nous feront défaut, il serait bon de ne l'admettre que sous bénéfice d'inventaire.

s'en tient aux termes miscibles à l'eau en toutes proportions.

Les diols, par contre, — ainsi que les triols, comme nous le verrons plus loin, — n'offrent pas cette particularité des monols. L'allure générale des courbes (diagrammes V et VI) indique nettement une diminution de contraction avec l'augmentation de température, et ce pour toutes les concentrations.

Mais un autre fait très intéressant est la forme remarquable de ces courbes entre 50° et 70° environ, température à laquelle elles présentent toutes un relèvement caractéristique : au lieu de continuer régulièrement leur marche descendante, elles s'aplatissent, se relèvent même complètement, pour reprendre leur marche descendante au delà de 70°.

N'ayant pu trouver la raison de ce fait assez inattendu, nous avons tenu, au moins, à nous assurer s'il n'est pas isolé. Dans un travail sur le système glycérine-eau, Th. Gerlach (*) donne un tableau indiquant les volumes des solutions de glycérine de 10 en 10 °/₀ et de 10 en 10° entre 0° et 100°, le volume à 0° étant chaque fois posé = I. Comme il donne, d'autre part, la densité (à toutes les températures) de la glycérine sur laquelle il a opéré, nous avons pu calculer pour tous les mélanges glycérine-eau la densité observée, la densité théorique, et, par suite, la contraction en °/₀ du volume primitif, de façon à établir des courbes comparables à celles du glycol (**). En portant les températures sur l'axe des

(*) *Chemische Industrie*, 1884, n° 9.

(**) Les chiffres fournis par Gerlach, donnant pour la glycérine D 15°/15° et D 20°/20°, ont été préalablement transformés en D 0°/4°.

abscisses et les contractions en °/₀ du volume primitif sur l'axe des ordonnées, nous avons réuni les points ainsi obtenus pour chaque concentration par une courbe plate. Nous n'avons dû faire que de très légères corrections en omettant certaines inflexions insignifiantes de la courbe, qui provenaient évidemment de petites erreurs d'observation.

Comme le montrent les diagrammes VII et VIII, leur allure générale est identique à celle du glycol : toutes présentent également un relèvement caractéristique, non plus entre 50-70°, mais entre 70° et 90°. Remarquons que le point d'ébullition de la glycérine est de 290°, alors que celui du glycol n'est que de 197°5. A 0°, on a le tableau suivant :

°/₀ en poids de glycérine p' I	°/₀ en poids d'eau p II	Densité observée III	Densité théorique. IV	Densité théorique divisée par densité observée. V	Contraction en °/₀ du volume primitif. VI
0	100	0,99988	0,99988	1,00000	0,000
10	90	1,02478	1,02168	0.99697	0,303
20	80	1,05094	1,04445	0,99385	0,615
30	70	1,07832	1,06826	0,99067	0,933
40	60	1,10646	1,09318	0,98800	1,200
50	50	1,13433	1,11929	0,98674	1,326
60	40	1,16268	1,14669	0,98625	1,375
70	30	1,19073	1,17550	0,98721	1,279
80	20	1,21800	1,20569	0,98989	1.011
90	10	1,24557	1,23756	0,99357	0,643
100	0	1,27414	1,27414	1,00000	0,000

Pour les autres températures, nous ne donnons que les résultats (colonne VI) :

p'	p	10°	20°	30°	40°	50°
10	90	0,251	0,225	0,197	0,189	0,211
20	80	0,498	0,446	0,409	0,391	0,398
30	70	0.807	0,710	0,630	0,558	0,510
40	60	1,065	0,947	0,850	0,757	0,702
50	50	1,193	1,079	0,942	0,846	0,769
60	40	1,265	1,100	1,002	0,921	0,872
70	30	1,153	1,012	0,915	0,811	0,807
80	20	0,955	0,812	0,740	0,680	0,636
90	10	0,560	0,503	0,446	0,388	0,357

p'	p	60°	70°	80°	90°	100°
10	90	0,205	0,212	0,231	0,257	0,199
20	80	0,366	0,372	0,370	0,372	0,274
30	70	0,474	0,499	0,503	0,487	0,429
40	60	0,669	0,660	0,685	0,693	0,641
50	50	0,733	0,703	0,741	0,761	0,715
60	40	0,822	0,800	0,843	0,861	0,811
70	30	0,762	0,747	0,790	0,805	0,763
80	20	0,616	0,587	0,590	0,611	0,574
90	10	0,335	0,332	0,366	0,407	0,403

Dans la série des alcools monovalents, on ne possède encore que peu de données dans cette direction. Les déterminations minutieuses de Mendeleeff pour l'alcool

éthylique ne s'étendent que de 0° à 30°, et entre ces deux limites de température les courbes affectent une marche bien régulière; du reste, si un phénomène devait se produire pour l'alcool, il ne faut s'attendre à l'observer qu'à une température supérieure, plus voisine du point d'ébullition de l'alcool.

Frankenheim (*) a étudié la marche de la dilatation de quelques solutions d'eau et d'alcool, dont il donne la densité; en soumettant les chiffres fournis par cet auteur aux mêmes calculs, on arrive à des courbes offrant vers leur extrémité, c'est-à-dire au voisinage du point d'ébullition, des allures irrégulières avec des relèvements de la courbe. Mais comme il règne assez bien d'incertitude au sujet de la composition centésimale exacte de ces mélanges, on est obligé de faire une part trop grande aux erreurs possibles, et nous ne voudrions pas tirer de conclusions prématurées à ce sujet. Il y aurait là une série d'essais à exécuter, que nous nous proposons de reprendre à l'occasion.

Quoi qu'il en soit au sujet des monols, un fait nouveau important se dégage de cette étude sur les mélanges d'eau avec les diols et les triols : c'est qu'*il existe une température ou, plus exactement, une zone de température pour laquelle la contraction est plus forte (ou tout au moins relativement plus forte) que pour les températures directement précédentes ou subséquentes; que ce phénomène se produit avec une intensité à peu près égale, quel que soit le rapport entre l'eau et le diol, resp. le triol; qu'enfin cette particularité semble liée aux points d'ébullition des constituants.*

(*) Frankenheim, *Pogg. Ann.*, 1847, pp. 195-200.

Chaleur spécifique et chaleur de mélange du système glycol-eau.

Le mélange en différentes proportions de glycol et d'eau se fait non seulement avec contraction, mais aussi avec élévation de température, signe extérieur de cette condensation.

Afin d'obtenir les quantités globales de calories dégagées, nous avons observé pour chaque mélange l'élévation de température produite et déterminé la chaleur spécifique de ces mêmes mélanges.

Chaleur spécifique du glycol et de ses solutions aqueuses.

Le thermostat qui a servi à la recherche des densités a pu également nous rendre des services dans la détermination des chaleurs spécifiques. Le vase en verre, d'une capacité de 130 centimètres cubes environ, était rempli de 75 à 80 grammes de liquide et fermé au moyen d'un bon bouchon en caoutchouc laissant passer un agitateur en platine et un thermomètre de Beckman au centième de degré réglé pour la température désirée.

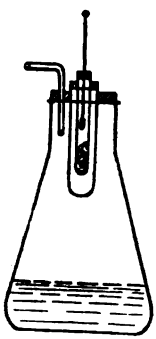


Fig. 2.

D'autre part, de l'étain absolument pur était porté à

une température voisine de 100°. A cet effet, on chauffe de l'eau à l'ébullition dans un matras ou ballon à col assez large (fig. 2) muni d'un bouchon laissant passer un tube (pour le dégagement des vapeurs d'eau) et une éprouvette. Celle-ci sert d'enveloppe à un tube à réaction surmonté d'un bouchon avec thermomètre et contenant de l'étain en fragments bien lisses extérieurement, de façon à offrir au liquide une surface de contact minimum. L'étain abandonne immédiatement ses calories au liquide; on note sur le thermomètre au centième de degré l'élévation de température produite, en faisant la correction nécessitée par suite de la perte de chaleur due aux échanges avec la température ambiante. Ceci se fait avec une approximation suffisante en observant la marche du thermomètre pendant les quelques minutes qui précèdent et qui suivent le moment de l'essai. On note le maximum de température atteint et, connaissant le temps qu'il a fallu au thermomètre pour atteindre ce maximum, on trouve par interpolation graphique l'élévation de température dans le cas où aucun échange ne se serait produit, et où le thermomètre aurait atteint son maximum au moment même de la mise en train de l'expérience (*).

Une première série d'expériences exécutées avec l'eau pure nous ont permis de déterminer expérimentalement la valeur en eau du calorimètre et de ses accessoires (thermomètre, agitateur). La chaleur spécifique de l'étain a été prise dans les tables égale à 0,0562, celle de l'eau égale à l'unité.

(*) OSWALD-LUTHER, *Phys. Chem. Mess.*, 2. Aufl., 1902, p. 200.

Voici le détail d'une expérience :

Poids de l'eau pesée dans le vase du calorimètre : 75 grammes.
Poids de l'étain : 28gr832.
Température de l'étain : 99°,10.
Température initiale de l'eau : 19°,83.
Température finale de l'eau : 21°,315 (après correction).
Élévation de la température produite : 1°,485.

On a la relation suivante :

$$1 = \frac{28,832 \,.\, 0,0562\,(99,1 - 21,315) - X \,.\, 1,485}{75 \,.\, 1,485}$$

D'où X = 9gr86 (pour une température moyenne de 20°57).

D'autres expériences nous ont donné les nombres 9gr74 à 17°4 et 9gr90 à 22°. En opérant à la température d'ébullition de l'éther, nous obtenons le chiffre moyen de 10gr30 à 35°, soit un nombre un peu plus élevé, ce qui se conçoit aisément, la chaleur spécifique augmentant avec la température.

Nous avons fait de même avec du glycol pur, puis avec des solutions à 10, 20, etc., jusque 90 °/₀ de glycol.

Chaleur spécifique du glycol à la température ordinaire :

$$c = \frac{28,832 \,.\, 0,0562\,(75,73) - 9,89 \,.\, 2,35}{75,12 \,.\, 2,35} = 0,564;$$

$$c = \frac{27,55 \,.\, 0,0562\,(76,69) - 9,89 \,.\, 2,305}{75,57 \,.\, 2,305} = 0,566.$$

Le nombre adopté entre 20° et 24° est de *0,565*.

Le glycol, préalablement porté vers 35° par des vapeurs d'éther, donne les chiffres suivants :

$$c = \frac{19,81 \,.\, 0,0562\,(63,98) - 10,3 \,.\, 1,31}{75 \,.\, 1,31} = 0,589$$

$$c = \frac{19,81 \,.\, 0,0562\,(65,33) - 10,3 \,.\, 1,33}{75 \,.\, 1,33} = 0,592$$

$$c = \frac{28,832 \,.\, 0,0562\,(65,02) - 10,3 \,.\, 1,85}{75,92 \,.\, 1,85} = 0,591$$

Moyenne adoptée : 0,591 (entre 33°5 et 36°5).

Comparons ces chiffres aux données plus anciennes sur la chaleur spécifique du glycol. De Heen (*), en se servant de la méthode des mélanges, trouve le chiffre de 0,632 entre 17° et 96°, c'est-à-dire pour une température moyenne de 56°. Comme on le voit d'après le diagramme IX, ce résultat concorderait assez bien avec les nôtres : c'est du reste aussi le cas en ce qui concerne les observations de ce physicien sur la dilatation du glycol (voir plus haut, p. 820). Louguinine (**) trouve par la même méthode le nombre 0,6621 entre 22° et 188°, donc pour une température moyenne de 105°. Si ce nombre est exact, la chaleur spécifique du glycol augmenterait avec la température suivant une ligne, droite dans sa partie inférieure, mais allant en s'inclinant vers l'axe des abscisses dans sa partie supérieure. Une telle allure se rencontre chez l'alcool méthylique, d'après Bose et Müller (***). Il serait pourtant prématuré de regarder cette conclusion comme définitive, car nous n'avons pas fait

(*) *Loc. cit.*, p. 33.

(**) *A. Ch.* (7), 13, 1898, pp. 289-397.

(***) *Göttinger Nachr. Math.-Phys. Klasse*, 1906, p. 290. — *Zeitschr. f. phys. Chemie*, t. LVIII, 1907.

d'essai de vérification à des températures supérieures à 35°, d'abord parce que nous n'en avions pas un besoin immédiat pour le calcul de nos chaleurs de mélange, et ensuite parce que notre méthode ne nous permettait pas d'opérer à une température trop haute sans multiplier outre mesure les causes d'erreurs. Il ne s'agit du reste ici que de rapprocher nos déterminations des données plus anciennes, afin de constater que l'accord est très suffisant, eu égard à la différence des méthodes employées.

La chaleur spécifique des solutions aqueuses de glycol a été déterminée par le même procédé : tous les nombres trouvés sont plus forts que ceux prévus théoriquement, en admettant que la chaleur spécifique d'un mélange de deux corps suive une ligne droite entre celle de ses composants.

Dans le tableau suivant, nous avons inscrit les chaleurs spécifiques observées (I), les chaleurs spécifiques théoriques (II) et la différence entre ces deux quantités (III) pour les températures moyennes de 20° et de 35°.

GLYCOL.	EAU.	TEMPÉRATURE : 20°.			TEMPÉRATURE : 35°.		
		I	II	III	I	II	III
0	100	1,000	1,000	0,000	1,000	1,000	0,000
10	90	0,991	0,956	0,035	0,988	0,959	0,029
20	80	0,946	0,913	0,033	0,951	0,918	0,033
30	70	0,897	0,869	0,028	0,909	0,877	0,032
40	60	0,855	0,825	0,030	0,870	0,836	0,034
50	50	0,807	0,782	0,025	0,827	0,796	0,031
60	40	0,761	0,737	0,024	0,783	0,755	0,028
70	30	0,719	0,694	0,025	0,731	0,714	0,017
80	20	0,674	0,650	0,024	0,682	0,673	0,009
90	10	0,628	0,607	0,021	0,637	0,632	0,005
100	0	0,563	0,563	0,000	0,594	0,594	0,000

Dans le diagramme X, nous avons porté sur l'axe des abscisses le pourcentage en glycol, et sur l'axe des ordonnées les écarts entre la chaleur spécifique théorique et la chaleur spécifique observée, autrement dit les nombres de la colonne III. La courbe pointillée inférieure représente le même phénomène pour la glycérine d'après les données de Emo (*). Ces essais ont été faits à la température ordinaire; la courbe que nous donnons a été un peu schématisée, les petites irrégularités provenant sans doute des différences de température auxquelles ces déterminations ont été effectuées. La ligne pointillée supérieure sert de comparaison avec l'alcool éthylique (d'après Bose et Müller, *loc. cit.*).

Ici encore on pourrait répéter l'observation déjà présentée à propos d'autres propriétés, à savoir que le glycol occupe une place intermédiaire entre l'alcool et la glycérine. Il se rapproche toutefois davantage de la glycérine, comme nous aurons encore à le faire observer au sujet des chaleurs de mélange.

Les mélanges alcool-eau présentent, en ce qui concerne la chaleur spécifique, des écarts si considérables de la normale, que les solutions diluées d'alcool vont jusqu'à avoir une chaleur spécifique plus forte que celle de l'eau. Berthelot croyait que le fait se produisait également pour la glycérine; mais Emo a démontré que, tout en étant

---

(*) Emo, *Sui calori specif. è sulla densità delle soluzioni di glycerina nell'aqua.* (Atti R. Acc. d. Sc. di Torino. 17, 1882. — *Pogg. Ann.*, 1882, 6. Suppl., p. 662.)

supérieurs à la théorie, les chiffres donnant les chaleurs spécifiques des solutions de glycérine et d'eau n'atteignaient jamais l'unité. Pour le glycol, si l'on admet notre interpolation graphique entre 0 °/₀ et 10 °/₀, on peut calculer que les nombres obtenus côtoient l'unité, sans pourtant jamais la dépasser : le glycol se comporte donc comme la glycérine, ce qui, au point de vue de cette dernière substance, ne fait que confirmer les expériences de Emo.

Chaleurs de mélange du système glycol-eau.

La question importante pour la détermination des chaleurs de mélange était de porter les deux liquides à une température absolument égale. A cet effet, on a soufflé des ampoules en verre mince, terminées par un tube effilé, dans lesquelles on introduisait l'un des constituants du mélange. L'ampoule, scellée et pesée, était plongée au sein de l'autre constituant, qui, lui, était pesé directement dans le vase servant de calorimètre. Après un repos de plusieurs heures dans le thermostat, on lisait la température sur le thermomètre de Beckman et on brisait l'ampoule à l'intérieur du vase par un coup sec donné avec l'agitateur en platine. On notait l'élévation de température produite, en faisant les corrections nécessaires par suite des échanges de température.

Les essais ont été exécutés de la sorte pour toutes les concentrations (de 10 en 10 °/₀) à la température ordi-

naire, ensuite en portant au préalable les liquides à la température d'ébullition de l'éther, de l'acétone et de l'alcool éthylique.

Il va de soi que, seuls, les essais effectués à la température ordinaire, et, jusqu'à un certain point, ceux effectués vers 30° à 35°, peuvent atteindre une exactitude suffisamment grande; les expériences à une température supérieure n'ont qu'une valeur indicative, d'abord parce que, en général, les mesures thermiques sont beaucoup plus incertaines à des températures tant soit peu élevées et que, en particulier, notre mode d'opérer, excellent à d'autres égards, présentait pour des températures élevées un inconvénient capital : c'est que l'un des liquides se trouvait à l'air libre et pouvait donner lieu à des pertes par évaporation, malgré les précautions prises pour réduire au minimum la surface évaporante et pour assurer une fermeture convenable du vase au moyen d'un bon bouchon.

Les tableaux suivants représentent les résultats de nos expériences. Les colonnes I et II donnent le nombre de grammes de glycol, respectivement d'eau, employés pour le mélange; les colonnes III et IV indiquent la concentration en % de glycol et d'eau; la colonne V donne la température initiale de chaque essai; VI, l'élévation de température observée en tenant compte de la correction nécessaire; sous la rubrique VII sont inscrites les chaleurs spécifiques des mélanges à la température moyenne de l'essai, c'est-à-dire intermédiaire entre la température initiale et la température finale. Dans la colonne VIII se

trouve la valeur en eau du calorimètre et accessoires à la température moyenne de l'expérience; les déterminations en ont été faites à propos de la chaleur spécifique, et il suffit d'y ajouter la valeur en eau des ampoules en verre ayant servi dans chaque essai. Cette valeur s'obtient en multipliant le poids de l'ampoule par la chaleur spécifique du verre qui est égale à 0,20.

En possession de ces données expérimentales, on calcule le nombre de calories-grammes produites par le mélange (colonne IX), ce qui se fait en multipliant la somme des colonnes I, II et VIII par le produit des colonnes VI et VII; le nombre de calories-grammes dégagées pour 1 gramme de mélange (colonne X) s'obtient en divisant les nombres de la colonne IX par le nombre de grammes de liquide mis en expérience, donc par la somme des colonnes I et II. Enfin, dans la colonne XI, on rapporte les résultats de la colonne X à une même température initiale, la température moyenne des essais; pour le premier tableau, c'est 17°, pour le second 32°, pour le troisième 55° et pour le dernier 76°. On obtient ainsi l'ensemble reproduit aux pages 842 à 845.

Les chaleurs spécifiques des mélanges glycol-eau aux températures de 55° et de 76° ont été obtenues par interpolation (de même que les valeurs en eau du calorimètre), ce qui donne une approximation au moins égale à celle des déterminations des chaleurs de mélange.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
					Température initiale : 17°.					
10,6675	96,0075	10	90	17,11	2,50	0,992	10,00	289,35	2,713	2,716
23,6170	94,4680	20	80	14,30	4,70	0,914	10,01	568,29	4,813	4,723
34,3630	80,2037	30	70	17,66	5,90	0,896	10,15	659,30	5,755	5,790
43,2935	64,9402	40	60	15,78	6,91	0,856	10,54	702,52	6,491	6,443
49,2856	49,2856	50	50	17,35	7,02	0,807	10,57	648,30	6,273	6,279
49,2712	32,8473	60	40	14,72	6,73	0,760	10,29	472,65	5,756	5,668
60,3490	25,8510	70	30	17,57	6,48	0,718	10,14	448,10	5,158	5,161
65,1810	16,3710	80	20	16,76	5,40	0,674	10,12	334,79	4,090	4,084
80,3079	8,9233	90	10	17,97	3,30	0,625	10,17	204,81	2,295	2,318

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
					Température initiale : 32°.					
8,8670	79,8030	10	90	33,38	2,02	0,990	10,42	198,16	2,235	2,257
15,1486	60,5944	20	80	31,53	3,75	0,951	10,53	307,65	4,062	4,050
25,2276	58,8640	30	70	31,40	4,88	0,909	10,48	419,50	4,989	4,976
38,0360	57,0510	40	60	30,77	6,05	0,869	10,68	561,34	5,903	5,872
49,3373	49,3373	50	50	30,77	6,24	0,828	10,77	565,60	5,722	5,692
38,0076	25,3384	60	40	30,77	5,66	0,784	10,47	326,27	5,150	5,127
61,8850	26,5220	70	30	30,90	5,52	0,727	10,60	397,32	4,494	4,472
65,3076	16,3269	80	20	31,64	4,56	0,667	10,55	280,38	3,435	3,406
59,4486	6,6054	90	10	31,80	2,69	0,630	10,42	129,60	1,962	1,957

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
					Température initiale : 55°.					
10,0712	90,6408	10	90	54,12	1,75	0,988	11,17	193,44	1,921	1,907
14,6527	58,6108	20	80	54,70	3,19	0,959	11,32	252,87	3,451	3,444
24,7766	57,8120	30	70	54,93	4,27	0,922	11,31	369,68	4,476	4,473
35,4905	53,2380	40	60	53,42	5,36	0,885	11,45	475,60	5,361	5,323
37,1566	37,1566	50	50	54,12	5,30	0,847	11,61	385,72	5,190	5,176
39,0650	26,0435	60	40	54,60	5,03	0,804	11,33	309,13	4,748	4,740
51,1840	21,9361	70	30	54,45	4,63	0,757	11,34	296,03	4,049	4,041
44,1960	11,0490	80	20	54,80	3,58	0,717	11,26	170,98	3,095	3,092
46,0215	5,1135	90	10	55,00	2,21	0,667	11,22	91,92	1,798	1,798

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
					Température initiale : 76°.					
9,4808	85,3281	10	90	75,37	1,41	0,990	11,80	148,83	1,570	1,559
12,0520	48,2030	20	80	75,28	2,59	0,966	11,93	180,62	2,997	2,989
19,3321	46,2750	30	70	76,38	3,88	0,931	12,04	282,29	4,270	4,276
25,6235	38,4302	40	60	75,14	4,69	0,898	12,00	321,16	5,021	5,008
41,9395	41,9395	50	50	76,40	4,88	0,866	12,43	407,01	4,852	4,860
55,2159	36,8106	60	40	76,37	4,73	0,825	12,20	390,23	4,241	4,248
48,2755	20,6895	70	30	77,11	4,04	0,786	12,09	257,10	3,728	3,745
41,1160	10,2790	80	20	77,24	3,23	0,747	11,95	152,84	2,974	2,991
45,8550	5,0950	90	10	76,94	2,09	0,696	11,96	91,51	1,796	1,807

En partant de ces nombres, on a calculé la quantité de calories produites par le mélange de 10, 20, 30, etc., môles de glycol avec 90, 80, 70, etc., môles d'eau. Les nombres obtenus sont réunis dans le tableau ci-dessous, pour les températures initiales de 17°, 32°, 55° et 76°. Ces résultats sont reproduits graphiquement sur le diagramme XI.

Sans vouloir attribuer une importance trop grande aux légères flexions des courbes obtenues, il faut néanmoins y relever certaines particularités sur l'interprétation desquelles nous reviendrons plus loin.

Chaleur de mélange de p pour cent moléculaires de glycol avec 100 - p pour cent moléculaires d'eau

$p =$ °/₀ en môles de glycol.	$100 - p =$ °/₀ en môles d'eau.	TEMPÉRATURE INITIALE DU MÉLANGE			
		17°	32°	55°	76°
10	90	124,14	102,61	94,88	88,74
20	80	169,91	154,34	140,19	135,69
30	70	177,59	160,68	148,42	138,50
40	60	184,34	159,98	144,71	133,93
50	50	174,12	146,88	133,16	126,88
60	40	151,71	126,90	115,57	112,51
70	30	104,01	85,30	78,37	78,45
80	20	83,47	70,49	64,74	64,80
90	10	41,70	35,23	32,37	32,42

On peut également calculer ces chaleurs en partant d'une môle de glycol que l'on mélange avec des quantités

croissantes d'eau, ce qui donne le tableau suivant (voir diagramme XII) :

Nombre de môles d'eau ajoutées à 1 môle de glycol.	17°	32°	55°	76°
1/9 (= 10 °/o moléculaires) . .	46,00	38,83	35,67	35,70
1/4 (= 20 °/o id.) . .	106,52	89,93	82,62	82,66
3/7 (= 30 °/o id.) . .	174,00	147,24	134,97	135,00
2/3 (= 40 °/o id.) . .	247,03	210,46	191,59	186,26
1 (= 50 °/o id.) . .	342,48	293,76	266,32	254,76
3/2 (= 60 °/o id.) . .	428,00	369,53	334,28	312,92
7/3 (= 70 °/o id.) . .	594,86	535,08	494,73	444,60
4 (= 80 °/o id.) . .	849,56	771,70	700,95	658,61
9 (= 90 °/o id.) . .	1241,63	1066,46	948,86	889,73

Une môle d'eau mélangée à des quantités moléculaires croissantes de glycol donne lieu au dégagement de calories consigné dans le tableau ci-dessus (voir diagramme XIII) :

Nombre de môles de glycol ajoutées à 1 môle d'eau.	17°	32°	55°	76°
1/9 (= 10 °/o moléculaires) . .	137,76	118,36	105,27	98,68
1/4 (= 20 °/o id.) . .	212,42	192,96	175,24	164,65
3/7 (= 30 °/o id.) . .	253,65	229,45	212,02	190,09
2/3 (= 40 °/o id.) . .	307,21	266,63	241,18	223,32
1 (= 50 °/o id.) . .	342,40	293,76	266,32	253,76
3/2 (= 60 °/o id.) . .	363,49	310,17	281,91	272,69
7/3 (= 70 °/o id.) . .	406,00	343,37	314,91	313,12
4 (= 80 °/o id.) . .	417,35	352,18	323,72	323,98
9 (= 90 °/o id.) . .	417,02	352,51	323,71	323,97

Les essais précédents démontrent que par mélange de glycol et d'eau il se produit toujours un dégagement de chaleur qui atteint son maximum aux environs de 37 °/₀ de glycol + 63 °/₀ d'eau (à la température ordinaire). Un hydrate de la formule $C_2H_4(OH)_2 + 6H_2O$ aurait une composition centésimale de 36.5 °/₀ de glycol et 63.5 °/₀ d'eau.

La quantité de calories dégagées est d'autant plus faible que la température initiale du mélange est plus élevée, mais la variation de température produite reste toujours positive. Une allure analogue est présentée par les mélanges d'alcool méthylique et d'eau; l'alcool éthylique, au contraire, et surtout l'alcool propylique (n.) donnent lieu à une absorption de chaleur avec l'eau, dès que le mélange se fait à une température assez élevée et que la quantité d'alcool est prépondérante (*).

En outre, à la température d'ébullition du mélange résultant, la chaleur de mélange des alcools avec l'eau n'est nullement égale à 0, comme le supposait Thomson (**), mais elle est, selon le cas, positive ou négative.

En ce qui concerne le système glycol-eau, tout fait prévoir que *la chaleur de mélange à la température d'ébullition est encore nettement positive.*

La glycérine suit vraisemblablement une marche analogue à celle du glycol. Gerlach (***) a exécuté quelques déterminations à la température ordinaire, mais elles manquent totalement de précision; ces essais seraient à reprendre et à compléter.

Il reste à examiner les rapports entre la chaleur de mélange et la chaleur spécifique, et à voir jusqu'à quel

---

(*) Voir Bose, *loc. cit.*

(**) *Thermochemische Untersuchungen,* Kap. 4.

(***) *Loc. cit.*

point le système glycol-eau vérifie la relation bien connue, que la différence entre la chaleur spécifique d'un mélange et celle calculée d'après la chaleur spécifique de ses composants est égale au coefficient de la chaleur de mélange.

En désignant par $Q(x, t)$ la chaleur produite par le mélange de x grammes d'un liquide a avec $1-x$ grammes d'un liquide b, si C_a et C_b sont les chaleurs spécifiques des corps purs a et b, on doit avoir la relation suivante :

$$-\frac{dQ(x,t)}{dt} = C_{ab} - [xC_a + (1-x)C_b].$$

En portant t en abscisses et Q en ordonnées, on obtient la valeur de Q à toutes les températures. Nous reproduisons les valeurs de Q à 15°, 20°, 30° et 35° (températures au voisinage desquelles ont été faites les déterminations des chaleurs spécifiques) ; dans les colonnes III se trouvent calculées les valeurs du coefficient de la chaleur de mélange (c'est-à-dire le premier terme de l'équation précédente) entre 15° et 20° ainsi qu'entre 30° et 35°.

Glycol.	Eau.	I 15°	II 20°	III	I 30°	II 35°	III
10	90	2,78	2,62	0,032	2,32	2,20	0,024
20	80	4,76	4,56	0,040	4,12	3,93	0,034
30	70	5,84	5,65	0,038	5,11	4,94	0,034
40	60	6,51	6,33	0,038	5,95	5,78	0,036
50	50	6,27	6,10	0,036	5,74	5,58	0,034
60	40	5,76	5,51	0,030	5,17	5,05	0,024
70	30	5,27	5,11	0,032	4,53	4,42	0,022
80	20	3,97	3,81	0,032	3,48	3,39	0,018
90	10	2,36	2,24	0,024	1,98	1,92	0,012

Sur les diagrammes XIV et XV, on peut constater que les deux courbes suivent la même allure générale. Il ne faut pas s'exagérer l'importance de certaines petites irrégularités pouvant être dues à des erreurs d'observation ou à des défauts des méthodes employées; on ne doit pas oublier non plus que la chaleur globale observée est la résultante d'une série d'effets thermiques, dont certains sont négatifs : l'acte du mélange produit notamment une absorption de calories, ensuite du travail nécessité par l'écart qui se produit entre les molécules. Si l'effet total est positif, c'est que les causes produisant un dégagement de chaleur (surtout condensation avec formation de combinaisons moléculaires) l'emportent de beaucoup sur les causes donnant lieu au phénomène inverse.

Comme particularité, nous avons à relever le fait que déjà vers 35° la courbe de la chaleur spécifique se rapproche très sensiblement du nombre théorique pour des concentrations de 70 à 90 % de glycol; ceci est en parfait accord avec le fait observé pour les chaleurs de mélange à ces mêmes concentrations. En nous reportant au tableau page 846 et au diagramme XI, nous voyons que de 70 à 100 %, les chaleurs de mélange sont sensiblement les mêmes à 55° et à 76°, c'est-à-dire que le coefficient de la chaleur de mélange est égal à 0; dans ce cas, la différence entre la chaleur spécifique théorique et la chaleur spécifique observée doit donc aussi être égale à 0. L'inclinaison de la courbe vers l'axe des abscisses à 35° est déjà l'indication de ce phénomène.

Résumé et conclusions.

1° Le coefficient de dilatation du glycol éthylénique (sa densité à 0° étant égale à 1,1257) peut être représenté par la formule analytique :

$$V_t = 1 + 0{,}0005657\, t + 0{,}0000017074\, t^2 + 0{,}00000000293\, t^3.$$

2° Le glycol mélangé à l'eau, n'importe en quelles proportions, donne toujours lieu à une contraction et à un dégagement de chaleur.

3° A la température de 0°, le maximum de la contraction se produit pour une concentration d'environ 58 °/₀ de glycol + 42 °/₀ d'eau, ce qui correspond à l'hydrate $2\ C_2H_4\ (OH)_2 + 5\ H_2O$. Il y a alors contraction de 1,545 °/₀ du volume primitif.

4° La contraction diminue avec l'augmentation de température; mais *entre 50° et 70°, elle subit une recrudescence caractéristique, quelle que soit la concentration du mélange*. Les mélanges de glycérine et d'eau présentent un phénomène analogue entre 70° et 90°. Ce fait semble être en relation avec le point d'ébullition des composants.

5° La quantité de calories mises en liberté pour chaque mélange de glycol et d'eau a été calculée en observant l'élévation de température produite et la chaleur spécifique des mélanges correspondants; on a constaté que :

a) La chaleur spécifique du glycol est de 0,563 à 20° et de 0,591 à 35°; celle de ses solutions aqueuses est comprise entre celle du glycol et celle de l'eau (= 1),

mais elle est toujours supérieure à la chaleur spécifique prévue par la théorie;

b) Le nombre de calories dégagées atteint son maximum à une concentration de 37 % de glycol + 63 % d'eau, c'est-à-dire pour l'hydrate $C_2H_4(OH)_2 + 6H_2O$; ce nombre diminue lorsque la température initiale du mélange est plus élevée, mais cette diminution est relativement faible, de telle façon qu'à la température d'ébullition de chaque mélange, cette quantité doit encore être nettement positive.

6° Le système glycol-eau vérifie d'une façon suffisamment approchée la relation thermodynamique d'après laquelle la différence entre la chaleur spécifique théorique et la chaleur spécifique observée est égale au coefficient de la chaleur de mélange.

7° Il ressort de l'ensemble de cette étude que les diols possèdent des propriétés intermédiaires entre celles des monols et des triols; ils se rapprochent toutefois beaucoup plus de ces derniers et offrent moins d'irrégularités que les monols. A cet égard, l'étude systématique des diols et des triols, pour être moins féconde en résultats curieux et en anomalies bizarres, n'en sera peut-être que plus intéressante pour nous permettre d'arriver à la compréhension des phénomènes moléculaires intimes dont nous observons les manifestations extérieures.

Université de Liége. — Institut de Chimie générale.
Juin 1908.

DIAGRAMMES.

Diagramme I. — Dilatation du glycol comparativement à celle de l'alcool, de la glycérine et de l'eau.

Abscisses : température.

Ordonnées : volume, le vol. à 0° étant = 1.

Diagramme II. — Courbes isothermes (à 0°, 50° et 100°) donnant la contraction des différents mélanges de glycol et d'eau, exprimée en °/₀ du volume primitif.

Abscisses : °/₀ en poids de glycol.

Ordonnées : contract. en °/₀ du vol. primitif.

Diagramme III. — Même phénomène qu'au diagramme II pour les mélanges d'alcool éthylique et d'eau (à 0°, 10° et 30°).

Diagramme IV. — Même phénomène qu'au diagramme II pour les mélanges d'alcool méthylique et d'eau (à 0° et 15°56).

Diagrammes V-VI. — Système glycol-eau : marche de la contraction avec la température pour les diverses concentrations.

Abscisses : température.

Ordonnées : contraction en °/₀ du volume primitif.

Diagrammes VII-VIII. — Même phénomène qu'aux diagrammes V et VI pour le système glycérine-eau.

Diagramme IX. — Variations de la chaleur spécifique avec la température : 1 et 2 = nos résultats; 3 = nombre de De Heen; 4 = nombre de Louguinine.

Abscisses : température.

Ordonnées : chaleur spécifique ($H_2O = 1$).

Diagramme X. — Écarts observés entre la chaleur spécifique réelle et la chaleur spécifique théorique pour les mélanges glycol-eau (courbe 1 à 20°, 2 à 35°), les mélanges alcool-eau (courbe 3 d'après Bose) et les mélanges glycérine-eau (courbe 4 d'après Emo).

Abscisses : °/₀ en poids de glycol, resp. d'alcool et de glycérine.

Ordonnées : écart observé (chal. spéc. de $H_2O = 1$).

Diagramme XI. — Chaleur de mélange du système glycol-eau, la température initiale étant de 17° (1), de 32° (2), de 55° (3) et de 76° (4).

Abscisses : °/₀ moléculaires de glycol.

Ordonnées : nombre de calories.

Diagramme XII. — Chaleur de mélange d'une môle de glycol avec des quantités moléculaires croissantes d'eau.

Abscisses : °/₀ moléculaires d'eau.

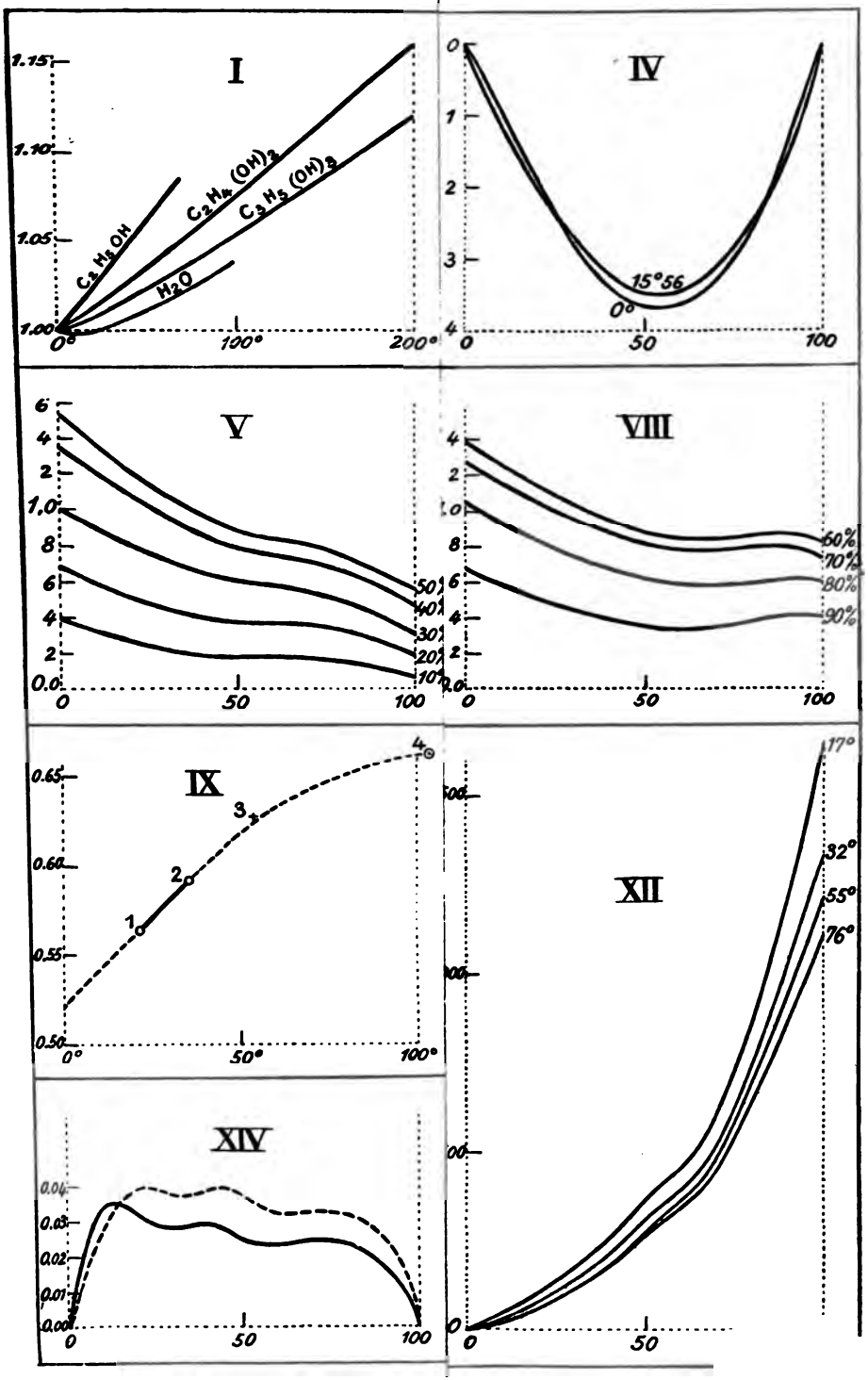
Ordonnées : nombre de calories.

Diagramme XIII. — Chaleur pour une môle d'eau avec des quantités croissantes de glycol.

Diagrammes XIV-XV. — Comparaison entre les coefficients de la chaleur de mélange (ligne pointillée) et l'écart observé entre la chaleur spécifique théorique et la chaleur spécifique réelle.

Abscisses et ordonnées : Voir diagramme X.

—


I
1.15
1.10
1.05
1.00
0°
100°
200°
C_2H_5OH
$C_2H_4(OH)_2$
$C_3H_5(OH)_3$
H_2O
IV
0
1
2
3
4
15°56
0°
0
50
100
V
6
4
2
1,0
8
6
4
2
0.0
50%
40%
30%
20%
10%
0
50
100
VIII
4
2
1.0
8
6
4
2
0.0
60%
70%
80%
90%
0
50
100
IX
0.65
0.60
0.55
0.50
0°
50°
100°
1
2
3
4
XII
17°
32°
55°
76°
0
50
XIV
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0
50
100

Recherches sur le potentiel de la décharge disruptive; par Alphonse Odeurs, docteur en sciences physiques et mathématiques.

PREMIÈRE PARTIE.

Influence de la nature des électrodes sur le potentiel de la décharge disruptive.

La nature des électrodes influe-t-elle sur le potentiel de la décharge électrique?

Tous les expérimentateurs qui se sont occupés de la question sont d'accord pour reconnaître que, si l'on excepte l'aluminium et le magnésium, la nature des électrodes est sans influence bien marquée, et encore peut-on dire que l'influence de ces deux métaux n'est pas certaine.

Righi (*) a essayé des électrodes en carbone, bismuth, étain, plomb, zinc et cuivre; Peace a fait des expériences minutieuses avec des électrodes en zinc et laiton, sans trouver aucune différence appréciable.

M. Carr a employé le laiton, le fer, le zinc et l'aluminium.

D'un autre côté, De La Rue et Hugo Müller (**) ont trouvé que la décharge se fait plus facilement pour des électrodes en aluminium que pour tout autre métal.

(*) Righi, *Nuovo Cimento* (2), XVI, p. 97, 1876.

(**) De La Rue et Müller, *Phil. Trans.*, 169, Pt 1, p. 93, 1898.

Remarquons que la chute cathodique du potentiel, laquelle est intimement liée au potentiel de décharge, ne diffère que de quelques volts pour les métaux employés par Righi, alors que pour l'aluminium et le magnésium cette chute est beaucoup plus petite.

A partir d'une distance des électrodes de l'ordre de grandeur de 10^{-4} millimètres, la nature de celles-ci joue pourtant le rôle principal ; cela se conçoit aisément : la décharge détachant des petites particules métalliques des électrodes, on peut se représenter être là en présence d'une atmosphère exclusivement métallique.

Nous avons voulu pousser plus loin ces recherches, et nous avons remplacé une des électrodes par une surface liquide conductrice. Dans ce cas, la nature du liquide a-t-elle une influence?

Voici brièvement le dispositif expérimental qui a été employé dans ces recherches :

Une machine statique de Wimshurst avait un pôle relié à une batterie de six jarres, à un micromètre d'expériences et à un électromètre; chacun de ces appareils avait l'autre pôle à la terre.

L'électromètre employé est celui de MM. Bichat et Blondlot (*) dont voici le principe : un cylindre fixe Cf, possédant une certaine charge électrique, attire un cylindre mobile Cm, avec une force

$$F = \frac{V^2}{4 \log \frac{R'}{r}},$$

(*) Bichat et Blondlot, *Journal de physique*, 2e série, t. V, pp. 325 et 457, 1886.

F étant évalué en dynes, V en U. E. S. de différence de potentiel, les rayons R et r des deux cylindres en *cm*. Cette action électrostatique de C*f* est équilibrée par des poids déposés sur le plateau d'une balance solidaire de C*m*. Un miroir *m*, également solidaire du cylindre mobile, envoie son image sur une règle graduée. On s'arrange, au moyen de poids convenables, de façon que l'image descende de quelques millimètres, et cela juste au moment où l'étincelle éclate. Alors le potentiel est donné par (*)

$$V = \sqrt{4\,P \log \frac{R}{r}} = 59{,}38 \times \left(\sqrt{P}\ \text{grammes}\right),$$

pour notre instrument où $R = 6^{cm}14$ et $r = 2^{cm}5$.

Quant au micromètre d'expériences, l'une des électrodes était une sphère en laiton de 15 millimètres de diamètre, solidaire d'une vis permettant de la monter et descendre; l'autre électrode se composait d'une petite cuvette en verre de 100 centimètres cubes de contenance, remplie des différents liquides à expérimenter.

C'est cette dernière électrode que nous avons toujours reliée à la terre, en y plongeant un fil de platine.

Les quelques précautions à prendre pour la bonne réussite des expériences sont :

1° Faire mouvoir la machine statique avec une vitesse aussi constante que possible;

2° Réaliser une distance constante entre la surface

(*) Pour plus de détails, consulter : *Annales de la Soc. scient. Bruxelles*, t. XXXI, deuxième partie : *Recherches sur les potentiels* (l'abbé Tits).

liquide et la sphère. Pour cela, il a été procédé comme suit : on a glissé entre le bord supérieur de la cuvette vide et la sphère des plaques en verre d'épaisseurs connues à frottement doux; alors on a versé dans la cuvette exactement 100 centimètres cubes de la solution à étudier, mesurés dans un flacon gradué. De cette façon, l'erreur ne dépassait pas $0^{mm}1$;

3° Nettoyer la sphère après chaque étincelle, parce que, aux petites distances, il y a souvent projection du liquide sur la sphère au moment de la décharge;

4° Un point capital à observer, et qui a failli nous induire en erreur, c'est l'influence de l'humidité sur l'électromètre. Celui-ci indiquait quelquefois des potentiels très différents pour une même solution, dans des conditions identiques. Nous y avons remédié en enfermant l'électromètre dans une cage en verre et en rendant l'air bien sec au moyen d'un corps déliquescent.

Ceci fait, il nous a été facile de vérifier que la nature du liquide est sans influence sur le potentiel de décharge, et cela à un poids de 25 milligrammes près, ce qui constitue 1 °/₀, ou encore à 0.5 U. E. S. près pour nos mesures.

Voici les différentes solutions sur lesquelles nous avons opéré :

a) Solutions de 10 grammes-molécules, de 5, 1 grammes-molécules d'acide sulfurique pur;

b) Solutions de 4, 2, 1 grammes-molécules de chlorure de sodium;

c) Solutions de 1 gramme, $0^{gr}1$, $0^{gr}01$, $0^{gr}001$ de sulfate de zinc;

d) Solutions de glycérine, d'alcool éthylique légèrement conductrice, de nitrate d'uranium, de concentrations diverses.

Les distances entre les électrodes ont été de 3, 5, 8 et 10 millimètres.

A chacune de ces distances, le potentiel est resté constant pour toutes les solutions mentionnées.

En changeant les pôles de la machine, on obtient également des résultats négatifs.

Concluons donc : d'une façon générale, le potentiel de décharge est indépendant de la nature des électrodes, et seule la nature du milieu interposé entre en jeu.

En se basant sur la théorie des ions, ceci nous amène à admettre que, pour les étincelles de faible intensité, les ions métalliques ou autres, se détachant des électrodes et transportant l'électricité, sont en nombre négligeable par rapport à celui des ions gazeux, qui jouent par suite le rôle prépondérant. Plus on rapproche les électrodes, plus faible devient l'épaisseur de la couche gazeuse interposée, plus petit par suite le nombre d'ions gazeux, et c'est ainsi que, arrivé à la distance de 10^{-4} mm., les ions métalliques font sentir leur influence.

DEUXIÈME PARTIE.

Étude du potentiel de décharge au travers des diélectriques solides.

Chapitre premier.

§ 1.

Le travail précédent nous amène à conclure que dans le phénomène de la décharge disruptive, c'est le milieu situé entre les électrodes qui a une influence capitale.

Cette considération nous a suggéré l'idée d'étudier de plus près ce qui se passe dans ce milieu.

La question a été l'objet de nombreuses recherches pour les gaz, et des lois simples s'en sont dégagées relatives à la pression, la température, la composition du gaz, la distance des électrodes.

Mais l'influence de l'interposition d'un diélectrique solide n'a été que peu étudiée, et l'on peut se demander quelles sont les variations que subit le potentiel si, à une portion de l'espace gazeux situé entre les électrodes, on substitue un diélectrique solide.

Toutes nos recherches ont été faites dans l'air à la pression atmosphérique. Pour diélectrique solide, nous avons pris des plaques de verre de différentes épaisseurs, mais ayant toujours 90 millimètres de longueur et 70 millimètres de largeur, sauf pour les cas où il en sera fait une mention spéciale.

§ 2. — *Dispositif expérimental.*

L'installation pour l'électricité statique, comprenant la machine Wimshurst et l'électromètre de Bichat, qui nous a servi dans le travail précédent, n'a pu être employée pour le motif suivant : quand la différence de potentiel atteint une certaine valeur, il y a entre les électrodes une déperdition continue de l'électricité. Suivant la vitesse avec laquelle on fait mouvoir la machine statique, on produit une quantité plus ou moins grande d'électricité; lorsque celle-ci est en excès, la quantité qui s'écoule par les électrodes est relativement minime comparée à la quantité totale, et l'électromètre se déplace; dans le cas contraire, l'électromètre reste immobile.

Le déplacement de l'image sur l'échelle est donc variable avec la vitesse de la machine, et, dans ces conditions, il est impossible de faire une mesure.

Nous avons donc dû recourir à une source d'électricité dynamique fournie par un dispositif de Tesla, sur le circuit secondaire duquel se trouvaient en dérivation le micromètre d'expériences et le micromètre de comparaison.

Les deux électrodes du micromètre d'expériences étaient faites en laiton; l'une, plane, avait 51 millimètres de diamètre, le diélectrique était posé sur celle-ci; l'autre, légèrement recourbée en forme de calotte sphérique, avait 69 millimètres de diamètre. Dans ces conditions, le champ est assez uniforme.

Le micromètre de comparaison, construit à Munich, à l'institut du professeur Edelmann, se composait de deux sphères en laiton de 1 centimètre de diamètre et était muni d'une vis micrométrique permettant d'apprécier les distances à $^1/_{200}$ de millimètre près.

Lorsqu'on emploie pour la mesure du potentiel la méthode du micromètre de comparaison, on procède généralement de la manière suivante :

Soit M_E le micromètre d'expériences, M_c le micromètre de comparaison; les deux étant en dérivation, on fait passer une étincelle. Si celle-ci éclate par exemple en M_E, on rapproche successivement les sphères en M_c, jusqu'à ce que l'étincelle y éclate. Par tâtonnements successifs, on cherche deux valeurs aussi rapprochées que possible, par exemple a^{mm} et $(a + 0{,}01)^{mm}$, telles que pour la distance a des sphères, l'étincelle éclate en M_c, et pour la distance $(a + 0{,}01)$, elle éclate en M_E. La

moyenne arithmétique de ces deux lectures est considérée comme la distance à laquelle l'étincelle passerait indifféremment en M_E ou M_c.

Connaissant cette distance et le rayon des sphères, les tables de M. Heydweiller (*) donnent le potentiel de décharge en volts, relatif à la température de 18° et à la pression de 760 millimètres. On corrige ces chiffres en les augmentant de 1 °/₀ pour un accroissement de pression de 8 millimètres, ou pour une diminution de température de 3 degrés.

Dans le cas actuel, cette façon d'opérer ne nous a pas donné des résultats satisfaisants : d'abord parce qu'en interposant le diélectrique, l'étincelle lumineuse se change en une effluve beaucoup plus sombre et difficile à observer; ensuite, parce qu'il est très difficile d'obtenir une étincelle unique avec la source dynamique; généralement il se produit tout un flux d'étincelles dont une partie éclate en M_c et l'autre en M_E.

Pour parer à ces inconvénients, il a été procédé comme suit :

On place les sphères du micromètre M_c à une distance relativement grande; on fait passer le courant de façon ininterrompue, de telle sorte que, vu la grande distance en M_c, toute la décharge s'opère en M_E. Alors on rapproche lentement les sphères en M_c, jusqu'à ce qu'une série d'étincelles y éclate. A ce moment, on fait la lecture des distances, et on calcule le potentiel d'après M. Heydweiller.

(*) HEYDWEILLER, *Entladungspotentiale.* (ANNALEN DER PHYSIK UND CHEMIE, 48, p. 213, 1893.)

Faisons maintenant quelques remarques concernant cette méthode :

1° En diminuant ainsi graduellement la distance au micromètre de comparaison, il est arrivé quelquefois, notamment à partir d'une distance des sphères de 8 millimètres et plus, qu'une, deux, même trois et quatre étincelles isolées éclataient en M_c et qu'après toute la décharge s'opérait de nouveau en M_E ; il n'a pas été tenu compte de ces étincelles isolées, mais simplement de la distance pour laquelle tout un flux d'étincelles, se succédant assez rapidement, s'est manifesté en M_c.

2° Nous insistons sur le caractère essentiellement relatif des résultats obtenus par cette méthode. Ceux-ci sont nécessairement inférieurs aux potentiels véritables, car, la décharge ayant eu lieu quelques instants au micromètre d'expériences, l'air s'y est fortement ionisé, et l'étincelle passe plus facilement dans ce milieu. Néanmoins, tous les résultats ayant été obtenus d'une manière absolument identique, ils sont nécessairement comparables entre eux, et il est permis d'en déduire les conclusions que nous exposons dans le chapitre II, avec une certitude en rapport avec la limite des erreurs qui est de 8 °/₀.

3° Il est bon d'attendre quelques instants après chaque expérience, afin de permettre à l'ionisation de disparaître complètement.

Notons encore que nos résultats représentent chacun la moyenne d'un grand nombre d'expériences.

Nous avons déjà dit que l'installation pour l'électricité statique n'a pu être utilisée ; toutefois, la combinaison de la machine Wimshurst et du micromètre de comparaison a donné quelques résultats intéressants ; nous en reparlerons plus loin.

Chapitre II.

Résultats.

Remarque. — Les résultats de nos expériences sont exprimés dans les tableaux suivants, où *d* représentera la distance des électrodes métalliques dans le cas où il n'y a pas de verre entre ces électrodes; ou bien, quand une lame de verre reposera sur l'électrode inférieure, ce sera la distance du verre à l'électrode opposée.

Nous appellerons *e* l'épaisseur du diélectrique en millimètres, et U. E. S. le potentiel de décharge en unités électrostatiques.

§ 1.

Nous avons d'abord cherché le potentiel de décharge entre les électrodes métalliques, sans employer le diélectrique, et nous avons trouvé :

Tableau 1.

d	U. E. S.
1	10.80
2	20,50
3	30,20
4	39,00
5	48,00

Ensuite, nous avons posé des diélectriques de différentes épaisseurs sur l'électrode inférieure, et nous avons obtenu pour différentes distances :

Tableau 2.

$e \rightarrow$	1 4	2	3,2	4	5,6
$d \downarrow$	U. E. S.				
1	32,10	36,00	41,50	44,00	50,70
2	36,50	41.50	45.10	48 00	54,30
3	41,20	47,10	51,00	53,00	58,80
4	48 10	56,00	59 00	61,80	66,40

La comparaison de ces deux tableaux nous permet de mettre en regard les potentiels de décharge suivants :

	U. E. S.
3 millimètres d'air entre les électrodes donnent	30,20
1 millimètre d'air + 2 millimètres de verre entre les électrodes donnent	36,00
4 millimètres d'air	39,00
2 millimètres d'air + 2 millimètres de verre.	41,50
5 millimètres d'air	48,00
3 millimètres d'air + 2 millimètres de verre.	47,10

La substitution d'une épaisseur plus ou moins grande d'un diélectrique solide à la même épaisseur d'une couche d'air n'a donc pas une grande influence sur le potentiel de décharge; ce fait est surtout marqué pour les grandes distances explosives auxquelles correspondent des potentiels élevés.

§ 2.

La plaque en verre comprise entre les deux électrodes dont les dimensions ne sont pas négligeables constitue un condensateur.

On peut se demander jusqu'à quel point l'énergie condensante du système intervient dans le phénomène de la décharge.

Le verre peut aussi intervenir plus ou moins comme résistance ohmique.

Selon toute probabilité, les phénomènes sont complexes, la force condensante et de la résistance du verre exercent une influence, et il est intéressant de rechercher la part d'action qu'il convient d'attribuer à chacun de ces facteurs.

Nous avons tout d'abord diminué la capacité du système en enlevant le diélectrique d'entre les électrodes, et en le plaçant dans le circuit. La surface condensante était réduite à deux feuilles d'étain de $1^{cc}5$ collées sur chaque face du verre, les fils du circuit étaient en contact immédiat avec ces feuilles.

Le tableau 3 donne les chiffres obtenus dans ces conditions :

Tableau 3.

$e \rightarrow$	1 4	2	3 2	4	5,6
$d \downarrow$	U. E. S.				
1	42,00	48,00	58,00	64,00	70,50
2	52,20	63 00	70,00	74,75	78,25
3	62,00	73.00	78.10	81 50	—

Ce tableau contient des chiffres plus élevés que ceux du tableau 2.

Le fait de diminuer la capacité de condensation du système élève donc les potentiels de décharge. Inversement, l'accroissement de la capacité de condensation aura pour conséquence une diminution du potentiel de décharge; c'est, en effet, ce que l'on constate en recouvrant le diélectrique de feuilles d'étain de plus grandes dimensions.

Nous avons donc pris le même diélectrique, et nous avons recouvert complètement les deux faces de feuilles d'étain, jusqu'à une distance de 5 millimètres des bords, afin d'éviter que l'étincelle n'éclate entre les deux armatures. La surface des feuilles métalliques avait alors les dimensions de 80 millimètres de longueur et 60 milli-

mètres de largeur, et les chiffres du tableau 4 comparés à ceux du tableau 3 montrent que les potentiels sont moins élevés.

Tableau 4.

$e \rightarrow$	1,4	2	3,2	4	5,5
$d \downarrow$	U. E. S.				
1	—	22,00	—	34,20	—
2	—	31,30	—	41,50	—
3	—	38,00	—	48,10	—

Pour des dimensions des feuilles d'étain intermédiaires entre celles des deux séries d'expériences précédentes, les potentiels ont été également intermédiaires.

Ces constatations nous ont amené à rechercher si, en augmentant, et les dimensions du verre, et celles des armatures, on ne pouvait descendre en dessous des chiffres obtenus dans le tableau 1, qui donne les valeurs des potentiels sans diélectrique. L'expérience nous a prouvé que cela n'était pas possible, mais il existe pourtant certaines conditions pour lesquelles les potentiels sont minima ; ces conditions sont les suivantes :

La plaque de verre ayant 18 millimètres de longueur, 13 millimètres de largeur, $1^{mm}6$ d'épaisseur, et recouverte

de feuilles d'étain jusqu'à une distance de 5 millimètres des bords, nous a donné les résultats inscrits dans la deuxième colonne du tableau 5, tandis que dans la troisième colonne, nous répétons les chiffres du tableau 1.

Tableau 5.

d	U. E. S. (2e colonne.)	U. E. S. (3e colonne.)
3	36,80	30,20
4	45,85	39.00
5	56,00	48,00

Les chiffres de la colonne 2 sont un peu supérieurs à ceux de la colonne 3.

Pour des verres de dimensions plus grandes, les potentiels croissent de nouveau.

§ 3.

Il est intéressant d'étudier l'influence de la suppression complète du diélectrique dans le circuit et de l'introduction d'une résistance ohmique.

Nous avons substitué au verre une solution saline très diluée contenue dans un tube de faible diamètre, et nous

avons réglé la hauteur de la colonne liquide de façon à obtenir, pour une distance des électrodes métalliques de 1 millimètre, un potentiel de même valeur que celui que l'on obtient lorsque le verre de 2 millimètres d'épaisseur est intercalé dans le circuit, soit 48 U. E. S.

Ces conditions sont réalisées lorsque la colonne liquide a une résistance de 4,000 ohms environ. Les chiffres de la deuxième colonne du tableau 6 ont été obtenus avec cette résistance à différentes distances explosives; ceux de la troisième colonne sont empruntés au tableau 3.

Tableau 6.

d	U. E. S. (2e colonne.)	U. E. S. (3e colonne)
1	47,00	48,00
2	56,00	63 00
3	63,00	73,00

Si le diélectrique agissait purement comme une résistance ohmique, les chiffres des colonnes 2 et 3 devraient être les mêmes; leur divergence indique que le diélectrique oppose au passage de l'électricité un autre mode de résistance; on notera pourtant que les divergences ne sont pas grandes.

Nous avons également réglé la colonne liquide de

façon à reproduire la valeur 36 U. E. S. fournie par le tableau 2, correspondant à la valeur obtenue lorsque le verre est placé entre les électrodes. La solution saline satisfaisant à cette condition avait une résistance d'environ 2,000 ohms; elle a donné les valeurs de la deuxième colonne du tableau qui suit, en regard desquelles nous plaçons les valeurs correspondantes du tableau 2.

Tableau 7.

d	U. E. S.	U. E. S.
1	36,00	36,00
2	44 00	41,50
3	51,00	47,10

Contrairement à ce que nous avons obtenu dans le cas précédent, les valeurs pour la résistance ohmique croissent un peu plus rapidement que pour le diélectrique. Cela s'explique par le fait que, dans le cas où le diélectrique se trouve entre des électrodes de grande surface, la force condensante est plus intense, et, comme nous l'avons vu, dans ces conditions les potentiels croissent relativement moins vite pour les grandes distances explosives.

§ 4. — *Courant continu.*

Quelques expériences ont été faites au moyen de la machine Wimshurst, reliée directement aux deux micromètres situés en dérivation dans le circuit.

Le procédé d'expérimentation a été identique au procédé employé pour l'électricité dynamique. Nous avons ainsi reproduit les expériences dont les résultats ont été inscrits dans les tableaux 1, 2 et 3.

Les potentiels de décharge obtenus par le courant continu, sans intervention du verre, sont donnés dans la deuxième colonne du tableau qui suit, tandis que dans la troisième colonne nous reproduisons les résultats obtenus dans les mêmes conditions par le courant alternatif.

Tableau 8.

d	U. E. S. (cour. continu.)	U. E. S. (cour. alternatif.)
1	15,00	10 80
2	24,00	20 50
3	34,40	30,20
4	44,20	39,00
5	56,00	48,00

Ces résultats ne diffèrent que légèrement. Il n'en est plus de même si nous faisons intervenir le verre.

1° En posant le diélectrique de 2 millimètres d'épaisseur sur l'électrode, nous obtenons les résultats de la deuxième colonne, ceux de la troisième représentant les résultats correspondants du tableau 2, relatif aux courants alternatifs.

Tableau 9.

d	U. E. S. (cour. continu.)	U. E. S. (cour. alternatif.)
1	80,00	36,00
2	87,00	41,50
3	96,00	47.10

2° En enlevant le verre d'entre les électrodes et en l'intercalant dans le circuit, recouvert sur ses deux faces d'une feuille d'étain de 1^{cc}5, nous obtenons, pour une distance de 1 millimètre entre les électrodes, un potentiel de décharge égal à 100 U. E. S. environ, tandis que, dans les mêmes conditions, nous avons trouvé 48 U. E. S. dans le cas des courants alternatifs.

Si l'on jette un coup d'œil sur les tableaux 6 et 7, on remarquera que, dans le cas de la décharge alternative de haute fréquence, la substitution d'une résistance ohmique

au diélectrique donne pour les potentiels aux distances explosives correspondantes des valeurs à peu près semblables; le diélectrique dans ce cas se comporte plus ou moins comme un conducteur.

Il n'en est plus de même lorsqu'on emploie un courant continu; dans ce cas, le diélectrique oppose au passage de l'électricité une résistance considérable, comme le montrent les tableaux 9 et 10.

Ces recherches ont été faites au laboratoire de physique de l'Université de Louvain.

Qu'il nous soit permis d'exprimer ici nos vifs remerciements à M. le Prof^r de Hemptinne, qui nous a prodigué, au cours de ces travaux, ses encouragements et ses savants conseils avec une bienveillance et un dévouement auxquels nous tenons à rendre hommage.

Louvain, le 30 juillet 1908.

COMITÉ SECRET.

La Classe se constitue en comité secret pour prendre connaissance des listes des candidatures présentées pour les places vacantes par les Sections.

OUVRAGES PRÉSENTÉS.

Cesàro (*G.*). Interprétation théorique de la loi de Crismer sur l'acidité des beurres. Gand, 1908; extr. in-8° (3 p.).

— Éléments d'analytique sphérique. Bruxelles, 1908; in-8° (20 p.).

Massart (*Jean*). Essai de géographie botanique des districts littoraux et alluviaux de la Belgique, avec annexe. Bruxelles, 1908; 2 vol. in-8°.

Vanlair (*C.*). Comment on devient vieux. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (29 p.).

Archives de biologie publiées par Édouard Van Beneden et Charles Van Bambeke, tome XXIV, fasc. 1, 1908.

Bosmans (*H.*). La « Practicqve om te leeren cypheren » de Nicolas Petri de Deventer. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (32 p.).

— Note sur l'ouvrage : *Anecdota cartographica septentrionalia;* par Axel Björnbo et Carl Petersen. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (5 p.).

— La correspondance inédite du P. Jean de Haysien, d'Ath, missionnaire de la Compagnie de Jésus en Chine au XVIIe siècle. Louvain, 1908 (32 p.).

— Note sur l'ouvrage : Joannis Verneri Mathematici Norimbergensis, De Triangvlis Sphaericis, Libri quatuor... Bruxelles, 1908; extr. in-8° (7 p.).

Schaeberle (*J.-M.*). An explanation of the cause of the eastward circulation of our atmosphere. Ann Arbor, 1908; extr. in-4° (2 p.).

— Geological Climates. Ann Arbor, 1908; extr. in-8° (2 p.).

Zunz (*Edgard*). L'empoisonnement du cœur protégé et non protégé. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (3 p.).

— Quelques modifications apportées au manomètre car-

diaque de Kronecker. Bruxelles, 1908; extr. in 8° (5 p. fig.).

— Eine Kanüle zur Choledochoenterostomie. Strasbourg, 1908; extr. in-8° (2 p. et fig.).

Monier (*Marcel*). La loi de l'attraction universelle considérée comme base fondamentale de l'univers. Anvers, 1908; in-8° (16 p.).

Arnould (*Vincent*). Le mode planétaire, chapitre II. Bruxelles, 1908; in-8° (44 p.).

Stuyvaert (*Mod.*). Centres des moyennes distances de groupes de points sur une courbe gauche. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (22 p.).

Bruxelles. *Ministère de l'Agriculture*. Recensement agricole de 1907, partie documentaire. 1908.

Association internationale de sismologie. Comptes rendus des séances de la deuxième réunion de la Commission permanente, et de la première assemblée générale de l'Association internationale de sismologie, réunie à La Haye, du 21 au 25 septembre 1907. In-4°.

Commission polaire internationale. Session de 1908 : Procès-verbaux des séances présentés par G. Lecointe. 1908; in-8°.

État Indépendant du Congo. Carte de l'État Indépendant du Congo. Échelle 1/1,000,000°. 1907. Gotha, [1908]; 12 feuilles.

— Notices sur des plantes utiles ou intéressantes de la flore du Congo, par Émile De Wildeman, vol. II, fascicule 2, 1908.

Allemagne.

Münden (*Max*). Noch einige Bemerkungen zur Chthonoblastenfrage. Leipzig, 1908; extr. in-8°. (16 p.).

de Ball (*L.*). Die Theorie der Drehung der Erde. Mit 13 Textfiguren. Vienne, 1908; in-4° (58 p.).

BERLIN. *Zentralbureau der internationalen Erdmessung* : Bestimmung der Schwerkraft auf dem Indischen und Grossen Ozean und an deren Küsten, sowie erdmagnetische Messungen von Prof. Dr. O. Hecker. Neue Folge der Verhandlungen Nr 16. 1908; in-4°.

— Verhandlungen der vom 20. bis 28. September 1906 in Budapest abgehaltenen Fünfzehnten Allgemeinen Conferenz der Internationalen Erdmessung. II. Theil : Spezialberichte und Berichte über die Tätigkeit des Zentralbureaus in den Jahren 1904, 1905, 1906 und 1997. 1908; in-4°.

— Hydrostatische Höhenvergleichungen von vier Festpunkten auf dem Telegraphenberge bei Potsdam, von Fr. Kühnen. Neue Folge, Nr. 37. 1908; in-4°.

— Jahresbericht für 1907-1908.

HAMBOURG. *Handelsstatistisches Bureau.* Tabellarische Uebersichten. 1907 ; in-4°.

PRAGUE. *Kön. Gesellschaft der Wissenschaften.* Neue Untersuchungen über die Reifung und Befruchtung (F. Vejdovsky). 1907 ; in-4° (103 p. et 9 pl.).

—

FRANCE.

Tchédrine. La matière réagissante ou théorie physique, mécanique et chimique de la vie. Paris, [1908]; in-8° (327 p.).

Middendorp (*H.-W.*). Le bacille de Koch est une bactérie innocente se développant dans les cavernes tuberculeuses du poumon, dès qu'elles ont communication avec une bronche et par l'agent pathogène de la tuberculose. Le virus tuberculeux est lié à la substance nécrosante de la cellule tuberculeuse en voie de dégénérescence et au protoplasme des cellules fraîches des tubercules gris. Paris, 1908 ; in-8° (32 p.).

—

GRANDE-BRETAGNE ET COLONIES.

Buchanan (*J.-Y.*). Ice and its natural history. Londres, 1908; in-8° (34 p., grav., fig.).

OTTAWA. *Department of the Interior.* Canada's fertile Northland. A glimse of the enormous resources of part of the unexplored regions of the Dominion. With maps. 1907; in-8°.

LONDRES. *Solar Physics Committee.* (Sir N. Lockyer.) Monthly mean values of barometric pressure for 73 selected stations over the earth's surface. 1908; in-4° (v-97 p. et planches).

— (Sir N. Lockyer.) On the general spectra of certain type-stars and the spectra of several of the brighter stars in the Green region. 1908; in-4° (46 p. et pl.).

LONDRES. *National Antarctic Expedition 1901-1904:* Physical observations. — Natural history, vol. IV, Zoology 1908.

Mastrodomenico (*Francesco*). Il vero meccanismo dell' universo ossia la scoperta della « causa » da cui risulta la pesantezza e la gravitazione universale reggente il perpetuo moto dell' universale materia. Naples, 1908; in-8° (105 p.).

MODÈNE. *R. Accademia.* Memorie, vol. VII. 1908; in-4°.

PAYS DIVERS.

Sederholm (*J.-J.*). Explanatory notes to accompany a geological sketch-map of Frenno-Scandia. Helsingfors, 1908; in-8° (31 p., fig. et carte).

Grigoras (*Em.*). La Bialgèbre. Un nouveau système de détermination des sens. Bucarest, 1908; in-8° (31 p.).

CHRISTIANIA. *Videnskabs-Selskabet.* Forhandlinger, 1907. — Skrifter, 1906-1907.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — N° 11.

CLASSE DES SCIENCES.

Séance du 7 novembre 1908.

M. J. Fraipont, directeur.
M. le chevalier Edm. Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. Deruyts, *vice-directeur;* C. Malaise, F. Plateau, Ch. Van Bambeke, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, M. Mourlon, P. Mansion, P. De Heen, C. le Paige, Léon Fredericq, V. Masius, J. Neuberg, Ch. Francotte, Paul Pelseneer, Aug. Lameere, G. Cesàro, Ch.-J. de la Vallée Poussin, *membres;* Th. Durand, Max Lohest, A. Demoulin, V. Willem et Alex. de Hemptinne, *correspondants.*

MM. L. Henry, Alfr. Gilkinet, membres, et A. Gravis, correspondant, ont excusé leur absence.

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts invite la Classe à former une liste double de candidats pour le choix du jury chargé de juger : 1° la seconde période du concours décennal de physique et de chimie expérimentales; 2° la seconde période du concours des sciences botaniques. — Cet objet fera partie de l'ordre du jour de la séance du 5 décembre.

M. le Ministre des Sciences et des Arts envoie, pour la bibliothèque, un exemplaire de la *Flora Batava*, livraisons 249 à 256, 1905-1907. — Remerciements.

— Hommages d'ouvrages :

1° *Observations de chimie classique. Les alcools tertiaires* $-\overset{|}{\underset{|}{C}}-OH$ *considérés comme un lien entre la chimie minérale et la chimie organique;* par L. Henry;

2° *Recueil de l'Institut de botanique* (*Université de Bruxelles*), publié par L. Errera, tome III (présenté par J. Massart);

3° *Paedologisch Jaarboek*, 7e jaargang, 1e aflevering; par M.-C. Schuyten (présenté par M. Ch. Van Bambeke, avec une note qui figure ci-après);

4° *Mélastomacées et Cucurbitacées nouvelles de la vallée de l'Amazone;* par Alfred Cogniaux (présenté par M. Durand, avec une note qui figure ci-après);

5° *Sur l'action de l'anneau de Saturne;* par P. Stroobant;

6° M. G. Lecointe, délégué de la Belgique près la Commission permanente de l'Association internationale de sismologie, fait parvenir quatre nouvelles publications de cette Commission.

— Remerciements.

— Travaux à l'examen :

Les travaux manuscrits suivants seront soumis à l'examen :

1° *Contribution à l'étude des composés cycliques triméthyléniques du type* $\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - R$; par Pierre Bruylants, docteur en sciences. — Commissaires : MM. L. Henry et W. Spring;

2° *Sur l'action de l'éther mésoxalique avec les dérivés alkylhalomagnésiens et sur la synthèse de la pinacone malonique;* par l'abbé Jos. Lemaire. — Commissaires : MM. Spring et Henry;

3° *Sur les invariants intégraux relatifs;* par Th. De Donder. — Commissaires : MM. Ch.-J. de la Vallée Poussin et Demoulin.

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES.

M. le Dr M.-C. Schuyten fait hommage à la Classe du 1er fascicule de la 7e année de son *Paedologisch Jaarboek*.

Voici les en-têtes des divers sujets traités dans ce fascicule : *La consommation du pain chez les enfants et la courbe annuelle de l'énergie vitale. — Recherches esthésio-*

métriques faites sur des élèves adultes qui suivent un cours du soir. — La gaucherie des membres supérieurs en rapport avec le développement intellectuel des enfants. — Contribution à nos connaissances de la droiterie et de la gaucherie des membres inférieurs. — Le travail se termine par un intéressant chapitre sur le *surmenage*.

Les qualités qui distinguent les travaux antérieurs du Dr Schuyten se retrouvent ici, et on constate derechef que l'auteur s'est donné pour tâche d'élucider certaines questions vitales pour la pédagogie.

CH. VAN BAMBEKE.

—

Au nom de M. le professeur A. Cogniaux, j'ai l'honneur d'offrir à la Classe des sciences plusieurs intéressantes notices faisant connaître bon nombre d'espèces remarquables de Mélastomacées et de Cucurbitacées :

1. *Mélastomacées et Cucurbitacées nouvelles de la vallée de l'Amazone.*
2. *Melastomaceae peruvianae.*
3. *Melastomaceae antillanae.*
4. *Cucurbitaceae peruvianae.*
5. *Deux Cucurbitacées nouvelles des îles Samoa.*

TH. DURAND.

RAPPORTS.

—

MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq donnent leur avis sur le rapport que le Dr Nolf a envoyé à M. le Ministre des Sciences et des Arts sur les résultats de ses études à la Station zoologique de Naples, en 1906.

— Ces appréciations seront envoyées au Gouvernement.

— Une note de M. Tobiansky d'Althoff sur la *Faculté de différents corps en mouvement dans l'air de se charger d'électricité atmosphérique* sera déposée aux archives sur l'avis de MM. De Heen et de Hemptinne.

—

Sur la représentation analytique de la conique dans l'espace; par Lucien Godeaux.

Rapport de M. Neuberg.

« M. Godeaux indique trois représentations d'une conique dans l'espace; les deux premières sont analogues à la représentation de la cubique gauche dont M. Stuyvaert s'est servi avec succès dans plusieurs mémoires; la troisième (*) a déjà été employée par M. Godeaux lui-même dans son étude des complexes bilinéaires de coniques.

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 6, pp. 597-601, 1908.

Ces représentations sont respectivement :

$$\begin{Vmatrix} a_x^2 & a'_x & a'' \\ b_x^2 & b'_x & b'' \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} a_x^2 & b_x & c_x \\ a'_x & b' & c' \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\mu_1 a_{1,x}^2 + \mu_2 a_{2,x}^2 + \mu_3 a_{3,x}^2 + \cdots + \mu_6 a_{6,x}^2 = 0,$$

où a_x, a_x^2, $a_{1,x}^2$... représentent des formes linéaires ou des formes quadratiques des coordonnées ponctuelles x_1, x_2, x_3, x_4.

L'auteur montre comment on exprime, dans chacune de ces représentations analytiques, les conditions élémentaires auxquelles on peut assujettir la courbe : conique décomposable, conique touchant un plan donné ou s'appuyant sur une droite donnée.

Quoique assez élémentaire, la note de M. Godeaux me paraît présenter un intérêt suffisant pour paraître dans le *Bulletin* de la séance. Elle sera en quelque sorte l'introduction à des recherches plus complètes sur une question qui est toute d'actualité et à laquelle ce jeune géomètre apportera probablement des contributions importantes. » — Adopté.

Nouvelles recherches sur les fermentations visqueuses;
par H. Van Laer.

Rapport de M. Alfr. Gilkinet, premier commissaire.

« Le mécanisme de la fermentation visqueuse est, somme toute, encore peu connu. On sait que différentes bactéries (*Streptococcus mesenteroïdes* Liesenberg et Zopf,

Bacillus viscosus Adametz, etc.) peuvent provoquer la fermentation visqueuse des sucres en formant en outre différents produits, parmi lesquels l'acide carbonique et les acides gras inférieurs sont les mieux connus. M. Van Laer étudie spécialement l'action du ferment rencontré par lui dans les bières bruxelloises (lambic, faro) et qu'il a nommé : *Bacillus viscosus bruxellensis;* comme beaucoup d'autres bactéries, celui-ci n'est pas seulement un ferment visqueux, mais il produit également dans un liquide sucré de l'anhydride carbonique et des acides gras.

M. Van Laer constate que de faibles doses d'hydrate sodique favorisent la fermentation mucilagineuse; ainsi le degré de viscosité d'un moût (100 c. c.) est triplé, en vingt-quatre heures, par l'addition de $3^{cc}5$ de solution normale décime de soude; dans certains cas, l'addition d'un seul centimètre cube de cette solution alcaline pour 100 centimètres cubes de moût suffit pour augmenter la viscosité dans la proportion de 175 à 360. Des quantités trop fortes d'alcali suspendent la fonction visqueuse jusqu'à ce que le ferment ait produit assez d'acide pour neutraliser l'excès de la base.

L'action des acides, comme cela a lieu du reste dans différentes fermentations, restreint ou suspend la fermentation visqueuse. Cette action n'est pas due à la destruction, par les acides, de la matière visqueuse, au fur et à mesure qu'elle se produit, mais, suivant l'auteur, à l'action qu'exercent les acides sur la viscase, probablement sécrétée par le bacille.

M. Van Laer constate ensuite que l'on peut produire de nouvelles fermentations visqueuses dans un moût ayant déjà subi une première fois la fermentation; il suffit d'ajouter au moût soit de la soude, soit de la craie,

et les moûts ainsi traités renferment une plus grande quantité de cendre que le moût non additionné d'alcali, ce qui est absolument logique, les alcalis ou le carbonate ayant formé des sels avec les acides formés pendant la fermentation; la quantité de cendre augmente, même lorsque la viscosité diminue. Le précipité produit par l'acétone dans un moût qui a fermenté en présence de soude ou de craie peut atteindre de 3.56 à 4.80 °/₀ du moût. D'après l'auteur, ces phénomènes rapprocheraient la production de la viscosité de la coagulation diastatique. L'auteur admet comme probable l'existence d'une zymase (viscase) à laquelle on doit attribuer la fermentation visqueuse.

Le travail de M. Van Laer renferme un certain nombre de faits nouveaux concernant la fermentation visqueuse, et j'en propose volontiers l'insertion dans le *Bulletin* de la séance. »

M. Louis Henry, second commissaire, se rallie à ces conclusions qui sont adoptées par la Classe.

—

Sur l'éthyl-isoamyl- et le méthyl-isohexyl-carbinol; par Armand Buelens, docteur en sciences.

Rapport de M. Louis Henry, premier commissaire.

« Le mémoire de M. Buelens est le complément ou plutôt la suite de celui qu'avait présenté, à la fin de 1906, M. Muset et sur lequel j'ai fait, à cette époque, un rapport (*).

(*) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences) pour 1906, p. 715 et p. 775.

Il est consacré à faire connaître les deux derniers termes, marqués γ et δ, de la série des quatre alcools secondaires qui se rattachent à l' « octane dichotomique »

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} > CH - \underset{\alpha}{CH_2} - \underset{\beta}{CH_2} - \underset{\gamma}{CH_2} - \underset{\delta}{CH_2} - CH_3,$$

à savoir l' « éthyl-isoamyl-carbinol » $C_2H_5\text{-}\underset{\underset{OH}{|}}{CH}\text{-}C_5H_{11}$ et

le « méthyl-isohexyl-carbinol » $CH_3 - \underset{\underset{OH}{|}}{CH} - C_6H_{13}$.

Ces alcools ont été préparés, comme leurs congénères, par la réaction des composés magnésiens des éthers bromhydriques, sur des aldéhydes appropriées, selon la méthode de Grignard. Je tiens à faire constater, à cette occasion, quel service immense rend à la chimie synthétique la méthode, aussi sûre qu'avantageuse, de production de composés alcooliques imaginée par l'habile chimiste de Lyon.

J'ai déjà fait connaître le but que l'on se proposait d'atteindre et l'idée qu'il y avait à prouver par les faits, en appelant à l'existence ces quatre alcools isomères.

On remarquera que leurs points d'ébullition diffèrent sensiblement d'un même nombre de degrés, environ 6°, et qu'ils vont en s'abaissant à mesure qu'ils se rapprochent davantage de la ramure dichotomique.

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} > CH - \underset{\alpha}{CH_2} - \underset{\beta}{CH_2} - \underset{\gamma}{CH_2} - \underset{\delta}{CH_2} - CH_3$$

Alcool – CH (OH) –	α	Éb.	153°-154°
—	β	—	160°
—	γ	—	165°-166°
—	δ	—	171°-172°

Je me propose d'ailleurs de revenir, dans une communication spéciale, sur cet objet intéressant, au point de vue de la question générale de la « volatilité » dans ses rapports avec la structure des molécules polycarbonées et la position des radicaux fonctionnels dans la molécule totale.

M. Buelens fait connaître en même temps la cétone « méthyl-isohexylique » CH_3-CO-C_6H_{13}, produit de l'oxydation de l'alcool correspondant. Cette cétone, à l'instar de celles qui renferment le système H_3C-CO jouit de la propriété de former un composé cristallin, insoluble, avec le bisulfite sodique $NaH(SO_3)$.

Sa notice se termine par la description de l'octane dichotomique encore inconnu jusqu'ici. Cet hydrocarbure, obtenu par voie synthétique, présente, comme en général les composés de ce genre, un point d'ébullition qui est sensiblement la moyenne entre les points d'ébullition des composés simples correspondants.

Le mémoire de M. Buelens est fait avec soin et précision, dans les limites où il s'est renfermé. Avec celui de M. Muset, il constitue une contribution d'un véritable, je dirai même d'un haut intérêt pour la question qui y est traitée.

J'ai l'honneur d'en proposer à la Classe l'insertion dans son *Bulletin*. »

M. Spring, second commissaire, se rallie à cette proposition, qui est adoptée par la Classe.

—

Sur l'allyl-carbinol biméthylé 3-3; par Maurice Van Aerde, docteur en sciences.

Rapport de M. Louis Henry, premier commissaire.

« La réaction du bromure de méthyl-magnésium sur l'éther γ chlorobutyrique $ClCH_2-CH_2-CH_2-CO(OC_2H_5)$ fournit une chlorhydrine, alcool tertiaire, $Cl\,CH_2-CH_2-CH_2-\overset{C}{\underset{OH}{}}<\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}$ qui n'est pas distillable, comme telle.

Sous l'action de la chaleur, elle se transforme en perdant de l'acide chlorhydrique, d'origine diverse, soit en « oxyde de tétraméthylène bi-méthylé »

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>\underbrace{C-CH_2-CH_2-CH_2}_{O},$$

soit en un éther chlorhydrique non saturé auquel j'ai attribué la formule

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>C=CH-CH_2-CH_2Cl$$

Éb. 135°.

M. Van Aerde s'est proposé de préparer et d'étudier l'alcool correspondant à cet éther chlorhydrique.

Cet alcool n'est autre que l' « allyl-carbinol bi-méthylé 3-3 ».

Chauffé avec de l'acétate potassique sec, cet éther chlorhydrique non saturé se transforme en un acétate qui, saponifié par la potasse caustique sèche, a fourni cet alcool à l'état de liberté.

C'est un liquide bouillant fixe à 157°-158° sous la pression ordinaire.

Malgré la fixité de son point d'ébullition, M. Van Aerde incline à ne pas regarder ce produit comme un corps homogène. La raison qu'il en donne est que l'acétate qui lui correspond, alors même qu'il résulte de l'action de l'anhydride acétique $(CH_3 - CO)_2O$ sur l'alcool lui-même, ne bout pas avec la fixité précise des véritables espèces chimiques. Peut-être est-il constitué, selon lui, par un mélange de deux isomères, identiques ou fort rapprochés quant à leurs points d'ébullition, mais différant notablement par leurs acétates. La chose est possible. Il faudrait alors admettre que, lors de la distillation de la chlorhydrine initiale, alcool tertiaire, l'élimination de la molécule d'eau, à la suite de laquelle s'est formé l'éther chlorhydrique non saturé, origine finale de cet alcool, s'est faite simultanément : *a*) dans le complexe

$$> \underset{\underset{OH}{|}}{C} - CH_2 -$$

qui deviendrait $> C = CH -$ comme je l'ai supposé, et *b*) dans le système $\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > C(OH) -$ qui deviendrait à son tour $H_2C = C -$.

Il y a sans doute des exemples de déshydratation de cette nature. Jusqu'à nouvelle information, je ne crois pas la supposition ingénieuse de M. Van Aerde fondée, à cause des relations analogiques du point d'ébullition de cet alcool, en dehors de sa fixité régulière.

M. Van Aerde fait encore connaître quelques produits d'addition des corps qui ont fait l'objet de son attention.

J'aurais voulu que l'auteur fût récompensé de ses

peines par une moisson plus abondante, mais la chimie expérimentale est parfois parcimonieuse dans ses résultats de l'ordre objectif.

Quoi qu'il en soit, pour n'avoir pas donné tous les fruits que j'espérais et qu'il méritait, le travail de M. Van Aerde présente un intérêt très réel et j'en propose volontiers l'insertion dans notre *Bulletin*. »

M. Spring, second commissaire, se rallie à cette proposition, qui est adoptée par la Classe.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

La question du Quaternaire moséen résolue pour les environs de Bruxelles par la découverte « in situ » *de l'*Elephas antiquus; par Michel Mourlon, membre de l'Académie.

Près de vingt années se sont écoulées depuis que je fis, à la séance de la Classe des sciences du 2 mars 1889, une communication *Sur la découverte, à Ixelles (lez-Bruxelles), d'un ossuaire de mammifères, antérieur au Diluvium* (1).

J'ai montré à l'aide d'une coupe, décrite et figurée, de l'une des parois de la sablière Canonne, qui a fourni les ossements de mammifères, que ceux-ci, fort nombreux, se trouvaient éparpillés d'une façon tout à fait anormale

(1) *Bull. de l'Acad. royale de Belgique*, t. XVII, n° 3, pp. 131-151, avec coupe et fig.

en plein sable siliceux du sommet de l'Éocène moyen bruxellien.

Il m'a été donné aussi de montrer à ceux de nos confrères et aux spécialistes qui ont bien voulu se rendre sur les lieux que la présence, en ce point, dans le sable bruxellien, d'innombrables tubulations d'annélides d'une friabilité telle qu'elles disparaissaient sous l'insufflation de l'haleine, ne semble guère autoriser la supposition d'un remaniement du dit sable.

Les ossements s'y trouvaient isolés ou, ce qui était plus fréquemment le cas, disposés dans des pochettes de sable graveleux stratifié, d'une teinte gris sale toute particulière, avec cailloux roulés parfois assez volumineux et le plus souvent plats. J'ai même signalé le cas d'une pochette étendue renfermant des ossements en connexion anatomique et se présentant sous la forme d'un large tuyau allongé, légèrement oblique et situé à 8m50 de la surface, comme cela se trouve décrit et figuré dans le tome XXV bis (1900) des *Mémoires* de la Société géologique de Belgique, page 162.

J'ajouterai qu'il n'a point été rencontré la moindre esquille d'ossement dans les couches sableuses avec gravier et cailloux qui, dans la coupe en question, séparaient le sable bruxellien du limon quaternaire.

Je me suis attaché à montrer que l'ossuaire d'Ixelles constitue un nouvel horizon géologique correspondant, si pas au Forest-bed d'Angleterre, avec lequel il présente certains traits de ressemblance, tout au moins à notre période quaternaire la plus ancienne ou moséenne.

Notre savant confrère M. Dupont ne partagea pas cette opinion, comme en témoigne sa communication à notre séance du 1er juin 1889.

Depuis cette époque, il a été établi, principalement par les remarquables et persévérantes études sur nos dépôts quaternaires dont notre distingué confrère M. Rutot a enrichi la science, que, lorsque les couches sableuses avec graviers et cailloux qui s'observent à la base des limons quaternaires sont à une altitude variant de 30 à 65 mètres au-dessus du fond de la vallée, elles doivent être considérées comme se rapportant à une période plus ancienne que celle durant laquelle se sont déposées des couches analogues situées à un niveau inférieur.

Ce que l'on traduit en disant que les premières sont d'âge moséen et les secondes d'âge campinien. La conséquence qui découle de ce qui précède, c'est que pour la coupe d'Ixelles, qui se trouve à près de 4 kilomètres et demi au sud du Kattepoel et dont le sommet est environ à la cote 83, il faudrait ranger dans le Moséen les couches sableuses avec graviers et cailloux et, à plus forte raison, l'ossuaire qui s'observe à un niveau inférieur.

Mais, si cet ossuaire présente un ensemble faunique assez différent de celui signalé jusqu'ici dans le Campinien, principalement par l'abondance de chevaux de petite taille dont certains caractères semblent devoir leur faire prendre place entre l'*Equus stenonis* du Pliocène moyen et l'*Equus caballus* du Campinien, ce qui a fait proposer à M. De Pauw de leur donner le nom d'*Equus intermedius*, il y a bon nombre d'ossements qui n'ont pu encore être complètement déterminés, comme c'est le cas pour ceux rapportés, sous réserves, à l'*Elephas antiquus?*

Heureusement que la découverte toute récente d'ossements en un autre point des environs de Bruxelles, dans

la grande sablière du Kattepoel à Schaerbeek, va permettre de combler cette lacune et de dater définitivement par la paléontologie nos couches quaternaires rapportées au Moséen. Cette découverte se fit dans de curieuses circonstances qui méritent une mention spéciale. Ayant relevé, dans le courant de la présente année, les coupes mises à découvert par les grands déblais exécutés pour la rectification de la ligne de Schaerbeek au Quartier-Léopold, pour laquelle le Service géologique avait effectué les sondages préliminaires, je fus amené à revoir les anciennes carrières s'étendant entre le hameau d'Helmet et la chaussée de Louvain. Cette région, que je n'avais plus guère visitée depuis un certain temps et qui semble avoir été généralement un peu délaissée par les géologues depuis nombre d'années, me fit découvrir, dans la grande sablière du Kattepoel, un gisement remarquable de blocs fossilifères pétris de coquilles bruxelliennes parmi lesquelles abondait surtout la *Rostellaria ampla*. Après avoir fait transporter au Service géologique une ample moisson de ces blocs, j'en signalai l'existence à M. Delheyd, l'un de nos plus infatigables chercheurs. Celui-ci, s'étant rendu à la sablière, fut prévenu par l'ouvrier que des ossements venaient d'être mis à découvert. Il ne tarda pas à en obtenir un certain nombre parmi lesquels il reconnut plusieurs dents d'Éléphant qu'il crut pouvoir être rapportées au Mammouth et dont il fit généreusement don au Service géologique. Nous nous rendîmes immédiatement ensemble sur les lieux et, grâce aux indications d'ouvriers terrassiers, qui effectuaient un important déblai à la partie supérieure de la paroi méridionale de la sablière, nous pûmes y constater

la présence d'ossements en quatre points différents du Diluvium de la base du Quaternaire.

Seulement, comme ce Diluvium se trouve à plus de 40 mètres au-dessus du niveau de la Senne, il en résultait que l'on devait se trouver ici en présence du Diluvium le plus ancien ou moséen, et non pas du Diluvium proprement dit ou campinien, caractérisé surtout par la présence du Mammouth.

L'examen des ossements du Kattepoel par un spécialiste s'imposait donc et nous eûmes la bonne fortune de pouvoir recourir, cette fois encore, au précieux concours de M. De Pauw. Celui-ci y reconnut de suite la présence de bois de Cerf ainsi que de débris de *Rhinoceros*, de deux dents d'*Equus* sp.? dont une deuxième molaire inférieure gauche et d'une mâchoire presque complète d'Éléphant qui n'était certainement pas l'*Elephas primigenius* ou Mammouth, mais bien l'Éléphant de petite taille dont une partie du squelette provenant d'Hoboken figure dans notre Musée royal d'histoire naturelle sous le nom d'*Elephas antiquus*. Lorsque j'aurai ajouté que M. Rutot, à qui j'ai eu l'occasion de soumettre les mêmes ossements, a confirmé les déterminations de M. De Pauw comme il a reconnu, sur place, le bien fondé de mon interprétation du gisement des dits ossements, j'ose espérer que l'on pourra considérer la question du Quaternaire moséen comme étant résolue tout au moins pour les environs de Bruxelles.

—

Sur la représentation analytique de la conique dans l'espace; par Lucien Godeaux, étudiant en mathématiques.

Il est utile, pour l'étude des systèmes de coniques de l'espace, de posséder une représentation analytique de la conique. Nous en donnons trois différentes dans ce petit travail.

1. — Désignons, suivant la notation de Clebsch et Aronhold, par a_x une forme linéaire des coordonnées ponctuelles (x_1, x_2, x_3, x_4) de l'espace, par a_x^2 une forme quadratique quelconque, etc.

Le lieu des points qui rendent nulle la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_x^2 & a'_x & a'' \\ b_x^2 & b'_x & b'' \end{Vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

est la conique commune au plan

$$a''b'_x - b''a'_x = 0 \qquad (2)$$

et à la quadrique

$$a''b_x^2 - b''a_x^2 = 0. \qquad (3)$$

Cette conique est située sur la surface cubique

$$a'_x b_x^2 - b'_x a_x^2 = 0,$$

dont l'intersection avec le plan (2) se complète par la droite

$$a'_x = 0, \qquad b'_x = 0,$$

et avec la quadrique (3) par la courbe biquadratique de première espèce

$$a_x^2 = 0, \qquad b_x^2 = 0.$$

2. — On peut se proposer de calculer la condition pour que la conique représentée par la matrice (1) dégénère.

L'équation tangentielle de la quadrique (3) est

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & o \\ a''b_{11}-b''a_{11} & a''b_{21}-b''a_{21} & a''b_{31}-b''a_{31} & a''b_{41}-b''a_{41} & u_1 \\ a''b_{12}-b''a_{12} & a''b_{22}-b''a_{22} & a''b_{32}-b''a_{32} & a''b_{42}-b''a_{42} & u_2 \\ a''b_{13}-b''a_{13} & a''b_{23}-b''a_{23} & a''b_{33}-b''a_{33} & a''b_{43}-b''a_{43} & u_3 \\ a''b_{14}-b''a_{14} & a''b_{24}-b''a_{24} & a''b_{34}-b''a_{34} & a''b_{44}-b''a_{44} & u_4 \end{vmatrix} = 0,$$

u_1, u_2, u_3 et u_4 étant les coordonnées courantes.

Pour abréger, nous écrirons cette équation

$$\begin{vmatrix} u_i & o \\ a''b_{ik}-b''a_{ik} & u_k \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k = 1, \ldots 4).$$

La conique (1) dégénère lorsque le plan (2) est tangent à la quadrique (3), donc lorsque l'on a

$$\begin{vmatrix} a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b'_{ik} - b''a'_{ik} & a''b'_k - b''a'_k \end{vmatrix} = 0 \quad (i, k = 1, \ldots 4).$$

Pour exprimer que la conique (1) est tangente au plan $v_x = 0$, il suffit d'exprimer que les plans tangents à la quadrique (3) menés par la droite commune au plan (1) et au plan donné sont confondus.

Un plan quelconque passant par cette droite a pour coordonnées

$$\lambda v_i + a''b'_i - b''a'_i \qquad (i = 1, \ldots 4).$$

Les paramètres des plans tangents à la quadrique (3) sont donnés par

$$\begin{vmatrix} \lambda v_i + a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & \lambda v_k + a''b'_k - b''a'_k \end{vmatrix} = 0 \quad (i,k = 1, \ldots 4).$$

Cette équation peut s'écrire

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} v_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & v_k \end{vmatrix} + 2\lambda \begin{vmatrix} a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & v_k \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & a''b'_k - b''a'_k \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que les deux racines soient égales, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & v_k \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} v_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & v_k \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} a''b'_i - b''a'_i & o \\ a''b_{ik} - b''a_{ik} & a''b'_k - b''a'_k \end{vmatrix} = 0, \quad (i, k = 1, \ldots 4)$$

et telle est la condition cherchée.

On trouve d'une manière simple que la condition pour que la conique (1) s'appuie sur une droite donnée par deux de ses points y, z est

$$\begin{vmatrix} a_y^2 & 2a_y a_z & a_z^2 & b_y^2 & 2b_y b_z & b_z^2 \\ o & a'_y & a'_z & o & b'_y & b'_z \\ a'_y & a'_z & o & b'_y & b'_z & o \\ o & o & a'' & o & o & b'' \\ o & a'' & o & o & b'' & o \\ a'' & o & o & b'' & o & o \end{vmatrix} = 0.$$

3. — La matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & b_x & c_x \\ a'_x & b' & c' \end{matrix} \right\| = 0 \qquad (4)$$

s'annule pour les points d'une conique dont le plan a pour équation

$$b'c_x - c'b_x = 0,$$

et qui est située à la fois sur les deux quadriques

$$b'a_x^2 - b_x a'_x = 0, \qquad c'a_x^2 - c_x a'_x = 0.$$

La condition pour que la conique (4) dégénère peut s'exprimer de deux manières :

$$\begin{vmatrix} 2b'a_{ik} - (a'_i b_k + a'_k b_i) & b'c_k - c'b_k \\ b'c_i - c'b_i & o \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2c'a_{ik} - (a'_i c_k + a'_k c_i) & b'c_k - c'b_k \\ b'c_i - c'b_i & o \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que la conique (4) soit tangente au plan

$$v_x = 0,$$

on doit avoir l'une ou l'autre des conditions (l'une entraînant l'autre)

$$\begin{vmatrix} b'c_i - c'b_i & o \\ 2b'a_{ik} - (a'_i b_k + a'_k b_i) & v_k \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} v_i & o \\ 2b'a_{ik} - (a'_i b_k + a'_k b_i) & v_k \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} b'c_i - c'b_i & o \\ 2b'a_{ik} - (a'_i b_k + a'_k b_i) & b'c_k - c'b_k \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} b'c_i - c'b_i & 0 \\ 2c'a_{ik} - (a'_i c_k + a'_k c_i) & v_k \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} v_i & 0 \\ 2c'a_{ik} - (a'_i c_k + a'_k c_i) & v_k \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} b'c_i - c'b_i & 0 \\ 2b'a_{ik} - (a'_i c_k + a'_k c_i) & b'c_k - c'b_k \end{vmatrix} = 0.$$

De même, la condition pour que la conique (4) rencontre une droite yz s'exprime

$$\begin{vmatrix} a_y^2 & 2a_y a_z & a_z^2 & a'_y & a'_z \\ & b_y & b_z & & b' \\ b_y & b_z & & b' & \\ & c_y & c_z & & c' \\ c_y & c_z & c' & & \end{vmatrix} = 0.$$

4. — On peut encore représenter la conique comme nous l'avons fait dans un travail récent (*).

Une quadrique passant par cinq points d'une conique la contient tout entière, donc toutes les coniques de l'espace sont situées sur les quadriques du système

$$\sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_x^2 = 0, \tag{5}$$

$a1_x^2, \ldots, a6_x^2$ étant les premiers membres des équations de six quadriques linéairement indépendantes.

Une conique est représentée par l'équation

$$u_x = 0 \tag{6}$$

jointe à l'équation (5).

(*) *Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique [Classe des sciences], n° 6, 1908, pp. 597-601.)

A une conique de l'espace correspond un système de valeurs des μ et des u, et inversement. On doit rejeter les systèmes

$$(\mu_j = 0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad u_4), \qquad (j = 1, \ldots 6).$$

$$(\mu_1, \quad \mu_2, \ldots, \mu_6, \quad u_i = 0), \qquad (i = 1, \ldots 4).$$

La condition pour qu'une conique dégénère s'exprime par l'évanouissement du déterminant

$$\begin{vmatrix} u_i & 0 \\ \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_{ik} & u_k \end{vmatrix} = 0, \qquad (i, k = 1, \ldots 4).$$

Pour que la conique représentée par les équations (5) et (6) soit tangente au plan $v_x = 0$, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} u_i & 0 \\ \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_{ik} & v_k \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} u_i & 0 \\ \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_{ik} & u_k \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} v_i & 0 \\ \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_{ik} & v_k \end{vmatrix} = 0, \qquad (i, k = 1, \ldots 4).$$

Enfin, la condition pour que la conique rencontre la droite yz est

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_y^2 & 2\sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_y a j_z & \sum_{j=1}^{6} \mu_j a j_z^2 \\ & u_y & u_z \\ u_y & u_z & \end{vmatrix} = 0.$$

La représentation de la conique par les équations (1) ou (4) peut servir lorsque l'on étudie les congruences de coniques en suivant la méthode développée par M. Stur-

vaert pour les congruences de cubiques gauches (*). Nous nous en sommes servi dans un petit article adressé récemment à la rédaction de la *Grünert's Archiv*. La dernière représentation est utile lorsque l'on recherche l'équation de la surface focale d'une congruence par la méthode infinitésimale (**).

Liége, 27 septembre 1908.

—

Nouvelles recherches sur les fermentations visqueuses; par H. Van Laer, directeur de l'Institut supérieur de brasserie de Gand.

J'ai décrit en 1900 (***), sous le nom de *B. Viscosus bruxellensis*, un ferment visqueux, responsable de cet accident de fabrication que les brasseurs de lambic et de faro de Bruxelles désignent par l'expression de « double face » ou « tweeskinde ». L'aspect dichroïque de ces bières, suivant qu'on les examine par transparence ou par réflexion, résulte d'un envahissement par le *B. Viscosus bruxellensis*, dès l'origine, avant que les levures contenues dans les pores du bois des tonneaux n'aient pu exercer leur action.

Je crois bon, pour la compréhension des résultats qui vont suivre, de rappeler quelques-uns des faits que j'ai établis dans mon mémoire de 1900.

(*) *Cinq études de géométrie analytique.* Gand, Van Goethem, 1908.

(**) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, chap. Ier, pp. 1-22.

(***) *Recherches sur les bières à double face.* (ANNALES DE L'INSTITUT PASTEUR, t. XIV, 1900, p. 82.)

Le *B. Viscosus bruxellensis* se présente en bâtonnets de 1 μ 7 à 2 μ 8 de longueur sur 0 μ 5 à 0 μ 8 de largeur. Dans les milieux qui ne deviennent pas visqueux sous l'influence de cet organisme, tels que certaines eaux de levure sucrées, ou dont la viscosité a disparu, on voit les bacilles entourés d'une capsule elliptique ou allongée, au milieu de laquelle la bactérie se dessine en une ligne plus sombre. Lorsque la prise d'essai est prélevée dans une culture filante, les capsules sont réunies, par une matière zoogléiforme intermédiaire, en une masse glaireuse s'écoulant comme du blanc d'œuf. Cette substance intermédiaire disparaît, ou du moins n'est plus visible, lorsque la période de viscosité est terminée.

Cultivé dans un moût de bière bien limpide, le microbe commence par troubler le liquide; celui-ci prend ensuite une consistance oléagineuse; quelques jours plus tard, le degré viscométrique, mesuré par le temps d'écoulement d'un volume déterminé, à travers une ouverture donnée, après être passé par un maximum, revient à sa valeur initiale. La matière gélatiniforme, qui réunissait en un vaste réticulum toutes les capsules bactériennes, a disparu; l'agitation ou le fouettage énergique désagrège aussi cette zooglée et restitue au liquide sa fluidité primitive.

Pendant la période de filage, il y a dégagement d'anhydride carbonique; lorsque la viscosité a disparu, le moût possède une couleur café au lait, une odeur désagréable. Au fond des ballons, on trouve un dépôt abondant d'une matière amorphe, ressemblant, à l'œil nu, à de la levure.

J'avais déjà noté que, si les moûts de bière sont des milieux très favorables au développement des ferments

visqueux, tous ne se comportent pas de la même façon; le degré viscométrique maximum par lequel ils passent, présente des valeurs très différentes. J'ajouterai que, de même que certaines eaux de levure ne deviennent jamais filantes, tout en permettant la multiplication du microbe, de même j'ai rencontré, depuis, des moûts se comportant d'une façon semblable; le microbe y pousse abondamment, mais sans exercer sa « fonction visqueuse ».

J'ai attribué les différences présentées par ces eaux de levure au mode d'éducation du microbe et aussi à la composition azotée du milieu de culture.

Incidemment, je signale que le filage apparaît plus vite et avec plus d'intensité dans les eaux de levure sucrées, si on en neutralise l'acidité. Dans ma note sur les *Fermentations visqueuses* de 1889 (*), j'avais aussi remarqué que la neutralisation des saccharoses peptonisées favorisait le filage, que de faibles traces d'acidité constituaient, lorsque la proportion de substances azotées n'était pas trop élevée, un obstacle aux fermentations visqueuses. Je n'avais cependant pas approfondi davantage cette question de l'acidité ou de l'alcalinité du milieu, et le présent travail comblera cette lacune.

Rappelons aussi le fait curieux, mentionné dans mon mémoire de 1889, relatif à l'influence du sulfate de chaux : une solution de saccharose peptonisée, saturée de sulfate de chaux, ensemencée avec un peu de ferments visqueux, était trouble et filante au bout de quelques heures à la température de 17° C.; après quarante-huit heures, le liquide était tellement gluant qu'il ne coulait

(*) *Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique*, t. XLIII, 1889.

plus et que le tout s'écoulait en une seule masse lorsqu'on essayait de le transvaser.

Enfin, il est important de se souvenir que le *B. Viscosus bruxellensis* n'est pas seulement un ferment visqueux ; il possède aussi une « fonction acide ». Il décompose une partie des sucres mis à sa disposition en donnant, indépendamment de l'anhydride carbonique, de l'acide lactique et des acides gras (acides acétique et butyrique) ; lorsqu'on additionne la culture de carbonate de chaux, de façon à provoquer la neutralisation des acides au fur et à mesure qu'ils prennent naissance, le microbe peut, en une dizaine de jours, consommer 75 °/₀ de la quantité de dextrose mise à sa disposition dans des solutions d'eau de levure contenant 10 °/₀ de ce sucre. Cette action fermentative du *B. Viscosus* à l'égard des sucres paraît indépendante de sa « fonction visqueuse », sans qu'il ait été possible de déterminer si la fonction acide s'exerce sur les sucres directement ou sur des matières gommeuses produites aux dépens des hydrates de carbone. C'est un autre point que le présent mémoire rencontrera incidemment.

Influence des alcalis.

Le moût est acide à la phénolphtaléine.

Diminuons légèrement, et à des degrés différents, cette acidité par une ajoute d'une solution titrée de soude et comparons, après vingt-quatre heures, le degré viscométrique du liquide ensemencé avec une culture pure de *B. Viscosus bruxellensis* à celui du moût naturel.

Voici les résultats de deux essais choisis parmi plusieurs autres :

Moût I.

Nombre de centimètres cubes de NaOH $^{N}/_{10}$ ajoutés à 100 centimètres cubes de moût.	(Degré viscométrique du moût stérile = 32.) Degré viscométrique après 24 heures.
0 (témoin)	120
1	215
1.5	260
2	265
2.5	290
3	312
3.5	360
4.5	345
5	340

Moût II.

Nombre de centimètres cubes de NaOH N ajoutés à 100 centimètres cubes de moût.	(Degré viscométrique du moût stérile = 36.) Degré viscométrique	
	après 24 heures.	après 10 jours.
0 (témoin)	175	30
1	460	35
2	42	247
3	35	122
4	32	157
5	33	29

Remarquons, tout d'abord, l'influence considérable exercée sur le degré viscométrique du liquide par des quantités excessivement minimes de soude.

Une ajoute de 1 centimètre cube de NaOH $N/_{10}$ correspond à une addition au moût de 4 parties de soude pour 100,000 de liquide, celle de $3^{cc}5$ à 14 parties de soude pour 100.000 de liquide.

Cette dernière dose communique à la liqueur une viscosité triple de celle du témoin.

Ce rôle de la soude fait penser à celui qui est exercé, presque instantanément, il est vrai, par le même corps sur la coagulation de la levure par l'acide borique, examinée dans un travail antérieur (*).

La puissance d'action de la base, comme l'existence d'un optimum bien net de réaction de milieu et d'autres faits qui seront signalés au cours de ce travail, évoquent aussi l'idée de la présence d'une « viscase ». Malheureusement, l'intervention d'une enzyme dans ce phénomène curieux n'a pu être établie directement, malgré de nombreuses expériences que j'ai entreprises pour en rechercher l'existence.

Dans le cas du moût II, l'emploi de 2, 3, 4, 5 centimètres cubes de NaOH N n'a suspendu que la « fonction visqueuse » du microbe, la « fonction acide » a continué à s'exercer jusqu'à ce qu'il y eût suffisamment de soude neutralisée pour que le liquide pût redevenir filant.

Avec 5 centimètres cubes de NaOH N, le moût n'était pas encore devenu apte à filer après dix jours. Une dose

---

(*) *Bulletin de la Société chimique de Belgique*, t. XIX, janvier 1905, et t. XX, août 1906.

de soude plus forte a empêché tout développement du microbe.

De même que, chez la levure de bière, la fonction inversive et la fonction « ferment » sont indépendantes et qu'on peut suspendre cette dernière en maintenant la première, nous voyons cette indépendance de deux propriétés physiologiques se manifester chez le *B. Viscosus bruxellensis*.

Influence des acides.

Les résultats précédents font pressentir que la « fonction visqueuse » sera atténuée et même suspendue par les acides. Les contenus de plusieurs ballons, renfermant 100 centimètres cubes de moût, ont été additionnés de $0^{cc}5$, 1 c. c., 1.5 c. c., 2 c. c., 2.5 c. c., 3 c. c., 3.5 c. c. d'une solution d'acide sulfurique $N/_{10}$ stérile ; après ensemencement, dans les mêmes conditions, par 3 gouttes d'une culture pure de *B. Viscosus bruxellensis*, on note que le liquide contenant $0^{cc}5$ de H_2SO_4 $N/_{10}$ file légèrement, dès le lendemain, et reprend, vingt-quatre heures plus tard, sa fluidité primitive. Le même phénomène est constaté dans le moût à 1 centimètre cube d'acide sulfurique $N/_{10}$, mais plus tard. Dans les liqueurs à 1.5, - 2, - 2.5, - 3 centimètres cubes de H_2SO_4 $N/_{10}$, il y a développement du microbe, mais sans que la liqueur ne devienne à aucun moment filante.

Le moût à 3.5 c. c. de H_2SO_4 $N/_{10}$ reste inaltéré. Des constatations analogues ont été faites, sur le même moût, avec des solutions $N/_{10}$ des acides formique et acétique, mais ces acides se sont montrés moins actifs, en ce sens que l'on a encore observé le filage avec $3^{cc}5$ d'acide formique ou d'acide acétique.

L'ajoute d'un acide à du moût filant ne lui restitue pas, instantanément, sa fluidité primitive; même, avec l'acide chlorhydrique employé en grand excès, la destruction de la gelée exige un ou deux jours.

L'action paralysante exercée par de faibles doses de ces agents sur le phénomène étudié, ne peut donc s'interpréter par une destruction de la matière visqueuse par le peu d'acide mis en œuvre; elle consiste plutôt en une restriction de l'action de la viscase.

De même, la disparition progressive de la viscosité, après que celle-ci a passé par un maximum, n'est pas causée par une action secondaire due aux acides produits par le microbe : d'une part, ces acides ne représentent qu'une faible proportion du sucre décomposé, et, d'autre part, la viscosité disparaît encore, comme nous allons le voir, en présence de soude ou de carbonate de chaux.

Ce ne sont donc pas les acides produits par le microbe qui défont la gelée, comme nous avons vu l'acide, sécrété par de la levure vivante, défaire le coagulum formé par du borax (*). La « fonction acide » n'en est pas moins antagoniste de la « fonction visqueuse », puisque de faibles doses d'acides la restreignent et même la suspendent.

Remarquons aussi qu'on dispose d'un procédé facile pour produire, dans un moût, une fermentation acide sans fermentation visqueuse; il suffit d'y ajouter la quantité d'acide sulfurique intermédiaire entre celle qui empêche le filage et celle qui arrête tout développement du microbe. Le *B. Viscosus* détruit ici le sucre directe-

---

(*) *Loc. cit.*

ment, sans le transformer au préalable en une matière pectique transitoire, qui subirait ensuite une fermentation lactique.

Réapparition de la viscosité dans des moûts ayant filé. — Filages permanents.

Des moûts acidifiés, de façon à supprimer la « fonction visqueuse » du bacille, ont été additionnés, après multiplication du microbe, d'une quantité de soude très légèrement en excès ($0^{cc}5$ $N/_{10}$ °/. c. c.) sur celle qui était nécessaire à la neutralisation de la quantité d'acide mise en œuvre. Le lendemain, tous les liquides étaient filants; la viscosité a ensuite disparu comme dans le cas d'un moût ensemencé directement avec une culture pure de *B. Viscosus*.

De même, des moûts non acidifiés, ayant filé, redevenaient visqueux soit par ajoute de soude, soit lorsqu'on les décantait dans un ballon contenant du carbonate de chaux stérile. Cependant la réapparition de la viscosité n'est jamais instantanée : tantôt la nouvelle fermentation visqueuse se déclare dès le lendemain, tantôt elle ne se manifeste qu'après quelques jours. Avec le carbonate de chaux, elle ne réapparaît souvent qu'après plusieurs semaines, très souvent plusieurs mois.

Ces nouvelles viscosités disparaissent à leur tour, au bout d'un temps plus ou moins long, lorsque la soude est utilisée comme neutralisant; elles se maintiennent indéfiniment sur dépôt de carbonate de chaux.

Ensemençons avec une culture pure de *B. Viscosus bruxellensis* un moût additionné, dès le début, de carbonate

de chaux ou de soude. Le lendemain, le liquide est généralement très visqueux, puis la fluidité reprend peu à peu sa valeur initiale; celle-ci ne se modifie alors plus guère pendant plusieurs jours, quelquefois plusieurs semaines et même plusieurs mois dans le cas du carbonate de chaux; un beau jour, une nouvelle fermentation visqueuse se déclare; avec la craie, le liquide devient de plus en plus gluant; avec la soude, cette nouvelle consistance visqueuse disparaît à son tour.

Exemple :

	(Degré viscométrique du moût stérile = 36.) Degré viscométrique			
	après 24 heures.	après 48 heures.	après 8 jours	après 18 jours.
Moût ensemencé	202	131	35	38
Moût additionné, avant l'ensemencement, de 2 centimètres cubes de NaOH N pour 100 centimètres cubes	384	49	290	30

Appelons « fermentations visqueuses secondes » ces prises en masses gluantes qui se manifestent, au bout d'un temps très variable, dans des moûts contenant, dès le début, du carbonate de chaux en suspension ou de la soude en solution, ou additionnés de ces agents après la disparition de la fermentation visqueuse « première ».

Pendant le temps qui sépare la fermentation « première » de la fermentation « seconde », le liquide reste fluide, mais le sucre continue à être consommé et, dans les fermentations sur craie, la teneur en cendres augmente par suite de la formation de sels organiques de chaux.

C'est ce que montrent les chiffres suivants : ils ont été déterminés sur les liquides débarrassés, par filtration, du sel contenu en excès.

Pour 100 centimètres cubes.	Moût stérilisé en présence de craie.	Moût ensemencé avec le *B. Viscosus bruxellensis* (fermentation en présence de craie)		
		après 24 heures.	après 4 jours.	après 15 jours.
Matière sèche.	8gr08	7gr1	6gr69	4gr25
Cendres. . .	0gr108	0gr144	0gr252	0gr436
Degré viscométrique. . .	30	210	36	30

Ici encore, on reconnaît que la fonction acide du microbe s'exerce *directement* sur les composés hydrocarbonés du milieu de culture.

Avec la soude, les fermentations visqueuses « secondes » ne sont pas, comme nous l'avons vu, permanentes; au bout d'un temps plus ou moins long, le moût reprend sa fluidité; la viscosité se maintient, au contraire, indéfiniment sur dépôt de carbonate de chaux : la masse

devient de plus en plus gluante, surtout dans le voisinage immédiat de la couche de craie. J'ai ainsi des moûts qui sont visqueux depuis près de deux ans.

Ce que nous avons dit plus haut relativement à l'action exercée par les bases et les acides sur la fonction visqueuse du *B. Viscosus bruxellensis*, explique l'apparition de ces fermentations visqueuses secondes. Gênée par les acides fabriqués par le microbe au point de perdre toute action, la viscase reprend son activité par l'ajoute d'un neutralisant, ou la conserve intacte lorsqu'elle opère dès le début en présence d'un excès de craie.

Cependant, cette diastase, au moment où elle est paralysée, a communiqué au liquide une certaine viscosité, et nous ne voyons pas encore pourquoi celle-ci disparaît et pourquoi, même dans la fermentation sur craie, il y a une discontinuité entre la fermentation « première » et la fermentation « seconde ».

Avant d'aborder cette question, il est intéressant d'examiner la matière à laquelle le moût filant doit sa viscosité.

Teneur en cendres de la matière visqueuse.

Dans mon travail sur les bières à double face, j'ai signalé que, si l'on traite une liqueur visqueuse par l'alcool, on obtient une masse qui s'agglomère rapidement en une substance gommeuse par l'agitation avec une baguette de verre. Cette masse, très facile à séparer, se redissout en partie dans l'eau en la rendant visqueuse. Reprécipitée par l'alcool et redesséchée, elle fournit un

corps brun, amorphe, d'aspect vitreux, ressemblant à de l'albumine séchée et contenant de l'azote.

Nous nous trouvons certainement ici en présence d'un mélange de composés ternaires, probablement de nature pectique, et de matières azotées, primitivement en solution et en suspension (microbes), ou en voie de coagulation, et que l'alcool a précipités ensemble, comme c'est le cas général pour les systèmes colloïdaux.

Je ne me suis pas occupé, jusque maintenant, de chercher à purifier ce précipité, mon attention ayant été attirée sur d'autres faits intéressants.

Si on verse lentement du moût visqueux dans une à trois fois son volume d'acétone, en agitant continuellement avec une baguette de verre, on voit s'enrouler, autour de cette dernière, une matière mucilagineuse brune, analogue à celle que donne l'alcool. Elle ne se redissout dans l'eau que difficilement en donnant un liquide visqueux et opalescent, dans lequel on reconnaît les cadavres cellulaires, séparés par une matière mucilagineuse intermédiaire.

Le moût stérile donne aussi un précipité, lorsqu'on le traite par le même volume d'acétone, mais ce précipité a un aspect tout différent; il est poussiéreux et ne s'enroule jamais autour de l'agitateur. Il en est de même pour un moût ensemencé dont la viscosité a disparu.

La matière mucilagineuse, enroulée autour de l'agitateur, a été desséchée à l'air libre d'abord, puis sous un dessiccateur. On a ensuite procédé au dosage de l'azote et des cendres. Les chiffres relatifs à l'azote ne présentent rien de particulier; on ne les mentionne pas.

Il n'en est pas de même de la teneur en cendres ;

celle-ci a toujours été trouvée très élevée, comme le montrent les préparations suivantes :

Origine de la matière visqueuse	Cendres
—	—
Moût filant 24 heures (Viscosité = 62)	1.58 %
Moût additionné de soude (2cc5 NaOH N/10 par 100 centimètres cubes) (24 heures; viscosité = 175).	3.56
Moût additionné de soude (2cc5 NaOH N/10 par 100 centimètres cubes) (24 heures ; viscosité = 175).	3.034
Moût additionné de craie (très gluant)	4.80

Quand on rapproche ce fait de l'aspect microscopique présenté par du moût visqueux, dans lequel nous voyons des microbes *agglutinés* par une matière zoogléiforme, du caractère particulièrement gluant des liquides additionnés de carbonate de chaux et de la permanence des fermentations visqueuses « secondes » sur craie, on ne peut s'empêcher de comparer la « prise en gelée » à un phénomène de coagulation analogue à celui que nous offrent les diastases coagulantes classiques, telles que la présure, la plasmase, la pectase.

De même que la présure ne modifie le caséinogène du lait que de façon à le rendre coagulable par les sels de chaux, de même la viscase produirait une matière colloïdale qui ne se « prendrait en gelée » qu'en présence de composés minéraux appropriés.

Cette assimilation de l'action spécifique produite par le *B. Viscosus* aux phénomènes de coagulation fournit, en attendant la découverte de faits nouveaux, une interprétation provisoire des points encore obscurs soulignés à la fin du paragraphe précédent.

Pour qu'il y ait prise en gelée et maintien du coagulum ainsi formé, il ne suffit pas que le liquide possède la réaction la plus favorable à sa sensibilisation par la viscase. Il faut encore qu'il contienne les substances minérales appropriées, sans lesquelles la coalescence des micelles colloïdales ne peut s'effectuer. Or, dans un moût *non additionné de craie*, ensemencé avec une trace de *B. Viscosus*, il y a non seulement production de viscase, mais les matières minérales du milieu de culture permettent aussi la « prise en gelée »; en se multipliant, le microbe consomme ces composés minéraux sans lesquels le coagulum n'est pas stable; peut-être la substance organique coagulable elle-même est-elle détruite? En même temps, les acides élaborés par le microbe paralysent de plus en plus l'action de la viscase. L'ajoute de soude restitue à celle-ci son activité et permet une nouvelle prise en gelée; celle-ci se maintiendra aussi longtemps que les substances minérales qui ont participé à la coalescence des micelles organiques n'auront pas été consommées. Enfin, dans les fermentations sur craie, il y aura d'abord coagulation et décoagulation pour les mêmes raisons, puis il faudra attendre que la fonction acide du microbe ait restitué au milieu de culture suffisamment de sels de chaux pour que la prise en gelée puisse se rétablir maintenant d'une façon permanente.

Cette théorie considère, dans tous les cas, une enzyme particulière comme le rouage essentiel du mécanisme que je viens d'esquisser. Il importe donc d'examiner de plus près cette question expérimentalement. Avant cela, il ne sera pas inutile d'ajouter que si l'acétone fait bien ressortir les propriétés spéciales de la matière à laquelle

le moût doit sa viscosité, il en est de même du sous-acétate de plomb.

Du moût stérile, additionné d'une solution de ce réactif (10 centimètres cubes de sous-acétate à 20.5 °/₀ de plomb pour 200 centimètres cubes de moût), donne un précipité excessivement ténu, ne s'agglomérant pas.

Du moût filant, traité de la même façon, fournit une masse très floconneuse, plus ou moins caillebottée, se séparant avec la plus grande facilité.

Avec un liquide ayant filé, ce précipité floconneux se forme encore, mais il est plus ténu, plus difficile à retenir que celui que donne le moût visqueux. Ici encore, nous voyons que le « coagulum » n'a pas les mêmes propriétés que le produit « décoagulé ».

Y a-t-il une viscase ?

J'ai déjà dit que je n'étais pas parvenu à obtenir la fermentation visqueuse en l'absence de cellules vivantes. Les cadavres cellulaires que donne notamment l'acétone, introduits dans du moût avec les différents antiseptiques usités dans l'étude des enzymes, ne m'ont rien donné.

Avec les cellules vivantes, il est cependant aisé de démontrer que, au moment où le liquide a sa plus grande viscosité, on se trouve en présence d'un poids de bacilles des plus minimes.

Pour cela, il suffit de comparer la viscosité du moût, après vingt-quatre heures par exemple, au poids de cellules présentes à ce moment. Ce dernier chiffre péchera plutôt par excès, puisque, en supposant l'ensemencement effectué avec une quantité impondérable de semence et

la loi connue de multiplication du microbe, il faudrait substituer au poids de cellules relevé au moment de la pesée, un poids moyen plus bas.

Il est impossible de retenir sur un filtre les cellules présentes dans un moût au moment où celui-ci est visqueux. Pour obvier à cette difficulté, j'ai déterminé le poids de cellules formées après que le liquide eût repris sa fluidité, et je l'ai comparé au poids d'extrait décomposé.

En dosant, d'autre part, dans un second échantillon du même moût, la quantité de matière sèche disparue, lorsque sa viscosité est maximum, et en supposant que le poids de cellules présentes à cet instant soit proportionnel à l'extrait décomposé, ce qui est admissible quand on opère avec le même liquide et quand on ne procède pas à la détermination de la récolte cellulaire après un temps trop long, on peut se faire une idée assez exacte du poids de cellules agissantes au moment où le filage est le plus accentué.

Un moût renfermant, pour 100 centimètres cubes, 6gr58 de matière sèche a été ensemencé avec une culture pure de *B. Viscosus bruxellensis*. A la fin de la période visqueuse, l'extrait décomposé était de 0gr62 et le poids de cellules sèches récoltées sur un filtre taré de 0gr182, soit plus du tiers du poids de l'extrait disparu.

Notons que le nombre 0.182 est beaucoup trop fort; en effet, les cellules ont été pesées avec des matières inertes provenant du moût ainsi que des capsules bactériennes. On sait, par une communication précédente, que le dépôt amorphe, macroscopiquement analogue à de la levure que l'on retrouve au fond des liquides dans lesquels le microbe a vécu, abandonne à la potasse étendue une quantité considérable de matériaux communiquant

au réactif une consistance visqueuse. En réalité, le poids des cellules débarrassées de leur capsule et de tous matériaux étrangers est excessivement faible, et, si une « viscase » se trouve dans les cellules, elle ne s'y trouve qu'en proportions extrêmement réduites.

Le nombre 3, qui représente le rapport de l'extrait décomposé au poids de viscase éventuellement présente dans les cellules, est donc beaucoup trop faible (1).

Or, dans l'une de mes expériences, faite avec du moût additionné de craie pour accentuer le filage, on a relevé après vingt-quatre heures, à la température ordinaire, une disparition de 0gr13 de matière sèche et un degré viscométrique de 250 (le moût stérile accusait un degré viscométrique de 34). Le nombre 0.13 fournit, pour le poids des cellules qui ont effectué cet effet dynamique considérable, un nombre inférieur à 0gr04 et une dose de viscase éventuelle des plus réduite.

A défaut des cadavres possédant la « fonction visqueuse », nous trouvons donc, dans les cellules vivantes, les propriétés essentielles des enzymes : la disproportionnalité entre l'effet produit et la cause, la sensibilité extrême à l'action des acides et des bases.

J'avais déjà montré en 1889, avec mes *B. Viscosus* 1 et 2, qu'en culture dans le moût, les bactéries en question en provoquent le filage à 7° C., qu'au-dessous de cette température le phénomène ne peut pas se produire, qu'il a encore lieu à 42° C., mais que c'est vers 33° C. que la fermentation visqueuse se manifeste le plus vite.

---

(1) Dans certaines fermentations, j'ai trouvé, comme valeur du rapport du poids de l'extrait décomposé à celui des cellules formées, un nombre deux fois plus grand.

Conclusions.

1. La propriété que possède le *Bacillus Viscosus bruxellensis*, de rendre le moût de bière filant, est influencée à un très haut degré par la réaction du milieu. L'addition à un moût de quantités excessivement minimes de soude, augmente considérablement le degré viscométrique du liquide ensemencé avec le microbe. Il existe, pour chaque moût, une réaction pour laquelle le degré viscométrique acquiert sa valeur la plus grande (optimum) et une autre pour laquelle la « fonction visqueuse » est suspendue, sans que le microbe cesse d'exercer sa « fonction acide ».

2. Les acides atténuent et suspendent même, à dose suffisante, la fonction visqueuse du *B. Viscosus bruxellensis*.

L'action exercée par les alcalis et les acides sur la prise en gelée des moûts, sous l'influence du microbe étudié, est identique à celle qu'on observe dans l'étude des enzymes.

3. On peut, par addition de soude ou de craie à un moût ayant filé, y produire une fermentation visqueuse seconde; avec le carbonate de chaux, le filage est permanent et particulièrement intense. Le temps au bout duquel la fermentation visqueuse « seconde » se déclare, est très variable.

4. Les précipités formés dans les moûts visqueux sous l'influence de l'acétone renferment une quantité notable de cendres.

Cette particularité et d'autres encore, comme la grande viscosité des moûts en fermentation visqueuse seconde sur craie, rapprochent pour le moment la prise en

gelée des moûts des phénomènes connus de coagulation diastasique; la disparition de la viscosité peut, provisoirement, être comparée à une décoagulation.

5. Quoique la présence d'une diastase (viscase), ayant la propriété de faire prendre des moûts en gelée, n'ait pu être décelée dans les cadavres cellulaires, on trouve, dans les cellules vivantes qui produisent le phénomène spécifique étudié, les propriétés fondamentales des enzymes.

Sur l'éthyl-isoamyl- et le méthyl-isohexyl-carbinol $(CH_3)_2CH-(CH_2)_2-CHOH-C_2H_5$ et $(CH_3)_2CH-(CH_2)_3-CHOH-CH_3$; par Armand Buelens, docteur en sciences.

A l'octane dichotomique

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - \underset{\alpha}{CH_2} - \underset{\beta}{CH_2} - \underset{\gamma}{CH_2} - \underset{\delta}{CH_2} - CH_3$$

correspondent théoriquement quatre alcools secondaires que l'on peut marquer α, β, γ, δ pour indiquer leur éloignement de la ramification $\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH$.

Deux, ceux désignés par α et β, ont été préparés et étudiés par M. J. Muset.

A l'invitation de M. le Prof^r Louis Henry, je me suis proposé de faire et d'étudier les deux termes restants de cette série quadruple, à savoir l'isoamyl-éthyl-carbinol $C_5H_{11}-CH(OH)-C_2H_5$ et l'isohexyl-méthyl-carbinol $C_6H_{13}-CH(OH)-CH_3$.

L'hydrocarbure auquel ces corps se rattachent étant encore inconnu, il importait de combler cette lacune en appelant ce composé à l'existence en même temps que ses dérivés d'hydroxylation secondaires.

Isoamyl-éthyl-carbinol

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - CH_2 - CH_2 - CH(OH) - C_2H_5.$$

Cet alcool est le produit de la réaction, suivant la méthode de Grignard, de l'isoamyl-bromure de magnésium $\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - CH_2 - CH_2\ MgBr$ sur l'aldéhyde propionique $H_3C - CH_2 - CH = O$.

Cette réaction se fait facilement, et le rendement en est favorable.

Ce corps constitue un liquide incolore, moins mobile que l'eau, d'une agréable odeur, d'une saveur brûlante.

Il est insoluble dans l'eau, mais soluble dans l'alcool, l'éther, etc.

Sa densité à l'état liquide est égale à 0.8084.

Il se congèle à - 61° et il bout à 165°-166° sous la pression ordinaire.

Son indice de réfraction, déterminé dans l'appareil de Pulfrich, est 1.42011 d'où l'on déduit pour le pouvoir réfringent moléculaire 40.70; le calcul correspond à 40.447.

Son poids moléculaire est 130. On a trouvé par la cryoscopie dans l'acide acétique 129.5.

La combustion a fourni les résultats suivants :

	Trouvé.	Calculé.
C . . .	73.50 %	73.84 %
H . . .	13.92	13.84

Chauffé légèrement avec le chlorure d'acétyle, cet alcool fournit aisément l'acétate correspondant

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - (CH_2)_2 - \underset{\underset{OAc}{|}}{CH} - CH_2 - CH_3.$$

Celui-ci constitue un liquide incolore mobile, d'une agréable odeur.

Sa densité à 20° est égale à 0.8554. Il bout à 184°-185° sous la pression ordinaire.

Son indice de réfraction pour la raie jaune du sodium est 1.41602, d'où l'on déduit comme pouvoir réfringent moléculaire 50.53, alors que théoriquement il est 49.838.

La cryoscopie dans l'acide acétique a donné comme poids moléculaire 170, alors que la formule correspond à 172.

Isohexyl-méthyl-carbinol (*)

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - (CH_2)_3 - CH(OH) - CH_3.$$

Cet alcool résulte, suivant la méthode de Grignard, de la réaction de l'aldéhyde acétique, récemment dépolymérisée, sur l'isohexyl-bromure de magnésium

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - (CH_2)_3 CH_2 Mg\,Br.$$

(*) Un alcool secondaire, de même composition globale, le méthyl-hexyl-carbinol

$$CH_3 - CH(OH) - CH_2 - C_3H_{11},$$

d'origine amylique aussi, a déjà été signalé par Melle Ida Welt (*Annales de chimie et de physique*, t. VI, 7e sér., p. 135, année 1895),

L'isohexyl-méthyl-carbinol est fort analogue à l'alcool précédent. C'est aussi un liquide agréablement odorant, d'une saveur piquante et insoluble dans l'eau.

Il bout à 171°-172° sous la pression de 760 millimètres.

Sa densité à 20° est égale à 0.8128.

Son indice de réfraction pour la raie jaune du sodium est 1.42381, ce qui correspond à un pouvoir réfringent moléculaire égal à 40.72, alors que la théorie demande 40.44.

La cryoscopie dans l'acide acétique a donné 129.5 pour poids moléculaire, alors que la formule correspond à 130.

---

mais il n'est que l'isomère de celui que je viens de faire connaître, parce qu'il a été fait à l'aide de composés amyliques actifs dont la structure est différente, comme l'expriment les formules

Alcool amylique actif $CH_3 - CH_2 > CH - CH_2OH$

Alcool amylique ordinaire $CH_3 > CH - CH_2 - CH_2OH$.

Ces deux alcools méthyl-hexyliques diffèrent entre eux par leurs points d'ébullition, comme les alcools amyliques correspondants

$C_2H_5 > CH - CH_2(OH)$ éb. 128°

$CH_3 > CH - CH_2 - CH_2OH$ éb. 130°

$C_2H_5 > CH - (CH_2)_2 - CH(OH) - CH_3$ éb. 167°-169°

$CH_3 > CH - (CH_2)_3 - CH(OH) - CH_3$ éb. 171°-172°.

La combustion de cet alcool a fourni les chiffres suivants :

	Trouvé.	Calculé.
C . . .	73.70 %	73.84 %
H . . .	13.90	13.84

Avec le chlorure d'acétyle $CH_3 - COCl$, il a fourni son acétate

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - (CH_2)_3 - \underset{\underset{OAc}{|}}{CH} - CH_3.$$

C'est un liquide incolore, mobile, d'une odeur agréable, bouillant à 187°-188° sous une pression de 768 millimètres. Sa densité à 20° est égale à 0.8494. Son indice de réfraction étant 1.4137, on obtient pour son pouvoir réfringent moléculaire 50.43, alors que la théorie correspond à 49.83.

Son poids moléculaire déterminé par cryoscopie dans l'acide acétique répond à 170.5, alors que la formule correspond à 172.

Le dosage de l'acide acétique dans cet éther correspond à 34.44 %, alors que le calcul donne 34.84 %.

Soumis à l'action oxydante du mélange chromique, l'alcool isohexyl-méthyl-carbinol

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - (CH_2)_3 - CH(OH) - CH_3$$

se transforme aisément en son acétone, la cétone méthyl-isohexyl- $(CH_3)_2 - CH - (CH_2)_3 - CO - CH_3$; se combinant aisément avec le sulfite bisodique $NaHSO_3$, en solution concentrée, par l'agitation, la purification en est aisée.

C'est un liquide incolore, d'une très agréable odeur, bouillant à 166° sous une pression de 770 millimètres.

Sa densité à l'état liquide est à 20° égale à 0.8151.

Dans son composé sodique sec, j'ai trouvé 10.12 °/₀ de sodium, alors que la formule en demande 9.91 °/₀.

J'ai fait encore l'éther simple méthyl-isooctylique secondaire δ

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - (CH_2)_3 \underset{\underset{OCH_3}{|}}{CH} - CH_3.$$

Je l'ai obtenu par la réaction de l'oxyde de méthyl-éthyle monochloré aldéhydique $CH_3 - CH < \begin{matrix} OCH_3 \\ Cl \end{matrix}$ sur l'isohexyle bromure de magnésium $C_6 H_3 Mg Br$ dans l'éther.

C'est aussi un produit liquide, d'odeur agréable, bouillant à 149°-150° sous une pression de 760 millimètres et ayant pour densité à 20° 0.7945.

Octane dichotomique.

L'hydrocarbure correspondant à la série des alcools secondaires étudiés par M. Muset et par moi, l'octane dichotomique

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_3$$

n'a pas encore été appelé à l'existence. M. L. Henry a tenu à ce que cette lacune fût comblée.

Diverses méthodes se présentaient pour réaliser cette synthèse. La plus simple et celle qui s'offrait d'abord à l'esprit est la combinaison des deux radicaux

butyle en C_4 dont l'octane dichotomique renferme les éléments, l'isobutyle $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>CH\text{-}CH_2\text{-}$ et le butyle normal $CH_3\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_2$; mais dans les conditions où cette combinaison devait être opérée, il devait se former en même temps que l'hydrocarbure cherché, mixte en C_8, l'isobutyl-butyle, les deux hydrocarbures en C_8 simples, le dibutyle normal et le diisobutyle. Le mixte devant avoir un point d'ébullition intermédiaire, il était à craindre que cet ensemble des trois hydrocarbures ne fût fort difficile à séparer.

Observant que l'hydrocarbure cherché en C_8 est en même temps et aussi bien l'isoamyl-propyl normal, j'ai employé un mélange de composés qui devait me donner, à côté de l'octane dichotomique, deux hydrocarbures simples, mais devant avoir des points d'ébullition notablement différents l'un de l'autre et du mixte en C_8.

J'ai donc fait réagir le sodium dans un appareil à reflux sur un mélange équimoléculaire d'iodure de propyle normal $CH_3\text{-}CH_2\text{-}CH_2I$ et d'iodure d'isoamyle $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>CH\text{ - }CH_2\text{ - }CH_2I$.

Je devais obtenir tout ensemble l'hexane normal $C_6\,H_{14}$ éb. 68° et le décane isoamylique $C_{10}\,H_{22}$ éb. 159°, à côté de l'octane dichotomique qui, selon les prévisions analogiques, devait bouillir vers 117°. La séparation de ces hydrocarbures ne devait pas présenter de difficultés sérieuses. Il en a été effectivement ainsi, et les prévisions de M. L. Henry ont été pleinement confirmées.

La réaction s'est opérée de la manière la plus régulière, et je n'ai éprouvé aucune difficulté à isoler de ce

mélange, à l'aide d'un déphlegmateur, l'hydrocarbure en C_8 en question.

Le butyl-isobutyle $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>CH\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_3$ ou l'octane dichotomique, constitue un beau liquide incolore, très mobile, agréablement odorant. Il est insoluble dans l'eau et plus léger que ce liquide; sa densité à 20° est égale à 0.7134.

Il bout fixe à 118° sous la pression de 760 millimètres.

C'est fort sensiblement la moyenne arithmétique entre les points d'ébullition des deux hydrocarbures correspondants

$$\left.\begin{array}{ll} CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH_3 & \text{Éb. } 69^\circ \\ \begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>CH-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-CH<\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix} & \text{Éb. } 159^\circ 5 \end{array}\right\}$$

La moyenne est 114.2.

Sa densité de vapeur a été trouvée égale à 3.98, la densité calculée est 3.94. Son indice de réfraction à 20° étant égal à 1.39807, on a trouvé pour son pouvoir réfringent moléculaire 38.56, alors que la théorie conduit à 38.92.

Alcool isohexylique.

L'alcool isohexylique $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>CH\text{-}(CH_2)_2\text{-}CH_2OH$ qui m'a servi à faire cette synthèse était lui-même un produit de synthèse. Il avait pour origine la réaction de l'isoamylbromure de magnésium sur le poly-oxy-méthylène dans l'éther, mais en présence d'un peu de chlorure de zinc anhydre, qui facilite singulièrement la dépolymérisation du méthanal.

Cet alcool isohexylique bout à 147°-148°.

Saturé d'acide bromhydrique gazeux à diverses reprises et chauffé en vase clos dans l'eau bouillante, cet alcool se transforme en son éther bromhydrique $\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>CH-(CH_2)_2-CH_2\,Br$. Celui-ci est un liquide incolore, à odeur faible, non désagréable, très mobile, bouillant à 146°-147° sous la pression de 760 millimètres.

Sa densité à 20° est égale à 1.1683. Son indice de réfraction pour la raie jaune du sodium est 1.44897, ce qui répond à un pouvoir réfringent moléculaire égal à 37.76; théoriquement c'est 37.596.

Je ne puis terminer ce travail sans exprimer mes plus vifs remerciements à M. le Prof^r Louis Henry, ainsi qu'à M. le Prof^r Paul Henry, pour tous les conseils utiles et bienveillants qu'ils m'ont prodigués au cours de ces recherches.

Sur l'allyl-carbinol biméthylé 3-3

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>C=CH-CH_2-CH_2-OH\,;$$

par Maurice Van Aerde, docteur en sciences.

Je me suis proposé, à l'invitation de M. le Prof^r Louis Henry, de faire l'étude de l'allyl-carbinol biméthylé 3-3

$$\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}>C=CH-CH_2-CH_2-OH$$

et de ses dérivés.

Quoique cette recherche n'ait pas été aussi fructueuse que je l'espérais, je viens en faire connaître les résultats.

Le point de départ final de ce composé est le chlorobromure de triméthylène

$$CH_2Cl-CH_2-CH_2Br,$$

que mon savant maître employa pour la première fois en 1885 (*) et qui, depuis lors, a servi à réaliser tant d'intéressantes synthèses.

Je rappellerai que, soumis à l'action du cyanure de potassium dans l'alcool aqueux, à chaud, il se transforme dans le nitrile de l'acide γ chloro-butyrique, $CN - (CH_2)_2 - CH_2\,Cl$, que l'on transforme lui-même aisément en son éther

$$Cl - CH_2 - CH_2 - CH_2 - CO - OC_2H_5.$$

Celui-ci, à son tour, fournit avec le bromure de méthylmagnésium dans l'éther, $CH_3 - Mg - Br$, selon la méthode de Grignard, la mono-chlorhydrine succinique biméthylée

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C(OH) - CH_2 - CH_2 - CH_2 - Cl.$$

Je ne m'arrêterai guère à ce composé, qui fait partie d'un travail d'ensemble que se propose de publier M. le Prof^r Louis Henry sur les chlorhydrines glycoliques. Soumise à l'action de la chaleur sous la pression ordinaire, cette chlorhydrine subit un double dédoublement, avec départ d'acide chlorhydrique et d'eau :

a) Une partie se transforme en oxyde du glycol succinique biméthylé

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > \underbrace{C - (CH_2)_2 - CH_2}_{O}$$

Ébullition 95° : c'est le produit de l'élimination de HCl;

b) et une partie plus considérable, en un composé non

(*) *Sur les composés butyriques monochlorés, normaux et primaires.* (COMPTES RENDUS, t. CI, p. 1158.)

saturé, qui résulte de l'élimination de l'eau. Celui-ci est un éther chlorhydrique bouillant à 135°, sous la pression ordinaire. M. Louis Henry l'a déjà fait connaître précédemment (*) et lui attribue la formule

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C = CH - CH_2 - CH_2Cl.$$

C'est le composé sur lequel j'ai travaillé.

Mélangé en proportions convenables avec de l'acétate de potassium fondu, additionné d'un peu d'acide acétique glacial et chauffé en tubes scellés à une température d'environ 150°, pendant quarante-huit heures; cet éther chlorhydrique se transforme en acétate. La masse saline, dissoute dans l'eau, fournit une couche surnageante. Celle-ci, desséchée sur du chlorure calcique fondu, a été soumise à la distillation. Elle passe entre 165° et 175° sous la pression ordinaire, sans permettre la détermination d'un point d'ébullition précis.

J'ai soumis ce produit, comme tel, à l'action de la potasse caustique.

Mélangé à un léger excès de ce réactif, à l'état pulvérulent, il en est décomposé vivement dès la température ordinaire. J'ai continué à chauffer la masse semi-solide, pendant environ une demi-heure, dans un ballon au bain d'air, muni d'un tube réfrigérant. L'addition de l'eau à la masse refroidie en sépare une couche huileuse surnageante, que j'ai desséchée à l'aide du carbonate bipotassique fondu.

Soumis à la distillation, cet alcool passe, en presque totalité, à 157°-158° sous la pression de 771 millimètres.

(*) *Sur la lactone butyrique et le glycol succinique biméthylé dissymétrique.* (COMPTES RENDUS, t. CXLIII, p. 1221, année 1906.)

Eu égard à son origine, l'éther chlorhydrique étant

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C = CH - CH_2 - CH_2Cl,$$

cet alcool doit être l'*allyl-carbinol biméthylé 3-3*

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C = CH - CH_2 - CH_2 - OH.$$

Son analyse a fourni les résultats suivants :

I. 0gr1048 de substance ont donné 0gr1140 d'eau et 0gr2745 de gaz carbonique;

II. 0gr130 de substance ont fourni 0gr142 d'eau et 0gr3396 de gaz carbonique, ce qui correspond à

	$C_6H_{12}O$	Calculé.	Trouvé. I	Trouvé. II
C_6	72	72	71.43	71.20
H_{12}	12	12	12.09	12.14
O	16			
	100			

Cet alcool constitue un liquide incolore, à odeur faible rappelant celle de la térébenthine, très réfringent, d'une saveur âcre et piquante.

Refroidi à — 75°, il ne s'est pas congelé.

Sa densité à l'état liquide est, par rapport à l'eau à la même température, égale à 0.8615 à 20°.

Sa densité de vapeur, prise par la méthode de Victor Meyer, a fourni les chiffres suivants :

0gr0934 de substance chauffée à 200° ont fourni 21 centimètres cubes d'air à 14°, sous la pression de 757 millimètres. Ce qui correspond à 3.48. La densité calculée est 3.45.

Le poids moléculaire, déterminé par la méthode cryo-

scopique dans l'acide acétique, a fourni les résultats suivants pour 13 grammes d'acide employé :

	I	II	III
Substance	0gr1360	0gr2620	0gr3725
Abaissement de l'échelle thermométrique.	40	40	72
Poids moléculaire trouvé	100.2	98.2	99.76

Le poids moléculaire calculé est 100.

L'indice de réfraction, déterminé dans l'appareil de Pulfrich dans les conditions connues, est 1.44416. Eu égard à sa densité, que j'ai indiquée plus haut, on en déduit pour le pouvoir réfringent moléculaire 31.011, alors que la théorie conduirait à 31.026.

L'alcool que je viens de faire connaître possède bien le point d'ébullition que l'analogie assigne à l'allyl-carbinol biméthylé 3-3

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C = CH - CH_2 - CH_2OH.$$

Il existe, en effet, entre cet alcool non saturé et l'hydrocarbure correspondant, le même rapport de volatilité qu'entre les composés du même ordre, alcool et hydrocarbure, saturés.

Composés saturés.

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - CH_2 - CH_2 - CH_3 \qquad \text{Éb. } 62^\circ.$$

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CH - CH_2 - CH_2 - CH_2 - OH \qquad \text{Éb. } 150^\circ\text{-}151^\circ.$$

Différence 88°-89°.

Composés non saturés.

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C = CH - CH_2 - CH_3 \qquad \text{Éb. } 67^\circ.$$

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C = CH - CH_2 - CH_2(OH) \qquad \text{Éb. } 157^\circ.$$

Différence 90°.

Je reviendrai plus loin sur ce point.

N'ayant pas pu obtenir, par la réaction de l'éther chlorhydrique, un acétate avec un point d'ébullition fixe, j'avais pensé qu'en employant l'alcool lui-même pour cet objet, j'obtiendrais un meilleur résultat.

J'ai eu d'abord recours à la réaction du chlorure d'acétyle. Elle est énergique, mais je me suis bien vite aperçu qu'elle n'était guère propre à donner le produit désiré : une partie de l'acide chlorhydrique restait fixée sur le produit non saturé pour former une chloro-acétine.

Je me suis adressé alors à l'anhydride acétique. Celui-ci, chauffé légèrement avec l'alcool, en quantités équimoléculaires, le transforme aisément en acétate, avec formation d'acide acétique. On lave la masse à l'eau pour éliminer celui-ci et on dessèche le produit restant à l'aide du chlorure calcique. J'ai obtenu ainsi un éther acétique bouillant entre 165° et 175°. J'en ai isolé par distillation la portion médiane bouillant entre 168° et 170°.

L'analyse de ce composé m'a fourni les chiffres suivants :

Substance	0gr1599
Eau	0gr1525
Anhydride carbonique . . .	0gr3963

d'où l'on déduit :

Carbone	67.60 %
Hydrogène	10.60 %

alors que la formule $C_6 H_{12} (C_2 H_3 O_2)$ correspond à 67.89 de carbone et 10.14 % d'hydrogène.

C'est un liquide incolore, à odeur fraîche et à saveur piquante, surnageant à l'eau ; sa densité à l'état liquide est égale à 0.9183 à 20°.

Sa densité de vapeur, d'après la méthode de Victor Meyer, a été trouvée égale à 4.734, alors que la théorie conduit à 4.90, à la suite des données suivantes :

Substance : 0gr1415 ; volume d'air déplacé à 18° sous la pression de 758 millimètres : 25cc2.

Le poids moléculaire a été déterminé par la méthode cryoscopique dans l'acide acétique, pour 14gr30 d'acide employé.

	I	II
Substance	0gr1378	0gr2501
Abaissement thermométrique. . .	27	49
Poids moléculaire trouvé	139.0	138.9

Le poids moléculaire calculé est 142.

L'indice de réfraction, pris à l'appareil de Pulfrich, dans les conditions ordinaires, est 1.4308 ; pour une densité prise à 20°, le pouvoir réfringent moléculaire est 40.119, alors que théoriquement le calcul conduit à 40.229.

Les portions de ce composé passant de 166° à 175° ont été saponifiées par la potasse caustique ; l'alcool régénéré obtenu a, de nouveau, bouilli avec une remarquable fixité à 157°.

L'absence d'un point fixe d'ébullition pour l'acétate, quel qu'en soit le mode de production, est un fait qui donne à réfléchir.

Peut-être l'alcool est-il un mélange de deux isomères ayant des points d'ébullition identiques ou fort rapprochés, et leurs acétates s'écartant notablement l'un de l'autre, comme M. Louis Henry l'a fait voir précédemment. Il faudrait alors admettre que le produit initial, l'éther chlorhydrique formé lors de la déshydratation de la chlorhydrine en C_6, d'origine chloro-butyrique, n'est pas lui-même un produit homogène et se constitue de deux isomères. A

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > \underset{\underset{OH}{|}}{C} - CH_2 - CH_2 - CH_2Cl$$

correspondent, en effet, deux éthers chlorhydriques non saturés, suivant que la molécule d'eau H-OH s'élimine des systèmes

$$\begin{matrix} \vee \\ C - OH \\ | \\ CH_2 \\ | \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} CH_3 \\ \vee \\ C - OH \\ | \end{matrix}$$

pour former les composés

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C = CH - CH_2 - CH_2Cl$$

ou

$$CH_2 = \underset{\underset{CH_3}{|}}{C} - CH_2 - CH_2 - CH_2Cl.$$

Si l'on parvenait à constater, lors de l'oxydation par le mélange chromique de ce produit chlorhydrique, la production de l'acétone ordinaire : CH_3-CO-CH_3, la question serait résolue; mais je n'ai pas réalisé cette réaction, et, cela étant, je juge inutile de m'arrêter davantage à discuter ce point.

Chloro-acétine du glycol diméthyl-succinique

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C(OAc) - CH_2 - CH_2 - CH_2Cl.$$

Dans l'intention d'obtenir ce produit, j'avais fait réagir, suivant la méthode indiquée par Houben pour préparer les acétates des alcools tertiaires, l'anhydride acétique, dissous dans l'éther, sur le produit direct du bromure de méthyl-magnésium, CH_3-Mg-Br.

L'addition de l'anhydride acétique provoque d'abord la précipitation d'un corps solide blanc. Celui-ci disparaissait par l'eau qui dissolvait presque entièrement cette masse solide.

De la liqueur éthérée surnageante, desséchée sur K_2CO_3, on a chassé l'éther. Le résidu de cette distillation a été divisé en deux parties : la première a été distillée sous pression raréfiée. C'était un mélange d'acide acétique, de l'éther chlorhydrique précédemment indiqué et de l'oxyde de diméthyl-tétraméthylène

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > \underbrace{C - (CH_2)_3 - CH_2}_{O} \qquad \text{Éb. } 95^\circ.$$

L'autre portion, chauffée avec de l'acétate de potassium qui, dans ma pensée, devait fournir la diacétine du glycol diméthyl-succinique

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > \underset{OAc}{C} - (CH_2)_2 - \underset{OAc}{CH_2}$$

n'a donné, dans ces conditions, que de l'acétate non

saturé, éb. vers 160°, et de l'oxyde de diméthyl-tétraméthylène

$$(CH_3)_2 - \underbrace{C - CH - CH_2 - CH_2}_{O} \qquad \text{Éb } 95°.$$

La réaction de Houben ne s'était donc pas réalisée dans ces circonstances.

Je juge inopportun de m'occuper ici de l'oxyde de tétraméthylène biméthylé 1-1 éb. 95°, qui a déjà fait l'objet de travaux d'autres chimistes et qui doit être étudié plus particulièrement par M. Louis Henry dans son mémoire sur les chlorhydrines alcools tertiaires synthétiques.

Produits d'addition.

En leur qualité de composés non saturés, les corps précédemment signalés jouissent du pouvoir additionnel. Ils se combinent intensément avec le brome, en subissant toutefois une légère réaction de substitution, ainsi que l'accusent les dosages de brome.

Le mieux est d'opérer en solution chloroformique.

Ce sont des liquides épais et visqueux, de couleur légèrement brunâtre, que je ne suis pas parvenu à solidifier, même à la suite d'un refroidissement énergique.

Dans le produit d'addition de Br_2 à l'éther chlorhydrique de l'allyl-carbinol biméthylé, j'ai trouvé 72 °/₀ de chlore et brome tout ensemble, alors que la formule

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > \underset{\underset{Br}{|}}{C} - CHBr - CH_2 - CH_2Cl$$

n'en demande que 70 °/₀.

Sa densité à 20° est égale à 1.71.

Le dérivé acétique

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > CBr - CHBr - CH_2 - CH_2(C_2H_3O_2)$$

a pour densité à 20° 1.551. On y a trouvé 54.70 °/₀ de brome, au lieu de 53 qu'il doit, théoriquement, renfermer.

En terminant, je tiens à exprimer tous mes remerciements à MM. les Profrs Paul et Louis Henry pour le bienveillant intérêt qu'ils m'ont témoigné au cours de mes recherches.

COMITÉ SECRET.

La Classe se constitue en comité secret pour prendre notification d'une candidature nouvelle présentée pour la seconde place d'associé vacante dans la Section des sciences naturelles.

OUVRAGES PRÉSENTÉS.

Henry (*Louis*). Observations de chimie classique. Les alcools tertiaires - $\overset{|}{\underset{|}{C}}$ - OH considérés comme un lien entre la chimie minérale et la chimie organique. Rome, 1908; extr. gr. in-8° (23 p.).

Recueil de l'Institut botanique (Université de Bruxelles), publié par L. Errera, t. III. 1908; in-8°.

Stroobant (*Paul*). Sur l'action de l'anneau de Saturne. Paris, 1908; extr. in-4° (3 p.).

Godeaux (*Lucien*). Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (5 p.).

Cogniaux (*Alfred*). Mélastomacées et Cucurbitacées nouvelles de la vallée de l'Amazone. Para, 1908; extr. in-8° (5 p.).

Duesberg (*J.*). La spermiogenèse chez le rat. Leipzig, 1908; extr. in-8° (12 pp. et pl.).

ANVERS. *Paedologisch Jaarboek*, 7de jaargang, 1e aflevering (M. C. Schutyen). 1908; in-8°.

—

Mayrhofer (*Dr B.*). Ueber die Aufgaben der zahnärztlichen Institute und die Notwendigkeit ihres Ausbaues zu Kliniken. Vienne et Leipzig, 1907; extr. in-8° (12 p.).

—

See (*T.-J -J.*). Further researches on the physics of the Earth, and especially on the folding of mountain ranges and the uplift of plateaus and continents, produced by movements of lava beneath the crust arising from the secular leakage of the Ocean bottoms. Philadelphie, 1908; extr. in-8° (276 p.).

Schaeberle (*J. M.*). On the origin and age of the sedimentary rocks. 1908; extr. in-4° (4 p.).

SAO PAULO. *Commissâo geographica e geologica*. Carta general do Estado de S. Paulo. Escala 1 : 1,000,000. 1898; in-plano.

—

Flora Batava (door Kops, Van Eeden en Vuyck), aflevering 249-256. Harlem, 1905-1907; in-4°.

—

Association internationale de sismologie. Coordonnées des stations sismiques du globe et tableaux auxiliaires pour les calculs sismiques (Sigismond Szirtes). 1908.

— Éléments sismiques de quelques tremblements de terre japonais, première partie (Szirtes). 1908.

— Les tremblements de terre du Kamtchatka en 1904 (Elimar Rosenthal). 1907.

— Quelques constantes sismiques trouvées par les macrosismes (Emilio Oddone). 1907.

Popoff (*D. K.*). Annexe à ma démonstration du théorème, dit « la Grande Proposition. » de Fermat, à savoir que $a^n + b^n = c^n$ est impossible en nombres entiers si $n > 2$. Sophia, 1908; in-8° (15 p.)

COPENHAGUE. *Zoological Museum*. The danish Ingolf-Expedition, vol. III, part. 2 : Crustacea Malacostraca (Hansen). 1908; in-4°.

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1908. — N° 12.

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 5 décembre 1908.

M. Julien Fraipont, directeur.

M. le chevalier Edm. Marchal, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. Éd. Van Beneden, C. Malaise, F. Plateau, Ch. Van Bambeke, Alfr. Gilkinet, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, M. Mourlon, P. Mansion, P. De Heen, F. Terby, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Jorissen, Ch. Francotte, Paul Pelseneer, A. Gravis, Aug. Lameere, G. Cesàro, Ch.-J. de la Vallée Poussin, *membres;* Th. Durand, Max. Lohest, A. Demoulin et V. Willem, *correspondants.*

MM. J. Deruyts, *vice-directeur;* Louis Henry, membre titulaire, et Alex. de Hemptinne, correspondant, ont motivé leur absence.

CORRESPONDANCE.

M. le Secrétaire perpétuel annonce la mort d'Albert Gaudry, associé de la Section des sciences naturelles, décédé à Paris le 27 novembre, à l'âge de 81 ans.

M. le Directeur prononce l'éloge du défunt dans les termes suivants :

« La mort fauche sans trêve parmi nos associés, surtout parmi nos associés français.

» A quelques mois de distance, nous avons perdu de Lapparent et Giard. Aujourd'hui, c'est Gaudry dont nous déplorons la mort.

» Albert Gaudry s'est éteint le 27 novembre dernier, à l'âge de 81 ans. Il était notre associé depuis 1889.

» Alors que les idées de Cuvier sur les cataclysmes et sur l'immutabilité des espèces régnaient encore partout en France, surtout au Jardin des Plantes de Paris et à l'Institut, Gaudry épousa et poursuivit les idées évolutionnistes de Lamarck, de Geoffroy Saint-Hilaire et de Darwin, qu'il appliqua d'une façon magistrale à l'étude des animaux fossiles.

» Rappelez-vous ses travaux sur les animaux fossiles de l'Attique, du Mont Léberon dans le Vaucluse, du Permien d'Autun, sur l'histoire des temps quaternaires, enfin ses enchaînements du monde animal. C'est surtout dans l'histoire des mammifères tertiaires que Gaudry s'est acquis une réputation mondiale.

» Ce ne fut pas seulement un savant illustre, mais aussi un écrivain et un professeur éminent. Il exposait avec une méthode parfaite, dans un langage impeccable, dans un style merveilleux, les questions les plus ardues de la paléontologie des vertébrés.

» Il occupa la chaire de paléontologie du Museum de Paris depuis 1872 jusqu'à 1903.

» Albert Gaudry était d'une bonté et d'une urbanité exquises qui charmaient tous ceux qui l'approchaient.

» La Classe des sciences de l'Académie de Belgique conservera un pieux souvenir du grand paléontologiste français qui, pendant vingt ans, fut son associé. »

— M. le Ministre des Sciences et des Arts soumet :

1° Trois requêtes tendant à l'occupation des tables d'étude à la Station zoologique de Naples; elles ont comme signataires : MM. P.-J. Havet, de Louvain; Dr Honoré Lams, de Gand; Dr Henri Micheels, de Liége;

2° Un rapport du docteur Lebrun sur les résultats obtenus à la suite de ses études au même Institut zoologique. — Renvoi à l'examen d'une commission composée de MM. Van Bambeke, Plateau et Gravis.

— La Classe accepte le dépôt dans ses archives de trois plis cachetés :

1° De M. Ch. Lagrange, daté du 14 novembre 1908;

2° De M. J. Beaupain, ingénieur, daté du 3 décembre;

3° De M. Th. De Donder, daté du 4 décembre : *Généralisation du théorème de Poisson.*

— La *Geological Society of Glasgow* annonce qu'elle tiendra, le 28 janvier 1909, une séance à l'Université pour célébrer son jubilé. Cette Institution invite l'Académie de Belgique à se faire représenter à cette solennité. — Une adresse de félicitations lui sera envoyée.

— Hommages d'ouvrages :

1° Par M. le Ministre de l'Intérieur et de l'Agriculture : *Le Mouvement scientifique en Belgique*, 1830-1905. Ouvrage publié à l'occasion des fêtes jubilaires de 1905; 2 volumes;

2° Par M. le Ministre des Travaux publics : *Port d'Ostende. Diagrammes des variations de niveau de la mer en 1907;*

3° Par M. le Ministre de la Guerre : *Carte de la Belgique au 100 000e, tableau d'assemblage et feuilles XIII à XXVI*, 1908;

4° Par sir George Darwin, de Cambridge, associé : *Scientific Papers*, volume II;

5° Par Ern. Pasquier : *Sur certains travaux de l'École d'Oppolzer relatifs aux éclipses et à la chronologie;*

6° Par Paul Stroobant : *Les progrès récents de l'astronomie. Année 1907.*

— Remerciements.

CONCOURS DE 1908.

Mémoires envoyés en réponse à la troisième question des sciences naturelles : *On demande des recherches originales concernant la sexualité chez les Sporozoaires.*

Rapport de M. Plateau, premier commissaire.

« Deux travaux nous sont soumis.

Le mémoire n° 1, accompagné de deux planches, porte le titre de : *Contribution à l'étude de la sexualité chez les Myxosporidies et chez les Microsporidies* et a pour épigraphe : « Les hypothèses sont le fonds qui manque le moins; la certitude nous échappe toujours au moment où nous croyons la saisir. »

L'auteur donne d'abord les raisons qui lui ont dicté le choix des formes sur lesquelles ont porté ses recherches. La question de la sexualité lui semble résolue pour l'ordre des Télosporidies (Grégarines proprement dites et Coccidies), tandis que des désaccords manifestes entre les observateurs existent encore quant à l'existence ou à l'absence d'autogamie chez les Néosporidies (Myxosporidies, Microsporidies, etc.).

Il a donc étudié personnellement le développement des spores chez deux Néosporidies, le *Myxobolus Pfeifferi*, parasite des muscles du Barbeau, et la *Thelohania Giardi*, parasite du *Crangon vulgaris*.

On comprend qu'il serait impossible et du reste inutile dans un simple rapport d'analyser pas à pas des

recherches minutieuses et la description de multiples petits détails; aussi me bornerai-je à quelques appréciations d'ensemble.

Ce qui m'a semblé le plus important dans l'étude de l'évolution du *Myxobolus Pfeifferi*, c'est la démonstration bien nette de l'existence de macrogamètes et de microgamètes se distinguant par leurs tailles et par les volumes de leurs noyaux, différenciation suivie d'une véritable conjugaison anisogamique conduisant à la formation du pansporoblaste.

L'auteur a suivi l'évolution des pansporoblastes, la formation des spores et nous donne une description complète du cycle évolutif du *Myxobolus*.

Chez *Thelohania Giardi*, il confirme un fait signalé par Stempell chez une espèce voisine, *Th. Mulleri*, parasite du *Gammarus pulex*, l'existence de deux cycles bien marqués, l'un correspondant à la schizogonie, l'autre à la sporogonie, mais il arrive, en outre, à ce résultat bien personnel et intéressant que le terme ultime de la division schizogonique donne lieu à des gamètes différant des schizontes par la taille et la nature du noyau, que ces gamètes sont tous identiques (isogamètes) et se conjuguent deux à deux pour la formation d'un sporonte évoluant ensuite en pansporoblaste.

Comme pour l'autre type, l'auteur a suivi en détail le développement des spores; il a pu ainsi retrouver tous les stades précédemment décrits par Léger et Hesse, et ajouter quelques interprétations nouvelles. Cette étude de *Thelohania Giardi* se termine, ainsi que la précédente, par un exposé de l'ensemble du cycle évolutif du parasite.

Les deux monographies qui constituent le mémoire n° 1 sont donc bien choisies, l'une nous faisant assister à une évolution caractérisée par une anisogamie évidente, l'autre nous montrant une évolution marquée à sa base par une véritable isogamie.

L'auteur est bien au courant de la bibliographie, et les deux planches qui accompagnent son travail sont dessinées avec soin.

*
* *

Le mémoire n° 2 est intitulé : *Études sur la sexualité chez les Grégarines*, avec, pour épigraphe, cette phrase de Minchin : « Correlated with their wide distribution, the Sporozoa exhibit the utmost diversity of structural and developmental characters. » Il est beaucoup plus volumineux que le mémoire n° 1 et comprend plus de 100 pages, 5 planches et 33 figures dans le texte.

L'auteur limite son travail à l'étude de la sexualité chez les Grégarines proprement dites et même les Grégarines polycystidées.

Dans un premier chapitre, il montre, par un historique bien fait, que l'histoire de la sexualité chez ces animaux présente encore beaucoup de contradictions et de lacunes.

Le deuxième chapitre traite de l'évolution sexuée de *Pterocephalus nobilis*, parasite de l'intestin de *Scolopendra cingulata*, forme très intéressante parce que l'on sait, depuis les travaux de Léger et de Duboscq, que, dans ce type, l'anisogamie est poussée si loin que les Grégarines peuvent être distinguées en mâle et en femelle pendant

toute la durée de l'enkystement, les deux sexes ayant des cytoplasmes différents.

Parmi les phénomènes observés dans les premiers stades, il en est un fort important, la formation d'un petit noyau, *micronucleus*, ou noyau sexuel, aux dépens du gros noyau primaire ou somatique, de chacun des individus logés dans un kyste commun. Le noyau primaire se désagrège et le *micronucleus* donne lieu à la première mitose. Les mitoses successives, en partant de ce *micronucleus*, conduisent ensuite à la formation des gamètes.

Les faits que l'auteur décrit à cet égard concordent, dans les grandes lignes, avec les observations de Cuénot, Prowazek et Schellack, mais ils précisent certains points de cette curieuse évolution incomplètement élucidée jusqu'ici.

L'auteur étudie en détail ces mitoses caractérisées par l'existence d'un chromosome impair déjà vu par d'autres et dont il cherche à donner l'explication.

Tous les noyaux résultant des mitoses se portent à la périphérie, puis les formes des deux Grégarines enkystées se modifient, la femelle augmente de volume et refoule le corps du mâle qui la recouvre comme une épaisse calotte.

Ensuite, tandis que les noyaux restent reportés à la surface de la Grégarine mâle, les noyaux de la Grégarine femelle quittent la surface de celle-ci, affectent un mouvement centripète et se dirigent vers quatre ou cinq ilots de cytoplasme germinatif pour se distribuer ultérieurement en rangées irrégulièrement doubles en constituant ainsi une sorte de réseau.

Les noyaux mâles se transforment et deviennent non

seulement la partie essentielle, mais la presque totalité des gamètes mâles, ou spermatozoïdes, allongés, munis d'un rostre perforateur et d'un flagelle. Les noyaux de la femelle donnent lieu aux gamètes femelles, ou œufs, d'abord ovoïdes, puis cylindriques après la fécondation. Il n'y a pas de polyspermie, un seul spermatozoïde pénétrant dans chacun des gamètes femelles.

L'évolution des œufs en sporocystes et la production des sporozoïtes ont lieu comme chez les autres Grégarines.

Le troisième chapitre du mémoire est consacré à l'évolution sexuée chez les Actinocéphalides.

On ne savait rien, jusqu'à présent, sur les phénomènes de la sexualité chez ces Télosporidies, principalement parasites des insectes carnassiers, et l'auteur, par l'étude des éléments sexuels et de la sporogonie dans les principaux types du groupe, comble une véritable lacune.

Étant arrivé à ce résultat que, quelles que soient les différences de forme entre les sporocystes et entre leurs épimérites, les éléments sexuels et la copulation sont à peu près identiques chez les différentes espèces, que chez toutes existe une anisogamie prononcée, etc., il n'étudie avec soin qu'une des formes les plus caractéristiques, l'*Hoplorhynchus oligacanthus*, parasite des larves d'Agrionides, et résume les phénomènes pour les autres.

Sous peine de donner à ce rapport une longueur exagérée, je ne puis suivre l'auteur dans ses descriptions. Je ferai seulement remarquer qu'ici encore il montre que les caractères des cytoplasmes des deux Grégarines accouplées, la manière dont s'y passe la lobulation somatique, permettent de distinguer dans le kyste le mâle de la femelle.

Les diverses phases sexuées rappellent beaucoup ce que Léger a décrit chez *Stylorhynchus*.

Avec le chapitre IV nous abordons l'évolution chez les Clepsidrinides.

Par son historique, l'auteur montre que de nombreuses contradictions existent sur des points capitaux de l'évolution de ces Sporozoaires. Ainsi, tandis que Berndt croit voir les noyaux sexuels dériver d'une mitose multiple, Paehler suppose un premier fuseau; tandis que Léger signale l'anisogamie avec gamètes mobiles, tous les autres observateurs décrivent l'isogamie à gamètes immobiles; certains d'entre eux affirment que les divisions nucléaires qui président à la formation des sporozoïtes sont des amitoses, alors que Schnitzler les décrit comme mitoses typiques.

L'examen qu'a fait l'auteur de l'évolution sexuée de *Clepsidrina Munieri*, parasite de Coléoptères (*Timarcha tenebricosa* et *Chrysomela lucida*), l'a conduit à ces résultats que, chez les Clepsidrines, l'anisogamie est certaine, mais avec des différences sexuelles peu prononcées, qu'il existe un stade de gamètes mobiles, qu'il y a expulsion de deux corps chromatiques dans le phénomène de la réduction et que les divisions qui forment les sporozoïtes sont des mitoses.

Le cinquième chapitre renferme des observations intéressantes, que l'auteur déclare cependant insuffisantes, sur la sporogonie d'un certain nombre de Grégarines, parasites de Crustacés, *Aggregata*, *Porospora*, *Frenzelina* et, enfin, l'étude d'une microsporidie *Nosema Frenzelinae*, parasite des *Frenzelina*, et qui présente cette double particularité d'être la première microsporidie signalée avec certitude chez un Protozoaire et d'exercer une action pathogène sur la reproduction de son hôte.

Le chapitre VI et dernier se compose des conclusions que l'auteur croit pouvoir déduire de ses recherches.

Ce volumineux et fort intéressant mémoire est bien rédigé, parfaitement au courant de la bibliographie, et les figures dans le texte ainsi que les planches sont d'un dessin très fini.

*
* *

En somme, comme on a pu le voir par ces analyses nécessairement incomplètes, nous nous trouvons devant deux bons travaux écrits par des naturalistes ayant spécialisé l'étude des Sporozoaires, travaux qui tous deux font faire des progrès incontestables à nos connaissances sur la sexualité de ces organismes.

Si on laisse de côté la différence d'étendue entre les deux mémoires, différence qui ne modifie en rien leurs valeurs respectives, on constate qu'il est impossible d'établir entre eux une comparaison. En effet, leurs auteurs ont choisi chacun comme sujet d'étude l'un des deux grands groupes principaux admis aujourd'hui chez les Sporozoaires. L'auteur du mémoire n° 1 s'occupe exclusivement des phénomènes de sexualité chez les Néosporidies et celui du mémoire n° 2 nous décrit les faits chez les Télosporidies. C'est à peu près comme si la question posée concernait la sexualité chez les Vertébrés et que l'un des auteurs traitât des Poissons et l'autre des Mammifères.

Dans ces conditions, les deux mémoires ayant une réelle valeur, répondant largement à la question et méritant d'être publiés, je propose à la Classe des sciences de les couronner tous deux et de partager le prix. »

—

Rapport de M. Ch. Francotte, deuxième commissaire.

« Je me rallie volontiers aux conclusions de notre excellent et savant confrère M. Plateau, qui a donné une très judicieuse appréciation des deux mémoires soumis aujourd'hui au jugement de l'Académie. J'estime qu'il est inutile que l'analyse que j'ai faite des mêmes travaux soit publiée : un second rapport circonstancié ferait double emploi et encombrerait sans raison nos *Bulletins*. »

—

Rapport de M. Victor Willem, troisième commissaire.

« Je considère comme digne d'une distinction le mémoire sur la sexualité chez les Myxosporidies et chez les Microsporidies soumis à notre appréciation.

Interprétant dans un ordre rationnel les images que fournissent les coupes des tumeurs produites chez le Barbeau par *Myxobolus Pfeifferi* et celles des muscles de Crevettes infestées par *Thelohania Giardi*, il établit l'anisogamie de la Myxosporidie et l'isogamie de la Microsporidie observées; il refait l'histoire des sporogonies et ajoute quelques traits au cycle évolutif des deux parasites.

Mais le second mémoire présenté, traitant de la sexualité chez les Grégarines, est, à mon avis, supérieur au premier par l'effort qu'il a exigé et par les résultats qu'il énonce. Plus grands sont le nombre et la variété des formes étudiées, généralement observées au préalable à l'état vivant; plus nombreux et même plus beaux sont les dessins, de petits chefs-d'œuvre en leur

genre; plus étendues enfin sont les conclusions, qui comportent l'exposé de l'évolution de la sexualité dans un groupe où les processus sexuels se présentent avec des modalités très variées.

La lecture de ce second mémoire donne l'impression très nette qu'il émane d'un naturaliste de premier ordre, éthologiste et cytologiste à la fois, qui domine le domaine zoologique où est localisé le sujet traité.

En conséquence, je souscris au partage du prix proposé par les deux premiers commissaires, en exprimant toutefois le désir que ce partage respecte les mérites relatifs des deux mémoires concurrents. »

La Classe a décerné, en partage, sa médaille d'or, d'une valeur de *mille francs*, à l'auteur du premier mémoire, M. Louis Mercier, à Nancy, et aux auteurs du second mémoire, MM. Louis Léger, à Grenoble, et Octave Duboscq, à Montpellier.

PRIX MAILLY

pour favoriser les progrès de l'astronomie en Belgique.

(IVe période, 1904-1907.)

Rapport de M. le Paige.

« Le travail de M Boutquin n'a été présenté qu'en partie dans les délais fixés par la fondation Mailly. Dans ces conditions, j'estime que ce serait poser un précédent dangereux que de prendre une décision quelconque au sujet de ce travail.

Je dois en outre faire toutes mes réserves au sujet de sa publication. Je ne sais si l'on peut réellement considérer cette œuvre, dans sa forme actuelle, comme publiée. »

M. Ch. Lagrange, conformément à un avis déjà exprimé par lui (lettre à M. le Secrétaire perpétuel datée du 6 mai 1908), se déclare d'accord avec M. le Paige ci-dessus.

La Classe, se ralliant aux conclusions de ses commissaires, estime que le seul mémoire soumis à son jugement ne satisfait pas aux conditions réglementaires et qu'il n'y a pas lieu de décerner le prix de la IVe période.

RAPPORTS.

Sur les images multiples formées par les lentilles; par J.-E. Verschaffelt.

Rapport de M. De Heen.

« M. Verschaffelt présente une note intéressante sur les règles générales relatives à la formation des images dans les lentilles.

J'ai l'honneur de proposer à l'Académie l'insertion de cette note dans les *Bulletins* de la séance. » — Adopté.

Étude de quelques composés de l'uranium;
par W. Oechsner de Coninck.

Rapport de M. W. Spring.

« L'auteur a étudié l'action du peroxyde d'hydrogène sur l'oxyde uraneux, la décomposition des sulfates uraneux et uranique ainsi que de l'acétate du même élément par la chaleur et, enfin, la réaction du sulfate uranique avec le phosphate et le carbonate de calcium.

Les résultats de ces recherches ne peuvent pas être condensés en moins de mots que l'auteur n'en a employés pour les faire connaître. Pour éviter un double emploi, je dois donc me borner à proposer l'insertion de la note de M. Oechsner dans le *Bulletin* de la séance. » — Adopté.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Sur divers alcools heptyliques C_7H_{15} - OH; par Louis Henry, membre de l'Académie.

§ 1. — *Sur le méthyl-pentyl-carbinol normal*

$$H_3C - \underset{\underset{OH}{|}}{CH} - (CH_2)_4 - CH_3.$$

Les alcools secondaires normaux de la formule générale $CH_3 - CH(OH) - (CH_2)_n - CH_3$ ont des points d'ébullition qui diffèrent peu ou qui sont sensiblement les mêmes que ceux des alcools primaires normaux corres-

pondants à l'étage supérieur. Cette relation de volatilité pourrait être précisée davantage. Je tâcherai de le faire à un autre moment.

Or, l'alcool secondaire de cette nature, en C_7, est renseigné dans le grand Traité de Beilstein comme bouillant à 164° - 165°, alors que l'alcool primaire et normal en C_6 bout à 156° - 157°.

De plus, les alcools homologues, de quelque nature qu'ils soient, dans cette région de l'échelle de carburation, diffèrent d'environ 18° à 20° dans leur point d'ébullition.

Primaires.

$CH_3 - (CH_2)_2 - CH_2(OH)$	Éb. 116°
$- (CH_2)_3 -$	— 156°
$- (CH_2)_4 -$	— 156°
$- (CH_2)_5 -$	— 175°.

Secondaires.

$CH_3 - (CH_2)_1 - CH(OH) - CH_3$	Éb. 99°
$- (CH_2)_2 -$	— 118°
$- (CH_2)_3 -$	— 136°
$- (CH_2)_4 -$	— 164°-165°.

Tertiaires.

$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C(OH) - CH_3$	Éb. 82°
$- CH_2 - CH_3$	— 102°
$- (CH_2)_2 - CH_3$	— 122°
$- (CH_2)_3 - CH_3$	— 142°.

J'avais donc beaucoup de raison pour regarder le point d'ébullition attribué au méthyl-pentyl-carbinol $CH_3 - CH(OH) - C_5H_{11}$ normal comme trop élevé.

L'existence d'erreurs de cette nature est fâcheuse; elles sont malheureusement trop abondantes dans le domaine de la *volatilité;* en jetant le trouble dans les relations les mieux établies, elles tendent à faire croire que cette constante du point d'ébullition apparaît au hasard. C'est faire chose utile, par conséquent, de déterminer avec certitude et précision les points d'ébullition des corps.

Aujourd'hui que l'on est en possession de méthodes sûres, propres à former, par *voie synthétique*, les alcools, il est possible de corriger un bon nombre de chiffres attribués aux alcools et à leurs dérivés, comme indiquant leur *volatilité.*

Je viens faire connaître dans cette note le chiffre qui indique celui de la volatilité du *méthyl-pentyl-carbinol normal* $CH_3 - CH(OH) - C_5H_{11}$. Il y a plus de trois ans qu'il repose enseveli dans mon carnet de laboratoire. Je juge inutile de l'y conserver plus longtemps, n'étant pas à même de compléter le travail que je me proposais de faire sur d'autres composés en C_7.

C'est à mon assistant, M. Auguste De Wael, que j'avais confié le soin d'appeler à l'existence le véritable alcool en question.

Le *méthyl-pentyl-carbinol normal* $CH_3 - CH(OH) - (CH_2)_4 - CH_3$ peut s'obtenir sûrement par deux voies :

a) L'hydrogénation de la cétone correspondante $CH_3-CO - (CH_2)_4 - CH_3$;

b) Une voie, sinon plus sûre, du moins plus aisée à

mettre en pratique avec un résultat d'une exactitude certaine, la *méthode synthétique* des composés halomagnésiens de Grignard, réaction de ceux-ci sur l'*aldéhyde* en $C_2CH_3 - CH = O$.

C'est celle-ci qui a été utilisée. On a mis en réaction dans ce but environ 75 grammes de *bromure d'amyle normal et primaire* $CH_3 - (CH_2)_3 - CH_2Br$, ce qui représente $^1/_2$ molécule-gramme, avec un léger excès d'aldéhyde, fraîchement dépolymérisée, dissoute dans l'éther.

La température de réaction du magnésium sur le bromure d'amyle, dissous dans l'éther, paraît celle de l'éther lui-même. Dans la solution magnésienne, on introduit ensuite, par petites portions, l'aldéhyde dissoute elle-même dans l'éther. La réaction se fait vivement et il faut agiter continuellement la masse.

L'opération s'achève comme à l'ordinaire. On dissout dans l'acide sulfurique dilué le précipité magnésien déterminé par l'action de l'eau.

La solution éthérée, desséchée à l'aide du carbonate de potassium fondu, a fourni, à une première rectification, environ 40 grammes de produit passant entre 150° et 160°. A une seconde rectification, on obtient un produit pur passant à 156°-157° sous la pression de 762 millimètres.

Le rendement de l'opération est de 75 °/o.

Le méthyl-isopentyl-carbinol normal est analogue à ses congénères. C'est un liquide quelque peu épais, fort odorant et insoluble dans l'eau, bouillant à 156°-157°, sous la pression de 762 millimètres.

Sa densité à 20° est 0.8193. Son indice de réfraction étant 1.42131, son pouvoir réfringent moléculaire correspond à 35.89. Le calcul conduit à 35.84.

L'heptane normal a fait l'objet des recherches de divers chimistes, qui ont abouti à faire des alcools monohydroxylés.

Les dernières sont dues à M. Thomas M. Morgan (*).

La chloruration de l'heptane, éb. 96°-99°, fournit un mélange de chlorures C_7H_{15}. Cl bouillant de 144° à 156°, qui, par la potasse alcoolique, se transforme en un heptylène C_7H_{14} bouillant à 96°-99°.

La portion de cet heptylène qui ne se combine pas à froid avec l'acide chlorhydrique, chauffée avec HI concentré, fournit un iodure qui, avec l'acétate de plomb dans l'acide acétique, se transforme en un acétate C_7H_{15} $(C_2H_3O_2)$ bouillant à 170°-175°, dont on extrait un alcool C_7H_{15} - OH qui bout lui-même à 155°-158° et qui doit être le même que celui que je viens de décrire.

Quelques dérivés de cet alcool ont été faits.

Iodure CH_3 - CHI - $(CH_2)_4$ - CH_3. Action du phosphore et de l'iode. On chauffe au bain d'eau jusqu'à disparition totale de l'iode. Le liquide se sépare en deux couches. On ajoute de l'eau et on extrait le produit formé par l'éther.

L'éther iodhydrique formé passe, après expulsion de l'éther ordinaire, à 100° sous une pression de 45 à 50 millimètres.

C'est un liquide aisément altérable à la lumière, ayant pour densité, à 20°, 1.304.

Son indice de réfraction est 1.48262. D'où l'on déduit

(*) *Liebig's Annalen*, t. CLXXVII, p. 304, année 1875.

comme pouvoir réfringent moléculaire 49.44. La théorie demande 47.37.

Mercaptan isoheptylique $CH_3 - \underset{\underset{SH}{|}}{CH} - (CH_4)_4 - CH_3$. Il résulte de la réaction de l'iodure sur la solution du sulfhydrate potassique dissous dans l'alcool. $^1/_{10}$ de molécule-gramme a été consacré à faire ce corps. On a chauffé pendant un quart d'heure; le produit formé vient surnager.

Desséché par du chlorure de calcium, il distille du premier coup entre 16° et 17°.

Le mercaptan isoheptylique ainsi formé constitue un liquide analogue à tous les composés de ce groupe, insoluble dans l'eau.

Sa densité à 20° est égale à 0.8353.

Il bout fixe à 164°-165° sous la pression de 765 millimètres.

Son indice de réfraction est 1.44596; d'où l'on déduit, pour son pouvoir réfringent moléculaire, 42.04; théoriquement, c'est 42.02.

§ 2. — *Sur le diméthyl-butyl-carbinol normal*

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > \underset{\underset{OH}{|}}{C} - (CH_2)_2 - CH_3.$$

Il résulte de la réaction du bromure de méthyl-magnésium $CH_3 - Mg - Br$, selon la méthode de Grignard, sur le butyrate d'éthyle normal. Un quart de molécule a été consacré à cet objet.

On a opéré suivant la méthode connue. Le rendement est avantageux et le produit aisé à obtenir à l'état de pureté.

Cet alcool est un liquide incolore, fortement odorant, insoluble et surnageant à l'eau.

Il bout, sous la pression de 755 millimètres, à 141°-142°.

Sa densité, à l'état liquide, est égale à 0.8155.

Son indice de réfraction étant 1.41592, on en déduit comme pouvoir réfringent moléculaire 35.61; le chiffre calculé est 35.84.

Cet alcool se transforme rapidement en son chlorure $\left.\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\right\rangle C - Cl - (CH_2)_3 - CH_3$ par l'acide chlorhydrique concentré.

C'est un liquide bouillant vers 135°, mais en se décomposant légèrement.

Le chlorure d'acétyle fournit le même produit.

—

L'état de la végétation à la Baraque Michel et à Liége en 1908; par Léon Fredericq, membre de l'Académie.

A différentes reprises, plusieurs de nos collègues, notamment feu Dewalque, de Selys Longchamps, Folie, nous ont entretenus de l'état d'avancement de la végétation, à une date déterminée, à Liége, à Waremme, à Spa, pour le comparer à ce qu'il était à la même date aux années précédentes. Dans la présente note, je poursuis un but un peu différent. J'ai cherché à déterminer la valeur du retard que subissent, en raison

de la différence d'altitude, les phénomènes périodiques de la végétation d'un certain nombre de plantes au plateau de la Baraque Michel (500 à 700 m.), si on les compare au degré d'avancement des mêmes plantes observées aux environs de Liége ou en Campine.

J'ai constaté que ce retard, qui est de près de quatre semaines au printemps, s'atténue progressivement à mesure que la saison s'avance, de telle sorte que, vers la fin de septembre, certaines plantes sont dans le même état d'avancement à Liége et à la Baraque Michel.

Le déclin de la végétation, qui se termine par la chute des feuilles au début de novembre, est d'ailleurs plus précoce à la Baraque Michel que dans la plaine belge, en raison de l'abaissement plus prononcé de la température automnale à l'altitude de 700 mètres.

Un résultat assez inattendu de mes constatations, c'est que la valeur du retard subi par le développement des différentes espèces observées est très inégal. Ainsi, l'ordre de succession de la feuillaison des différentes essences n'est pas le même sur la fagne de la Baraque Michel et à Liége. Dans les bois des environs de Liége, c'est le bouleau qui le premier se couvre de jeunes feuilles. Les bouleaux, vers la mi-avril, y font des taches d'un vert tendre qui tranche agréablement sur le ton roux des hêtres et des chênes dont les bourgeons s'épanouissent quelques jours plus tard. Au plateau de la Baraque Michel, au contraire, la feuillaison du hêtre précède celle du bouleau.

A la fin de juillet, les premières *Gentiana pneumonanthe* ouvrent leurs corolles bleues à la même date ou même à une date un peu plus précoce à la Baraque

Michel qu'en Campine (Lanaeken, Genck), alors que d'autres plantes, notamment les sorbiers (fructification), sont encore manifestement en retard sur la fagne.

En résumé, la durée de la saison pendant laquelle se manifeste l'activité de la végétation est plus courte d'environ un mois à la Baraque Michel qu'à Liége. Les feuilles se montrent plus tard sur la fagne, mais elles y tombent plus tôt. Le cycle végétal y parcourt ses phases en un temps plus court que dans la plaine.

Le tableau suivant contient les observations faites en 1908, tant à Liége ou dans la plaine belge (deuxième colonne) qu'au plateau de la Baraque Michel (quatrième colonne). La cinquième colonne indique la valeur du retard. Aux observations sur les dates de feuillaison, de floraison, etc., j'ai joint celles qui se rapportent à la ponte de la grenouille brune.

Phénomènes périodiques observés en 1908.

Dates.	*A.* — Environs de Liége.	Dates	*B.* — Plateau de la Baraque Michel.	Retard de *B* sur *A*.
	Ponte de la grenouille brune (Rana temporaria).			
9 mars.	*Tilff* (80 m.). OEufs et grenouilles. Ponte.	27 mars.	*Maison Drossart* (500 m.). Grenouilles sans œufs. Ponte non commencée.	
13 mars.	*Tilff, Ninane, Beaufays.* OEufs sans grenouilles. Ponte terminée.	1er avril.	*Francorchamps* (460 m.) et *Malchamps* (575 m.). OEufs et grenouilles.	
	Cette année, la ponte des grenouilles a été précoce aux environs de Liége. Dans mes notes je trouve la ponte des grenouilles signalée à Tilff (fossé de la propriété de Sauvage) les 2 (1897), 7 (1906), 12 (1899), 14 (1904), 17 (1907), 18 (1898, 1903), 19 (1900, 1905), 20 (1902) et 21 (1892, 1896) mars.	3 avril.	*Hockai* (550 m.). Grenouilles sans œufs. *Maison Drossart* (500 m.). Grenouilles et œufs. *Mont.* Pas de grenouilles.	
		9 et 10 avril.	*Mont* (550 m.). Grenouilles sans œufs.	Un mois.
		15 avril.	*Hockai* (550 m.). Grenouilles et œufs.	
	Floraison de Narcissus pseudo-narcissus.			
28 mars.	*Gingelom* (*Hesbaye*). Les premiers narcisses en fleur.	15 avril.	*Vallée de la Roer* (500 à 600 m.). Pas de narcisses en fleur.	
4 avril.	*Gingelom.* Narcisses en fleur.	4 mai.	*Baraque Michel* (650 m.). Narcisses en fleur et en bouton.	Un mois.
8 avril.	*Bierwart* près Burdinne. Narcisses en fleur.			

2 mai.	*Gingelom*. Narcisses défleuris.		(650 m.). Narcisses en fleur mais beaucoup défleuris.	
5 mai.	*Gingelom*. Narcisses défleuris et flétris.	25 mai.	*Baraque Michel* (674 m.). Encore quelques narcisses en fleur.	

Feuillaison de Betula alba (*Bouleau*).

17 avril.	Environs de *Liége*, *Cointe* et *Kinkempois*. Bouleaux se couvrent de très petites feuilles dans la partie du bois au pied des collines.	4 mai.	*Baraque Michel* (600 m.). Bourgeons bruns.	Un mois.
28 avril.	Bouleaux verdoyants.	15-17 mai.	*Baraque Michel* Quelques bouleaux ont de petites feuilles comme à Liége le 17 avril. D'autres bouleaux n'ont que des bourgeons non ouverts.	
30 avril.	Bouleaux verts.	25 mai.	*Baraque Michel* (670 m.). Bouleaux verdoient. Quelques-uns ont des feuilles de 3 centimètres.	

Feuillaison de Fagus sylvatica (*Hêtre*).

17 avril.	*Liége*. Hêtres en bourgeons.	15 mai.	*Hockai* (550 m.). Haies de hêtre commencent à verdoyer.	Quinze à vingt jours.
28 avril.	*Liége*. La plupart des hêtres n'ont pas encore ouvert leurs bourgeons. Quelques-uns commencent à verdoyer.		*Baraque Michel* (670 m.). Par-ci par-là un hêtre commençant à verdoyer, comme le 28 avril à Liége.	
30 avril.	*Liége*. Par-ci par-là un peu de verdure.	17 mai.	Hêtres les uns verts, les autres verdoyants.	
11 mai.	*Liége*. Hêtres couverts de feuilles vertes.			

Phénomènes périodiques observés en 1908 (*suite*).

Dates.	*A.* — Environs de Liége.	Dates.	*B.* — Plateau de la Baraque Michel.	Retard de *B* sur *A*.
	Feuillaison et floraison de Sorbus aucuparia (*Sorbier*).			
22 avril.	*Liége* (*Parc d'Avroy et Jardin botanique*). Bourgeons s'entr'ouvrent. Petites feuilles et grappes de boutons.	4 mai.	*Hockat* (550 m.). Bourgeons vont s'ouvrir.	
24 avril.	*Liége* (*Parc d'Avroy*). Feuilles montrant les folioles.	15 mai.	*Baraque Michel* (670 m.). Bourgeons à peine comme à Liége le 22 avril.	
2 mai.	*Liége* Feuilles de 10 centimètres de long et grappes de boutons.	17 mai.	*Baraque Michel* (670 m.). Bourgeons s'ouvrent.	
5 mai.	*Liége*. Feuilles très développées. Les fleurs vont s'ouvrir.	25 mai.	*Baraque Michel*. Petites feuilles et quelques petits boutons.	Un mois.
9 mai.	Id.	4 juin.	Boutons floraux blancs. Floraison vers le 15 juin (?).	
11 mai.	*Liége*. Premières fleurs de sorbier.	24 juin.	*Baraque Michel*. Sorbiers non entièrement défleuris.	
13 mai.	Id.			
15 mai.	*Liége*. Sorbiers en pleine floraison.			
16 mai.	*Kinkempois*. Sorbiers commencement			

Feuillaison et floraison de Crataegus oxyacantha (*Aubépine*).

22 avril.	*Liége.* Petites feuilles de quelques millimètres.	15 mai.	*Mont-Rigi* (674 m.). A peine petits bourgeons verts, moins avancés qu'à Liége le 22 avril.	
9 mai.	*Liége.* Feuilles très développées.	25 mai.	*Mont-Rigi* (674 m.). Aubépine en feuilles.	Trois semaines au moins.
11 mai.	*Kinkempois* (80 m.). Aubépine en bouton.	4 juin.	*Mont-Riat* (674 m.). Aubépine en boutons peu avancés.	
16 mai.	*Kinkempois* (80 m.). Premières fleurs de l'aubépine.			
21 mai.	*Kinkempois.* Aubépine en fleur.			

Floraison de Convallaria maialis (*Muguet*).

10 mai.	*Liége.* Muguets fleurissent dans les jardins.	17 mai.	(570 m.) Muguets pas encore de feuilles.	
18 mai.	*Bois du Sart Tilman* (250 m.). Muguets commencent à fleurir.	4 juin.	(570 m.). Muguets commencent à fleurir.	Quinze jours au moins.

Floraison de Pyrethrum leucanthemum (*Grande-Marguerite*).

18 mai.	*Tilff.* Floraison commence.	24 juin.	*Mont-Rigi.* Floraison.	Un mois?
20 mai	*Tilff.* Floraison.			

Phénomènes périodiques observés en 1908 (*suite*).

Dates.	*A.* — Environs de Liége.	Dates.	*B.* — Plateau de la Baraque Michel.	Retard de *B* sur *A*.
	***Feuillaison, floraison et maturation de* Vaccinium Myrtillus (*Myrtille*).**			
28 avril.	*Kinkempois.* Myrtilles en bouton, quelques-unes en fleur.	15 mai.	*Baraque Michel.* Fleurs et boutons au moins aussi avancés qu'à Liége le 28 avril	Au moins quinze jours.
11 mai.	*Kinkempois.* Myrtilles en pleine floson, en partie défleuries.	2 et 5 juillet	Quelques baies mûres.	
24 juin.	*Tilff.* Quelques myrtilles mûres.			
26 juin.	*Liége.* Commencement de la vente des myrtilles.			
26 juin.	*Kinkempois.* Myrtilles mûres.			
	***Floraison de* Cardamine pratensis (*Cardamine*).**			
28 avril.	*Route de Tilff.* Cardamines en pleine floraison.	25 mai.	*Mont-Rigi* (674 m.). Cardamines commencent à fleurir.	Un mois.
	***Feuillaison de* Quercus (*Chêne*).**			
10 mai.	*Kinkempois.* Petites feuilles.	25 mai.	*Duso Moupa* (560 m.). Très petites feuilles.	Trois semaines.
11 mai.	[illegible]			

Floraison de Spartium scoparium (*Genêt*).

10 mai.	*Tilff*. Un genêt en fleur.	25 mai.	Pas de fleurs.	Au moins trois semaines.
11 mai.	*Cointe*. Genêts commencent à fleurir.	5 juillet.	*Longloup* (600 m.). Quelques genêts en fleur.	
		18 juillet.	*Longloup*. (600 m.) Genêts en fleur.	

Floraison de Gentiana pneumonanthe (*Gentiane*).

12 juillet.	*Lanaeken* (*Campine*). Pas de gentianes.	14 juillet.	*Longloup* (600 m.). Gentianes en bouton.	
21 juillet.	*Lanaeken*. Pas de gentianes.	18 juillet	*Longloup* (600 m.). Deux gentianes en fleur.	
23 juillet.	*Genck* (*Campine*). Premières gentianes trouvées par M. Gengou.	2 août.	*Baraque Michel* (670 m.). Beaucoup de gentianes	Pas de retard.
30 juill .	*Genck* Gentianes envoyées par M. Gengou.	10 août.	Gentianes en fleur.	
5 août.	*Lanaeken*. Quelques gentianes en fleur.	29 août.	*Alt-Hattlich* (600 m.). Gentianes en fleur.	
8 septembre.	*Lanaeken*. Gentianes moins défleuries qu'à la Baraque Michel.	6 septembre	*Longloup* (600 m.). Gentianes commencent à défleurir.	
13 septembre.	*Lanaeken*. Gentianes peu défleuries.	14 septembre.	Gentianes plus avancées qu'en Campine.	Légère avance.

Phénomènes périodiques observés en 1908 (*suite*).

Dates.	*A.* — Environs de Liége.	Dates.	*B.* — Plateau de la Baraque Michel.	Retard de *B* sur *A*.
	***Floraison de* Calluna vulgaris (*Bruyère*).**			
9 juillet.	*Tilff.* Boutons.	14 juillet.	*Sur la Fagne.* Bruyères petits boutons.	
11 juillet.	*Tilff.* Quelques fleurs.	18 juillet.	Bruyères en bouton.	
12 juillet.	*Lanaeken.* Quelques fleurs.	2 août.	Bruyères commencent à fleurir. Faible retard sur celles de Liége.	Huit jours?
14 juillet.	*Renory.* Boutons.	10 août.	Bruyères en fleur.	
19 juillet.	*Tilff.* Fleurs, mais surtout boutons.	30 août.	Bruyères commencent à défleurir.	
21 juillet.	*Lanaeken.* Bruyères commencent à fleurir.	6 septembre.	Bruyères assez défleuries par places.	
8 septembre.	*Lanaeken.* Bruyères assez défleuries aux endroits découverts, peut-être un peu plus qu'à la Baraque Michel	14 septembre.	Bruyères à peu près comme en Campine, un peu moins avancées.	
13 septembre	*Lanaeken.* Bruyères très défleuries aux endroits exposés.			
	***Chute des feuilles de* Sorbus aucuparia.**			
1er octobre.	*Renory.* Sorbiers encore tout garnis de feuilles.	14 septembre.	Feuilles commencent à se flétrir.	

12 octobre.	*Kinkempois.* Sorbiers encore tout garnis de feuilles vertes et de fruits de corail.	30 septembre.	*Baraque Michel.* Sorbiers ont perdu presque toutes leurs feuilles, mais ont gardé quelques fruits.	Avance de plusieurs semaines.
		11 octobre.	*Malchamps.* Sorbiers entièrement dépouillés.	
		14 et 15 octob.	*Baraque Michel.* Sorbiers dépouillés presque tous.	

Chute des feuilles du Bouleau *et du* Hêtre.

1er octobre.	*Esneux.* Hêtres et bouleaux moins avancés qu'à la Baraque Michel.	14 septembre.	Hêtres et bouleaux jaunissent.	Avance de quinze jours.
5 octobre.	*Mery et Esneux.* Hêtres verts avec par-ci par-là quelques feuilles jaunes.	30 septembre.	Hêtres plus avancés qu'à Tilff, quelques hêtres déjà entièrement dépouillés.	
12 octobre.	*Kinkempois.* Hêtres ont encore beaucoup de feuilles. Beaucoup sont encore tout verts. Les plus avancés sont un peu dépouillés dans le haut. Bouleaux verts avec quelques feuilles jaunes.	14 octobre.	Des six grands hêtres du bois Lonloup (600 m.) trois sont dépouillés presque complètement. Les bouleaux n'ont plus que peu de feuilles. Dans le Roerbusch (620 m.), la plupart des hêtres sont au moins à moitié dépouillés, quelques-uns presque entièrement dépouillés.	
25 octobre	*Bois de la Cambre.* Hêtres dans toute leur splendeur automnale et sont encore assez touffus.	22 octobre.	La plupart des bouleaux et des hêtres presque entièrement dépouillés.	
29 octobre.	*Péruwelz, forêt de l'Hermitage.* Hêtres ont encore beaucoup de feuilles.			
31 octobre.	*Forêt de Soignes.* Hêtres et bouleaux ont encore beaucoup de feuilles.			

La composition du sol de cimetières situés dans la région de Liége au point de vue de la chimie toxicologique; par A. Jorissen, professeur à l'Université de Liége, membre de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique.

Il y a quelque temps déjà, j'ai montré que la suie et les poussières provenant de la combustion incomplète de la houille du bassin de Liége contenaient, à côté d'une dose notable d'arsenic, du molybdène, du bismuth, du plomb, du zinc, de l'antimoine, etc. (1).

Ces observations présentent un certain intérêt au point de vue de la chimie légale; elles doivent tout au moins rappeler que la combustion de la houille suffit pour provoquer la formation de véritables dépôts d'arsenic dans les cheminées et au voisinage des foyers.

A cet égard, l'analyse chimique des couches superficielles du sol de la région de Liége semble devoir fournir des données non moins importantes que l'examen des matériaux retirés des couches profondes.

Ayant été chargé, dans le courant de cette année, de procéder à l'analyse toxicologique des viscères extraits d'un cadavre qui avait été inhumé depuis plus d'un an dans un cimetière de la banlieue de Liége, je ne pus retirer de ces viscères aucun toxique métallique en quantité appréciable.

---

(1) *Annales de la Société géologique de Belgique*, t. XXIII, Mémoires. — *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des sciences), 1903, nos 9-10. — *Id.*, 1905, no 4.

La recherche spéciale de l'arsenic permit de constater cependant qu'après introduction dans le flacon de l'appareil de Marsh du liquide préparé suivant les indications d'Otto (1), il se déposait dans la portion effilée du tube un léger enduit, impondérable du reste, et présentant l'aspect caractéristique des anneaux d'arsenic.

Au surplus, l'analyse décela la présence, dans les mêmes viscères, de petites quantités de composés de cuivre et de zinc, ainsi que de traces de plomb.

Les doses de ces divers éléments étaient de beaucoup trop faibles pour que l'on pût soupçonner un empoisonnement par absorption de poisons métalliques; elles représentaient cependant des quantités plus notables que les traces de ces composés métalliques dont l'existence dans les viscères est considérée comme normale par plusieurs toxicologues.

L'examen des échantillons de terre prélevés lors de l'exhumation, en dessous et au-dessus du cercueil, fournit des données importantes au point de vue de l'origine de ces substances.

La terre en question, très riche en fer, ne fait pas effervescence par addition d'acide chlorhydrique, elle est pauvre en composés calciques.

Ayant traité des portions de 100 grammes de cette terre absolument de la même façon que s'il se fût agi de la recherche des poisons métalliques dans des viscères, je constatai qu'elle donnait des anneaux d'arsenic de plusieurs centimètres de longueur et qu'elle contenait

(1) *Anleitung zur Ausmittelung der Gifte.* Braunschweig, 1896.

notamment des composés de cuivre, de zinc, de nickel et de cobalt avec des traces de plomb.

J'en ai retiré, de plus, une petite quantité d'un sulfure de teinte orangée et présentant les principaux caractères des composés d'antimoine.

A peu près en même temps, je reçus la mission de procéder à l'analyse toxicologique des viscères extraits d'un second cadavre qui avait été inhumé dans un autre cimetière de la région de Liége. La durée du séjour dans la fosse avait été plus longue encore que pour ce qui concerne l'autre cadavre; le cercueil, enterré à une profondeur de 2 mètres, était entouré d'une terre très humide; un liquide noir se trouvait au fond de la bière, ainsi que c'était du reste aussi le cas pour la première sépulture, et les organes, déjà indistincts, étaient pour ainsi dire transformés en une masse d'adipocire.

Les résultats fournis par la recherche toxicologique furent les mêmes que lorsqu'il s'agit du premier cadavre.

Des échantillons de terre avaient été soigneusement prélevés à différents niveaux dans la fosse même où le cercueil avait été déposé.

Cette terre, essentiellement constituée par un mélange de cailloux roulés et d'argile ferrugineuse, fait effervescence par l'acide chlorhydrique et contient une notable quantité de composés calciques. Elle présente sensiblement la même composition aux différents niveaux.

100 grammes du lot prélevé à une profondeur de 2 mètres ont fourni un anneau d'arsenic correspondant à environ un demi-milligramme d'anhydride arsénieux et 1 centigramme d'oxyde zincique.

Tous les échantillons renferment en outre du cuivre,

des traces de plomb, du nickel, du cobalt, du manganèse et une forte proportion de fer (1).

Ces données montrent que même dans des conditions favorables à la dissolution de l'arsenic contenu dans le sol, par les eaux d'infiltration, et à l'apport du toxique, les doses d'arsenic pénétrant accidentellement dans le cercueil peuvent être très faibles.

On sait, du reste, que la plupart des spécialistes, et notamment Otto, Sonnenschein, Ludwig et Mauthner (2), n'admettent guère la possibilité de l'entraînement de doses notables de l'arsenic du sol par l'eau chargée d'anhydride carbonique.

En soumettant les échantillons de terre dont je disposais à l'action prolongée de l'eau chargée d'anhydride carbonique, j'ai pu constater qu'après filtration les liquides ne donnaient pas un anneau appréciable à l'appareil de Marsh.

J'ai fait remarquer plus haut que l'on avait recueilli de part et d'autre, au fond du cercueil, un liquide noirâtre et épais. Ce liquide tenait en suspension une notable quantité de silicates insolubles (particules terreuses). Il était riche en fer et, comme les viscères, il contenait de petites quantités des composés métalliques dont il a été question.

Il n'est pas douteux, à mon avis, que des portions du sol environnant aient pénétré dans les cercueils par

---

(1) J'ai aussi examiné, au point de vue de la présence de l'arsenic et du zinc, un échantillon prélevé près de la surface à Wychmael en Campine. 100 grammes de cette terre ont fourni un anneau à peine visible. Je n'ai pu y constater l'existence du zinc.

(2) Otto, *Anleitung zur Ausmittelung der Gifte.*

l'une ou l'autre fissure, amenant dans les viscères les faibles quantités de composés métalliques séparés par l'analyse.

L'appareil de Marsh permettant de déceler un centième de milligramme d'arsenic, quelques grammes d'une terre contenant un demi-milligramme d'arsenic par 100 grammes suffisent pour provoquer la formation d'un anneau nettement visible.

—

Sur les images multiples formées par les lentilles (*); par J.-E. Verschaffelt.

1. Si l'on examine une lentille à la lumière incidente, on y voit d'ordinaire deux images, qui sont évidemment produites par réflexion sur les faces antérieure et postérieure de la lentille. Pour une lentille biconvexe, la

(*) M. Maltézos a publié récemment (*Comptes rendus*, 147, pp. 736 et 850, 1908) deux notes relatives aux images multiples formées par les lentilles. Or, il y a quelques années déjà, je me suis occupé de la même question et j'ai tâché de trouver des règles générales au sujet de la formation de ces images; n'y ayant pas réussi à souhait, je n'avais pas cru devoir publier mes résultats. Les notes de M. Maltézos m'engagent maintenant à les faire connaître, d'une part, parce que la méthode que j'ai suivie me paraît convenir mieux que la sienne à l'étude de pareilles questions et, d'autre part, parce que, pour les lentilles infiniment minces du moins, je suis arrivé à établir des formules générales pour la double infinité d'images formées par les faisceaux lumineux qui sortent par les deux faces antérieure et postérieure de la lentille.

La méthode que j'avais adoptée était celle de M. Bosscha (*Annales de l'École polytechnique de Delft*, II, 89, 1886). Un grand avantage de cette méthode, c'est qu'on y fait usage, pour représenter la marche d'un rayon lumineux, d'équations linéaires et homogènes.

première image, la plus grande, est virtuelle et droite; l'autre est réelle et renversée, à moins que la lentille ne soit fort peu convergente et placée très près de la source lumineuse; en ce cas, elle est virtuelle et plus grande que la première. Pour une lentille biconcave, c'est la deuxième image, la plus petite, qui est virtuelle et droite, tandis que la première peut être réelle ou virtuelle. Pour des lentilles d'autre forme, les conditions peuvent varier d'après la face que l'on regarde. La seconde image se reconnaît parfois distinctement à ses bords irisés; elle présente, en effet, l'aberration chromatique, puisque les rayons qui la forment ont subi deux réfractions par la face antérieure de la lentille.

Ces deux images ne sont pas les seules qui se forment par des rayons sortant en avant de la lentille; par des réflexions répétées entre les deux faces, il s'en forme une série indéfinie, dont l'intensité lumineuse va, il est vrai, en décroissant très rapidement, au point qu'avec une lampe ou une bougie, placée dans une chambre obscure, on ne voit pas plus loin que l'image du troisième ordre. Au soleil, cette troisième image est encore nettement visible, mais celle du quatrième ordre est tellement faible et est ordinairement située si près de la lentille qu'on ne la distingue qu'à peine — par un déplacement de la lentille ou de l'œil — de petits grains de poussière ou de petites stries.

Les rayons qui sortent de la face postérieure de la lentille forment aussi une série indéfinie d'images. Outre l'image principale, image du premier ordre, d'une lampe ou d'une bougie, on reconnaît nettement la seconde image, plus rapprochée de la lentille, surtout en ayant soin de placer la lentille devant l'ouverture d'un écran et

en plaçant l'œil un peu en dehors de l'axe, de manière à ne pas être gêné par le faisceau émergent principal. Sauf l'image principale, qui n'est pas formée par réflexion, les images d'arrière sont moins lumineuses que les images d'avant du même ordre, puisqu'elles résultent d'un nombre de réflexions plus grand (d'une unité) : à la lumière solaire, l'image du troisième ordre est déjà difficilement reconnaissable (*).

Si la deuxième image d'arrière est réelle, on peut parvenir à la projeter, mais elle ne se détache que faiblement sur le cercle lumineux, formé par le faisceau émergent principal. En recevant les rayons solaires suivant l'axe sur une lentille convergente contre laquelle on place un écran blanc, que l'on observe à la lumière incidente ou par transparence, et en éloignant lentement l'écran de la lentille, on voit à un certain moment se former un point lumineux au centre de la section du faisceau émergent principal ; c'est l'image secondaire du soleil. Avec une lentille symétrique, convergente, dont la distance focale était de 97 centimètres, j'ai trouvé ainsi la deuxième image d'arrière à $15^{cm}5$; j'ai trouvé de la même façon les images d'avant du deuxième et du troisième ordre à 22^{cm} et $8^{cm}5$ de la lentille.

(*) On réussit parfois à découvrir l'image du quatrième ordre en plaçant d'abord la lentille très obliquement par rapport aux rayons solaires et en la ramenant lentement dans la position normale; par la forte inclinaison de la lentille, les images d'ordre élevé deviennent plus lumineuses, et on les voit aisément, bien que déformées par l'astigmatisme; puis, la lentille revenant à la position normale, il est parfois possible de suivre les images dans leur mouvement jusqu'à l'axe.

2. Pour chercher les lois de formation de ces images successives, je fais usage de la méthode de Bosscha, exposée par M. Sissingh (*) dans sa théorie de la réfraction des rayons centraux à travers un système de surfaces sphériques centrées. Cette théorie est applicable aussi à la réflexion ; on sait, en effet, qu'on peut considérer une réflexion comme une réfraction avec l'indice — 1. Je représenterai par R_1 et R_2 les rayons de courbure des deux surfaces, en me conformant à la règle des signes, d'après laquelle une courbure est positive quand la surface est concave du côté d'où viennent les rayons.

Je commencerai par supposer la lentille infiniment mince. Si A_i et D_i sont l'amplitude et la divergence d'un rayon incident, c'est-à-dire l'ordonnée du point où il frappe la lentille et l'angle qu'il forme avec l'axe, les mêmes éléments à la sortie, A_r et D_r, sont déterminés par les formules

$$A_r = rD_i + sA_i, \qquad D_r = cD_i + pA_i,$$

où r, s, c et p sont des constantes ayant une signification assez simple, et dont la valeur peut être aisément déterminée (**).

Puisque je suppose que la lentille est infiniment mince, il en est de même de tout système formé par les surfaces réfringentes et réfléchissantes. On a donc nécessairement $A_r = A_i$, d'où $A_i(1 - s) = rD_i$; et comme il

(*) R. Sissingh, *Propriétés générales des images formées par des rayons centraux traversant une série de surfaces sphériques centrées.* (Verh. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam (1), VII, n° 5, 1900.)

(**) *Ibidem*, p. 8.

n'est pas nécessaire que A_i et D_i s'annulent simultanément, il faut $r = 0$ et $s = 1$. Cela résulte, d'ailleurs, directement de la signification même de ces constantes. La relation générale $cs - pr = n_{a.1}$, où $n_{a.1}$ est l'indice de réfraction du premier milieu par rapport au dernier (*), et qui, dans notre cas, se réduit à $c = n_{a.1}$, nous apprend que $c = +1$ dans la formation des images d'arrière, et $c = -1$ pour les images d'avant.

Pour trouver p, l'inverse de la distance focale prise en signe contraire, j'applique, à diverses reprises, la formule de combinaison (**) qui, dans notre cas, se réduit à $p = p_1c_2 + p_2$. Je trouve ainsi, pour un système formé de k surfaces,

$$p = p_1c_2c_3 \ldots c_k + p_2c_3 \ldots c_k + \cdots + p_{k-1}c_k + p_k.$$

Or, les surfaces extrêmes seules sont réfringentes, tandis que toutes les intermédiaires sont réfléchissantes; on a donc

$$c_2 = c_3 = \cdots = c_{k-1} = -1, \text{ et } c_k = n.$$

puisque c_k est l'inverse de l'indice de réfraction du dernier milieu (air) par rapport au précédent (lentille). Il vient par conséquent :

$$p = \pm n(p_1 - p_2 + \cdots \pm p_{k-1}) + p_k.$$

Les signes supérieurs se rapportent au cas où il y a

(*) R. Sissingh, *loc. cit.*, p. 13.
(**) *Ibidem*, p. 11.

un nombre pair de réflexions, c'est-à-dire où l'on considère une image d'arrière (k pair).

Nous avons

$$p_1 = \frac{n-1}{n}\frac{1}{R_1} \text{ (*)}$$

(même dans le cas où il s'agit de la première image d'avant, à condition de poser $n = -1$, de sorte que dans ce cas $p = p_1 = \frac{2}{R_1}$); puis

$$p_2 = p_4 = \cdots = \frac{2}{R_2}, \quad p_3 = p_5 = \cdots = \frac{2}{R_1};$$

enfin, pour une image d'arrière,

$$p_k = \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n}}\frac{1}{R_2} = -(n-1)\frac{1}{R_2},$$

et pour une image d'avant,

$$p_k = -(n-1)\frac{1}{R_1}.$$

Pour une image d'arrière du m^e ordre, formée après $m-1$ réflexions sur chaque face, $k = 2m$ et

$$p = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + 2(m-1)n\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

(*) *Ibidem*, p. 12.

Pour une image d'avant du m^e ordre, formée après $m-2$ réflexions sur la face antérieure et $m-1$ sur la face postérieure (l'image du premier ordre doit être mise à part), $k = 2m - 1$ et

$$p = \frac{2}{R_1} - 2(m-1)n\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Bien que le raisonnement ne convienne pas pour la première image d'avant, cette dernière formule donne cependant pour $m = 1$ la valeur exacte.

Posant

$$p' = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

on trouve donc, pour l'image d'arrière du m^e ordre :

$$p = \frac{(2m-1)n-1}{n-1}p',$$

et pour l'image d'avant du m^e ordre :

$$p = \frac{2}{R_1} - \frac{2(m-1)n}{n-1}p'.$$

Dans le cas d'une lentille symétrique

$$R_2 = -R_1, \text{ et } p' = (n-1)\frac{2}{R_1};$$

la formule pour l'image d'avant devient alors

$$p = \frac{1-2(m-1)n}{n-1}p'.$$

3. Posant $n = \frac{3}{2}$ (lentille de verre), il vient, pour les images d'arrière, $p = (6m - 5)p'$, c'est-à-dire que p prend successivement les valeurs p', $7p'$, $13p'$, etc. Les images solaires successives se forment donc à des distances $f, \frac{1}{7}f, \frac{1}{13}f$, etc., f étant la distance focale principale de la lentille; toutes ces images sont de même nature que le foyer principal lui-même, c'est-à-dire réelles pour une lentille convergente, virtuelles pour une divergente.

Pour les images d'avant il vient, dans le cas d'une lentille symétrique, $p = -(6m - 8)p'$, de sorte que p prend successivement les valeurs $2p'$, $-4p'$, $-10p'$, etc. Les images solaires se forment donc aux distances $\frac{1}{2}f$, $-\frac{1}{4}f$, $-\frac{1}{10}f$, etc. Elles sont toutes de même nature que le foyer principal, sauf la première.

Les situations de ces images, mentionnées tantôt d'après l'observation, s'accordent avec ces résultats.

4. Le foyer du m^e ordre étant connu, on peut construire de la manière ordinaire l'image m^e d'un objet. Un rayon incident parallèle à l'axe ($D_i = 0$) sort dans une direction qui coupe l'axe au foyer correspondant (car $D_r = p\,A_i$), et un rayon qui frappe la face antérieure de la lentille en son sommet ($A_i = 0$) traverse le système sans changer de direction, ou revient dans la direction symétrique par rapport à l'axe (on a alors $D_r = c\,D_i$; donc $D_r = +D_i$ pour les images d'arrière, $D_r = -D_i$ pour les images d'avant).

La situation, la nature, la position et la grandeur de l'image sont déterminées par les mêmes règles que pour les images principales d'une lentille ou d'un miroir. En plaçant, par exemple, la lentille de 97 centimètres de

distance focale tout près d'une bougie, j'y pus voir trois images d'avant *virtuelles*, d'autant plus éloignées et d'autant plus grandes qu'elles étaient d'ordre plus élevé, et deux images d'arrière également *virtuelles*, dont la seconde était aussi plus éloignée et plus grande que la première.

5. Je me propose maintenant de chercher les formules relatives à la formation des images multiples, dans le cas où l'épaisseur de la lentille n'est pas négligeable. A cet effet, je me figure la lentille, d'épaisseur e, comme enfermée entre deux surfaces réfléchissantes, tournées vers la lentille, de même courbure que la surface qu'elles regardent, et à une distance infiniment petite de cette surface. Ce mode de représentation, qui n'est pas conforme à la réalité, mais y équivaut, a l'avantage de tenir compte une fois pour toutes de l'épaisseur de la lentille et de permettre d'employer des formules de combinaison où la distance est égale à zéro. Dans ce mode de représentation, une image d'avant d'ordre m résulte d'un système, obtenu par la combinaison du système fournissant l'image du $(m-1)^e$ ordre, avec un autre composé du miroir d'avant, de la lentille, du miroir d'arrière, et encore une fois de la lentille, mais traversée en sens contraire, tous ces éléments étant infiniment rapprochés les uns des autres. De même, une image d'arrière du m^e ordre résulte d'un système obtenu en combinant le précédent avec un autre composé de : miroir d'arrière, lentille renversée, miroir d'avant et lentille directe, le tout au contact.

Pour trouver les constantes optiques des systèmes

résultant de la combinaison, je ferai donc usage des formules de combinaison, où d est nul :

$$\left.\begin{array}{ll} c = c_1c_2 + r_1p_2 & r = c_1r_2 + r_1s_2 \\ p = p_1c_2 + s_1p_2 & s = p_1r_2 + s_1s_2 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . (1)$$

Dans ces formules, c_1, r_1, p_1 et s_1 sont les constantes du système fournissant l'image du $(m-1)^e$ ordre, et c_2, r_2, p_2 et s_2 sont les constantes du système de combinaison.

Considérons d'abord le système de combinaison pour les images d'avant.

Ainsi que je viens de le dire, il s'obtient lui-même par la combinaison de quatre éléments infiniment rapprochés, savoir : miroir d'avant, lentille, miroir d'arrière et lentille renversée. Les constantes de ces éléments sont :

1. Miroir d'avant :

$$c = -1 \qquad r = 0 \qquad p = \frac{2}{R_1}\,(*) \qquad s = 1.$$

2. Lentille :

$$c = 1 - \frac{n-1}{n}\frac{e}{R_2} \qquad r = \frac{e}{n}$$

$$p = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - \frac{(n-1)^2}{n}\frac{e}{R_1R_2} \qquad s = 1 + \frac{n-1}{n}\frac{e}{R_1}\,(**).$$

(*) A un point de vue théorique, il est indifférent que la face réfléchissante soit tournée de l'un ou de l'autre côté.

(**) Voir SISSINGH, p. 22.

3. Miroir d'arrière :

$$c = -1 \qquad r = 0 \qquad p = \frac{2}{R_2} \qquad s = 1.$$

4. Lentille renversée :

$$c = 1 + \frac{n-1}{n}\frac{e}{R_1} \qquad r = -\frac{e}{n}$$

$$p = -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{(n-1)^2}{n}\frac{e}{R_1R_2} \qquad s = 1 - \frac{n-1}{n}\frac{e}{R_2}.$$

Les constantes pour la lentille renversée se déduisent de celles de la lentille directe en permutant R_1 et R_2 et en changeant e de signe, parce que la seconde surface est placée *en avant* de la première (*).

Par application répétée des formules (1), je trouve pour les constantes optiques du système de combinaison pour les images d'avant :

$$\left.\begin{aligned}
c &= 1 + \frac{2(n-1)}{n}\frac{e}{R_1} - \frac{2e}{R_2} - \frac{2(n-1)}{n}\frac{e^2}{R_1R_2} \\
r &= -\frac{2e}{n} + \frac{2e^2}{nR_2} \\
p &= -2n\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - \frac{2(n^2-1)}{n}\frac{e}{R_1^2} + \frac{4ne}{R_1R_2} + \frac{2(n^2-1)}{n}\frac{e^2}{R_1^2R_2} \\
s &= 1 + \frac{2(n+1)}{n}\frac{e}{R_1} - \frac{2e}{R_2} - \frac{2(n+1)}{n}\frac{e^2}{R_1R_2}
\end{aligned}\right\} (2)$$

(*) On peut aussi faire usage des formules pour le renversement du système (Sissingh, p. 11), en y posant $N = 1$ (p. 13) et changeant p' et r' de signe, le système n'étant pas retourné dans l'espace.

Quant aux constantes du système de combinaison pour les images d'arrière, on comprend qu'elles peuvent se déduire des précédentes en permutant R_1 et R_2 et changeant e de signe; on a donc

$$\left.\begin{aligned}
c &= 1 - \frac{2(n-1)}{n}\frac{e}{R_2} + \frac{2e}{R_1} - \frac{2(n-1)}{n}\frac{e^2}{R_1R_2}\\
r &= \frac{2e}{n} + \frac{2e^2}{nR_1}\\
p &= 2n\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{2(n^2-1)}{n}\frac{e}{R_2^2} - \frac{4ne}{R_1R_2} + \frac{2(n^2-1)}{n}\frac{e^2}{R_1R_2^2}\\
s &= 1 - \frac{2(n+1)}{n}\frac{e}{R_2} + \frac{2e}{R_1} - \frac{2(n+1)}{n}\frac{e^2}{R_1R_2}
\end{aligned}\right\}(2)'$$

Je n'ai pas réussi à déduire de ces formules des conclusions d'une portée générale.

6. Ces formules se simplifient considérablement dans le cas où la lentille a la forme d'une sphère. On a alors, en représentant par R le rayon de la sphère, $R_1 = -R$, $R_2 = R$, $e = 2R$. Les constantes optiques du système de combinaison pour les images d'avant sont donc

$$c = \frac{n-4}{n}, \quad r = \frac{4R}{n}, \quad p = -\frac{4}{nR}, \quad s = \frac{n+4}{n};$$

et pour les images d'arrière

$$c = \frac{n-4}{n}, \quad r = -\frac{4R}{n}, \quad p = \frac{4}{nR}, \quad s = \frac{n+4}{n}.$$

Les constantes du système qui fournit l'image d'avant

du m^e ordre sont donc :

$$\left.\begin{aligned} c &= -1 + \frac{4(m-1)}{n}, & r &= -\frac{4(m-1)}{n}R, \\ p &= -\frac{2}{R} + \frac{4(m-1)}{n}\frac{1}{R}, & s &= 1 - \frac{4(m-1)}{n} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et celles du système fournissant la m^e image d'arrière :

$$\left.\begin{aligned} c &= -1 + \frac{2(2m-1)}{n}, & r &= \frac{2(2m-1)}{n}R, \\ p &= -\frac{2}{R} + \frac{2(2m-1)}{n}\frac{1}{R}, & s &= -1 + \frac{2(2m-1)}{n} \end{aligned}\right\} \quad (3)'$$

Appliquons ce résultat à une boule d'eau ($n = \frac{3}{4}$). Pour les images d'avant, nous trouvons :

$$c = 3m - 4, \qquad r = -3(m-1)R,$$

$$p = (3m-5)\frac{1}{R}, \qquad s = -(3m-4),$$

et pour les images d'arrière :

$$c = 3m - \frac{5}{2}, \qquad r = 3\left(m - \frac{1}{2}\right)R,$$

$$p = \left(3m - \frac{7}{2}\right)\frac{1}{R}, \qquad s = 3m - \frac{5}{2}.$$

Si l'on reçoit des rayons solaires sur une pareille boule, les rayons émergents antérieurs du m^e ordre viennent se couper en un point placé à une distance $f = -\frac{3m-4}{3m-5}R$ du sommet antérieur de la boule, et les rayons postérieurs à une distance $f = \frac{6m-5}{6m-7}R$ du sommet postérieur. Les foyers d'avant sont donc placés successivement aux

distances : $\frac{1}{2}$ R, — R, — $\frac{1}{4}$ R, etc. du centre, et les foyers d'arrière aux distances — 2R, $\frac{2}{5}$ R, $\frac{2}{11}$ R, etc. du centre. On voit que tous ces foyers, sauf le foyer principal, sont virtuels; ils se rapprochent de plus en plus du centre.

J'ai pu me convaincre de la situation de quelques-unes de ces images solaires en me servant d'un beau ballon de verre, rempli d'eau. Outre les deux premières images d'avant, fort apparentes, et la première image d'arrière, que l'on peut recevoir sur un écran, on voit nettement la deuxième image d'arrière, à l'endroit indiqué ci-dessus, comme un point brillant à l'intérieur de l'eau.

La troisième image d'avant était aussi aisément reconnaissable, comme un grain de poussière fortement éclairé; et j'ai même pu découvrir l'image d'arrière du troisième ordre, bien qu'avec peine, en interceptant la lumière et la laissant passer alternativement.

Les deux premières images d'avant et l'image principale d'arrière étaient nettement doubles, c'est-à-dire accompagnées chacune d'une image satellite, moins éclatante et plus rapprochée du centre. Cette image satellite provenait évidemment de la réflexion à la limite verre-eau, tandis que l'image la plus éclatante résultait de la réflexion à la limite entre le verre et l'air.

Pour ce qui regarde la position des images, on reconnaît aisément que les images d'avant sont renversées, sauf la première, et que les images d'arrière sont droites à l'exception de la première. En me servant d'une flamme, je me suis convaincu que la deuxième image d'arrière était réellement droite.

—

Étude de quelques composés de l'uranium (*); par W. Oechsner de Coninck.

J'ai examiné la réaction de quelques oxydants sur l'oxyde uraneux et l'action de la chaleur sur le sulfate uraneux, le sulfate uranique et l'acétate d'uranium; enfin, j'ai étudié les réactions qui se passent entre quelques sels de chaux et le sulfate uranique.

I. J'ai préparé l'oxyde uraneux pur, en réduisant par l'hydrogène au rouge sombre l'hydrate uranique orangé, UO^3, H^2O. Ainsi préparé, l'oxyde uraneux est brun foncé. On le met en contact, à la température ordinaire, avec de l'eau oxygénée à 11 volumes (légèrement chlorhydrique). Peu à peu il s'hydrate en passant à l'état de UO^2, H^2O, puis cet hydrate s'oxyde en donnant UO^3, H^2O ; en même temps, il se fait une petite quantité de dihydrate jaune serin UO^3, $2H^2O$. Si l'on chauffe l'oxyde uraneux au contact de l'eau oxygénée à une température voisine du point d'ébullition, les réactions qui se produisent sont les mêmes, mais l'oxydation est plus rapide, et c'est le dihydrate qui prédomine.

J'ai varié l'expérience en mettant UO^2 au contact d'un acide nitrique très étendu; à froid, il y a commencement d'hydratation, mais il n'y a pas formation d'hydrates uraniques. Si l'on chauffe doucement, on observe que l'oxyde uraneux se dissout légèrement, mais sans s'oxyder. En laissant reposer la liqueur pendant vingt-quatre heures, il n'y a pas production d'hydrates uraniques.

(*) Institut de chimie, Montpellier.

Action de la chaleur sur le sulfate uranique, $SO^4(UO^2) + 3H^2O$. — Lorsqu'on chauffe ce sel à 105-110°, on lui enlève d'abord $2H^2O$; porté à une température plus élevée, il abandonne un peu d'acide sulfurique :

$$SO^4UO^2, H^2O = UO^3 + SO^4H^2.$$

Si l'on calcine le sel anhydre, on observe deux phases à mesure que la température s'élève.

Vers le rouge sombre :

$$SO^4UO^2 = UO^3 + SO^3.$$

Vers le rouge vif :

$$SO^4UO^2 = UO^2 + SO^2 + O.$$

Mais, à cette température élevée, l'oxyde uraneux se transforme peu à peu en oxyde vert :

$$3UO^2 + 2O = U^3O^8.$$

La masse de l'oxyde devient incandescente, et cette incandescence persiste un certain temps.

Réduction dans un courant d'hydrogène. — Fortement chauffé dans un courant d'hydrogène sec, le sulfate uranique abandonne du gaz sulfureux :

$$SO^4UO^2 + 2H^2 = UO^2 + SO^2 + 2H^2O.$$

Le résidu est de l'oxyde uraneux noir à reflets bruns.

Sulfate uraneux. — J'ai chauffé progressivement, jusqu'à la température de calcination, du sulfate uraneux pur; à partir du rouge naissant, les couches superficielles du sel s'oxydent, et il se fait du sulfate uranique;

les couches inférieures perdent SO^2 à la température de calcination :

$$(SO^4)^2U = UO^2 + 2SO^2 + 2O,$$

et l'oxyde uraneux produit se transforme en oxyde intermédiaire tantôt vert foncé, tantôt noir :

$$3UO^2 + 2O = U^3O^8$$
$$4UO^2 + 2O = U^4O^{10}.$$

Acétate d'uranium. — Soumis à la distillation sèche, ce sel laisse dégager beaucoup de gaz carbonique; il distille un mélange d'acétone, d'eau et d'acide acétique. Le résidu est constitué par de l'oxyde uraneux noir *pyrophorique* qui se transforme, avec incandescence à l'air, en *oxyde intermédiaire noir*. Calciné à l'air, l'acétate d'uranium laisse un résidu d'oxyde noir *non pyrophorique*.

Réaction du sulfate uranique avec le phosphate tricalcique. — Les deux sels sont broyés ensemble dans un mortier; il y a excès du sel d'uranium. La masse est calcinée pendant quelques minutes au rouge.

Après refroidissement, elle est reprise par l'eau, le filtratum renferme du sulfate de calcium; cependant, il ne s'est pas produit de phosphate d'uranium. D'autre part, il se forme une certaine quantité d'oxyde intermédiaire noir.

Il y a donc lieu d'admettre qu'une partie du sulfate uranique a été décomposée et que l'acide sulfurique séparé (*) a attaqué la chaux du phosphate tricalcique.

(*) La décomposition de certains sulfates, par voie mécanique, a été amplement prouvée par les belles expériences de W. Spring.

Réaction du carbonate de calcium avec le sulfate uranique. — On opère comme il vient d'être dit et l'on constate la production de sulfate de calcium et d'un peu d'oxyde intermédiaire noir. Si la calcination est suffisamment prolongée, il se fait, en très petite quantité, de l'uranate de calcium UO^4Ca.

26 novembre 1908.

ÉLECTIONS.

Il est procédé à l'élection, par scrutin secret, de dix noms à transmettre au Gouvernement, en vue de la formation du jury qui sera chargé de juger la deuxième période du concours décennal de physique et de chimie expérimentales, et de dix noms pour la deuxième période du concours décennal des sciences botaniques, 1899-1909.

— L'ordre du jour appelle la nomination de la Commission spéciale des finances pour l'année 1909 : MM. Lagrange, Mourlon, Spring et Van der Mensbrugghe sont réélus.

COMITÉ SECRET.

La Classe se constitue en comité secret pour discuter les titres des candidats présentés pour les places vacantes.

CLASSE DES SCIENCES.

Séance du 15 décembre 1908.

M. J. Fraipont, directeur.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, ff. de secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. Deruyts, *vice-directeur;* Éd. Van Beneden, C. Malaise, Ch. Van Bambeke, Alf. Gilkinet, G. Van der Mensbrugghe, W. Spring, L. Henry, M. Mourlon, P. Mansion, P. De Heen, F. Terby, Ch. Lagrange, Léon Fredericq, V. Masius, J. Neuberg, C. Vanlair, A. Jorissen, Ch. Francotte, Paul Pelseneer, A. Gravis, Aug. Lameere, G. Cesàro, *membres;* Th. Durand, A. Demoulin et A. Rutot, *correspondants.*

M. C. le Paige fait savoir, par télégramme, qu'une indisposition l'empêche d'assister à la séance.

M. le Directeur annonce que M. le Secrétaire perpétuel, dont la santé exige des ménagements, est absent; il s'est rendu dans le Midi, sur le conseil de son médecin.

M. Fraipont, se faisant l'interprète des sentiments de la Classe, fait des vœux pour son prompt rétablissement.

CORRESPONDANCE.

—

Par une lettre du Palais, S. M. le Roi fait exprimer ses remerciements pour l'invitation à la séance publique qui lui a été adressée, et ses regrets de ne pouvoir assister à cette séance.

M. le Ministre des Sciences et des Arts et l'Académie royale de médecine remercient également.

— Les lauréats du récent concours de la Classe des sciences : MM. Léger, de Grenoble; Duboscq, de Montpellier, et Mercier, de Nancy, expriment leur reconnaissance pour la distinction qui a été accordée à leurs travaux.

— Un travail manuscrit : *Sur une correspondance entre le Plan et l'Espace*, par J. Fairon, répétiteur à l'Université de Liége, sera soumis à l'examen de MM. Deruyts et Neuberg.

— Hommages d'ouvrages :

1° *Les sciences anthropologiques et archéologiques. — Les sciences zoologiques;* par Julien Fraipont (deux extraits de l'ouvrage) : *Le Mouvement scientifique en Belgique, 1830-1905;*

2° *Contribution à l'étude de la digestion et de la résorption des protéines dans l'estomac et dans l'intestin grêle chez le chien;* par le Dr Edgard Zunz;

3° *Correction de la position et diamètre de Mercure, déduits des observations de contact effectuées lors du passage du 13-14 novembre 1907;* par Paul Stroobant.

— Remerciements.

RAPPORTS.

—

M. Cesàro, rapporteur pour une note sur la *Reconstitution artificielle du diamant*, par Jules Pasquet, en propose le dépôt aux archives. — Adopté.

— MM. Plateau, Van Bambeke et Gravis émettent leur appréciation sur le rapport de M. Lebrun, relatif à son séjour à Naples, en 1908. — Il en sera donné connaissance à M. le Ministre des Sciences et des Arts.

—

Contribution à l'étude des composés cycliques triméthyléniques du type $\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} \Big\rangle CH - R$; par Pierre Bruylants, docteur en sciences.

Rapport de M. Louis Henry, second commissaire.

« Le point de départ des recherches de M. P. Bruylants est le nitrile éthyléno-acétique

$$\begin{matrix} CH_2 \\ | \\ CH_2 \end{matrix} > CH - CN$$

qui a déjà fait l'objet, en 1901, des recherches de M. Paul Dalle. C'est un travail d'une grande étendue. Pour en faire ressortir l'intérêt et l'importance, il me suffira d'indiquer sommairement les composés dont il traite.

Mettant à profit la méthode imaginée par M. Blaise, réaction des composés halomagnésiens sur leur nitrile, M. Bruylants a préparé diverses acétones cycliques de la formule générale

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - R,$$

la méthylcétone déjà connue mais difficile à obtenir, l'éthyl- et l'isopropylcétone, qui, à cause de sa composition particulière

$$\begin{matrix} CH_2 \\ | \\ CH_2 \end{matrix} > CH - CO - CH < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix},$$

mériterait bien une étude spéciale.

Par hydrogénation, ces cétones ont été transformés en leurs alcools secondaires correspondants. En même temps que ces alcools, M. Bruylants a fait connaître certains de leurs éthers.

Dans une seconde partie de son travail, l'auteur s'occupe des alcools tertiaires correspondants à ces cétones qu'il obtient par la méthode de Grignard, à savoir le di-méthyl-triméthylène-carbinol, le di-éthyl-triméthylène-carbinol et enfin le dérivé mixte, le méthyl-éthyl-triméthylène-carbinol; il en fait connaître les éthers haloïdes, les acétates et les hydrocarbures qui s'y rattachent.

M. Bruylants a fait spécialement l'étude, et d'une manière très soignée, du dérivé biméthylique, le di-méthyl-triméthylène-carbinol

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - \underset{\underset{OH}{|}}{C} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}.$$

Il a constaté, à différents points de vue, la stabilité

particulière que présente ce composé à chaîne cyclique par rapport aux composés isopropyliques correspondants.

Dans le second chapitre de son mémoire, M. Bruylants s'occupe des relations qui existent, au point de vue physique, particulièrement au point de vue de la volatilité et de la densité, entre les divers groupes de composés qu'il a étudiés et spécialement les composés isopropyliques et allyliques correspondants.

Le mémoire de M. Bruylants est suivi d'un appendice où il fait connaître une méthode fort commode et très sûre de préparation des composés triméthyléniques bi-primaires, ainsi qu'une nouvelle méthode de préparation des composés cycliques du même genre.

Le travail de M. Bruylants constitue une contribution importante à l'étude des composés cycliques triméthyléniques, les plus simples du groupe.

En le félicitant des résultats déjà obtenus, je l'engage à continuer ses recherches et à porter surtout son attention sur les composés qui dérivent de l'introduction de radicaux fonctionnels dans la chaîne cyclique.

J'ai l'honneur de proposer à l'Académie l'insertion du mémoire de M. Bruylants dans le *Bulletin*. »

M. Spring déclare se rallier avec empressement aux conclusions de son éminent confrère, M. L. Henry. — Adopté.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

—

Sur les nombreux effets de l'élasticité des liquides; par G. Van der Mensbrugghe, membre de l'Académie.

Cinquième communication (1).

Expériences de M. A.-M. Worthington.

Depuis plus de quatorze ans, M. A.-M. Worthington s'est occupé avec le plus grand succès de l'étude des phénomènes extrêmement curieux qu'on observe après la chute d'une goutte liquide contre une plaque solide, soit dans un autre liquide. En 1894, l'excellent physicien anglais avait donné sur ce sujet, à l'Institution royale de Londres, une conférence à la fin de laquelle il montra pour la première fois les photographies de quelques-unes des phases du phénomène, photographies qu'il venait d'obtenir avec le concours de son collaborateur, M. Cole. Ce succès détermina les auteurs à entreprendre de longs essais photographiques, qui ont fait l'objet de deux mémoires insérés dans les *Philosophical Transactions* de Londres (2). Mais les résultats de ces tra-

---

(1) Pour les quatre notes précédentes, voir les *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* 3e série, 1896, t. XXXII, p. 270, 1re note; 2e note, même année, même tome, p. 418; 3e note, 1898, t. XXXVI, numéro d'octobre, et 4e note, 1899, t. XXXVII, p. 497.

(2) *Impact with a liquid surface,* by A. Worthington and Cole (1897, A, 193, et 1900, A, 255).

vaux n'avaient pas été présentés au public en général; de plus, les illustrations reproduites par la Société royale avaient perdu en grande partie la beauté des photographies originales.

Pour ces motifs, M. Worthington a fait paraître récemment un superbe volume (1), orné de 197 illustrations fournies par la photographie instantanée.

Les épreuves ont été prises à l'aide d'une étincelle électrique dont la durée était certainement moindre que trois millionièmes de seconde, intervalle de temps qui est à la durée d'une seconde entière à peu près comme celle d'un jour est à mille ans.

L'auteur a profité de ce fait que, quelle que soit la suite d'événements succédant à un choc particulier, cette suite se répète dans le même ordre chaque fois qu'une goutte qui tombe frappe la surface exactement dans les mêmes conditions; d'après cela, le problème à résoudre était le suivant :

Faire tomber d'une hauteur définie et dans une obscurité complète une goutte de dimensions définies, de telle manière qu'elle frappe la surface du liquide en un point vers lequel est dirigé un appareil photographique à lentille découverte; éclairer la goutte à l'instant précis du contact par une étincelle tellement courte qu'aucun changement de forme ne peut avoir lieu pendant que la goutte est éclairée.

On obtient ainsi la photographie de la première phase; alors la plaque doit être enlevée et remplacée par une autre; une deuxième goutte exactement de même dimension doit tomber rigoureusement de la même place et être photographiée absolument de la même façon, mais

(1) *A study of splashes*, 1908, Longmans, Green and Co, London.

l'étincelle doit enjaillir pendant une phase venant un peu après la première, par exemple, un millième de seconde plus tard. Puis, nouvel enlèvement de la plaque à laquelle on en substitue une autre, destinée à recevoir l'image d'une troisième phase, et ainsi de suite.

Par ce procédé, on peut suivre le phénomène pas à pas, et l'on évite deux grosses difficultés, dont l'une est la nécessité de déplacer la plaque tous les cinq centièmes ou millièmes de seconde s'il fallait poursuivre les différentes phases d'une seule et même goutte; l'autre difficulté serait d'obtenir de brillantes étincelles d'une durée assez courte à des intervalles aussi minimes.

A la vérité, le procédé ci-dessus exige que les gouttes soient rendues libres absolument dans les mêmes conditions et qu'une étincelle soit produite en deux ou trois millièmes de seconde, afin de saisir exactement la phase qu'on désire photographier. Quant à la première obligation, M. Worthington a eu l'heureuse idée d'employer un verre de montre couvert de noir de fumée; une goutte tombant sur le noir de fumée ne le mouille pas; elle roule sans y adhérer et conserve une forme sphéroïdale; il suffit alors de la transporter sur le verre de montre enfumé servant à toutes les expériences. L'auteur a imaginé un moyen très ingénieux de faire descendre rapidement le verre de montre au-dessous de la goutte qui, devenue alors libre, tombe dans un réservoir d'eau placé en dessous; l'appareil photographique est dirigé vers les points où est frappée la surface du liquide.

Il est à remarquer que la goutte qui repose sur le noir de fumée n'est pas parfaitement sphérique, mais est aplatie par son propre poids : de là des oscillations de formes, suivant que la goutte est plus ou moins aplatie dans le sens horizontal ou dans le sens vertical.

L'auteur n'a pas été moins habile pour faire éclater une étincelle électrique au moment convenable; car, comme la goutte tombe toujours de la même hauteur, il convient de faire éclater l'étincelle à des moments qui correspondent aux phases successives du phénomène.

Après l'exposé que nous venons de faire d'après l'auteur, nous allons décrire les effets bien remarquables qu'il a observés dans un cas particulier; nous tâcherons ensuite de les expliquer en nous fondant sur l'élasticité parfaite des liquides.

Cas d'une goutte d'eau pesant $0^{gr}2$ et ayant $7^{mm}36$ de diamètre; hauteur de chute : 40 centimètres, dans un mélange d'eau et de lait, afin que l'image soit plus visible.

Quand la goutte descend dans le liquide (fig. 1 et 2), la partie supérieure n'est pas altérée, mais autour d'elle se soulève une petite coupe que l'auteur appelle cratère; du bord de celui-ci se détachent des gouttelettes (fig. 3).

Pendant que la goutte descend plus bas, le cratère devient plus large, plus élevé, plus épais, et des filaments sont projetés loin du bord (fig. 4). Dans la partie interne du cratère, on aperçoit des taches noires, dues au noir de fumée entraîné avec la goutte quand elle a quitté son support enfumé; bien que ces taches défigurent un peu l'image, elles montrent par leur présence que l'intérieur du cratère est doublé par le liquide original qui formait la goutte et apportent ainsi d'utiles renseignements quant à la direction du courant.

Le cratère monte ensuite très rapidement (fig. 5); les parois deviennent dès lors plus épaisses; puis le cratère descend et s'élargit (fig. 6), jusqu'à ce qu'il n'y ait qu'un anneau de lobes reposant sur la surface et entourant un creux central.

Alors commence la détente : on voit monter une colonne centrale (fig. 7); le noir de fumée est entraîné vers le milieu et indique que le liquide de la goutte originale émerge à la tête de la colonne montante; celle-ci atteint bientôt sa plus grande hauteur (fig. 8), puis s'abaisse en dessinant un gâteau liquide qui entoure la base et dont le bord forme la première onde s'étalant en un cercle toujours grandissant. La première colonne peut être suivie de l'ascension d'une colonne secondaire, très différente de forme, laquelle disparaît à son tour, et ainsi se forme une deuxième onde.

Lorsqu'on fait tomber une goutte de lait dans de l'eau, on remarque que la partie supérieure de la colonne est visible, précisément parce qu'elle contient presque tout le lait de la goutte, tandis que la partie inférieure consiste surtout en eau transparente.

La réapparition de la goutte originale au sommet de la colonne qui rebondit peut être vérifiée aisément à l'œil nu : il suffit de faire tomber d'une hauteur d'environ 40 centimètres une goutte de lait dans une tasse de café ; on reconnaît sans peine que la colonne qui émerge transporte la blanche goutte de lait à son sommet; elle est à peine tachée par le liquide où elle est tombée.

Avant de décrire d'autres phénomènes de la même nature, l'auteur rappelle alors deux principes relatifs à la constitution des liquides, savoir le principe de la tension superficielle et celui de Joseph Plateau sur la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées.

« Ces deux principes, ajoute l'auteur, permettent » d'expliquer beaucoup de faits relatifs au choc d'une » goutte liquide contre un liquide; mais il importe de » savoir combien de choses sont demeurées sans expli- » cation. Pourquoi, par exemple, le cratère monte-t-il

» si soudainement et verticalement autour de la goutte
» aussitôt après son entrée? Pourquoi la goutte s'étale-
» t-elle et couvre-t-elle la face intérieure du cratère, en se
» repliant le long de cette face et se transformant pour
» ainsi dire en un parapluie retourné? Pourquoi, quand
» le cratère s'affaisse, coule-t-il plutôt vers l'intérieur
» qu'en dehors, de manière à soulever une colonne
» centrale si remarquable?

» Ces questions exigent le tracé du mouvement de
» chaque particule d'eau jusqu'à l'impulsion première
» produite par le choc de la goutte; elles sont bien plus
» difficiles à résoudre et ne peuvent être traitées d'une
» manière satisfaisante qu'au moyen d'une analyse ma-
» thématique compliquée. »

Nous venons de reproduire succinctement la description de la première série des expériences de M. Worthington; nous avons tenu ensuite à signaler les principes invoqués par l'éminent expérimentateur, ainsi que ses réflexions générales sur les questions auxquelles donnent lieu les faits si curieux qu'il a observés avec une persistance étonnante.

Actuellement, nous allons tâcher d'expliquer bien simplement les particularités qui ont paru si mystérieuses à l'excellent physicien anglais.

Puisque la goutte vient choquer l'eau avec une vitesse égale à $\sqrt{2g.\,0^m40}$ ou à 2^m8 environ, la partie inférieure sera subitement comprimée, et en un temps très court, par exemple en deux millièmes de seconde, cette compression sera transmise aux parties voisines, non seulement vers le haut et vers le bas, mais encore latéralement; or, les parties latérales qui entourent la goutte ne pourront se détendre ni vers le bas, ni parallèle-

ment à la surface choquée; ces parties donc devront s'élever et dessiner une petite lame courbe dont la largeur dépasse à peine le diamètre de la goutte; deux millièmes de seconde après, celle-ci sera descendue davantage, d'où compression plus forte qui se transmettra un peu plus loin, et le cratère qui en résultera aura à la fois plus de largeur et de hauteur, et ainsi de suite jusqu'à ce que la période du choc soit accomplie, c'est-à-dire en moins de deux centièmes de seconde (voir les fig. 4 et 5). Telle est, pensons-nous, la réponse la plus directe à la première question formulée par M. Worthington.

D'après ce qui précède, les portions du liquide ambiant ne sont soulevées qu'à la suite d'une compression soudaine qui leur imprime des vitesses telles que le cratère tout entier est soumis à une élasticité de traction due à l'augmentation subite des distances intermoléculaires; de là, dans l'ensemble de la lame, une forte tendance à rétablir les distances primitives. Cette tendance se manifeste vers le bord de la lame qui se ramasse sur lui-même avec une vitesse telle qu'il s'en détache des gouttelettes et des filaments liquides. Le cratère est dans un état tout à fait analogue à celui d'une bulle de savon qui vient d'être percée : du bord de l'ouverture sont projetées des parcelles liquides avec d'autant plus d'énergie que la lame est plus mince, comme je l'ai fait voir en 1897 (1).

Voici, du reste, une expérience fort simple qui montre très bien la différence de constitution d'un liquide suivant la vitesse avec laquelle il se meut. D'une hauteur de 4 à 5 mètres, faisons tomber l'eau contenue dans un

(1) *Sur la théorie de l'explosion d'une bulle de savon très mince.* (ANN. DE LA SOC. SCIENT. DE BRUXELLES, t. XXI, 1re partie, 1897.)

vase quelconque sous la seule action de la pesanteur; nous constatons alors que la masse se resserre dans un sens, puis dans un autre, mais en conservant sa continuité sur une grande longueur. Au contraire, si nous projetons vivement l'eau dans une direction quelconque vers le bas, la masse se transforme très rapidement et se divise en une multitude de gouttes ou de bulles plus ou moins grosses qui crèvent avant de toucher le sol. C'est que, par une projection assez vive, les distances intermoléculaires ont subi de très légers accroissements, mais suffisants pour faire naître dans toute la masse une élasticité de traction qui y opère une très rapide transformation. Si le cratère soulevé en quelques millièmes de seconde ne se divise pas immédiatement après, c'est que le liquide dont il est formé est remplacé pendant six à sept millièmes de seconde.

En effet, toutes les parties soulevées étant vivement étirées, tendent à reprendre leur constitution primitive en attirant à elles les portions voisines; or, ces dernières sont loin d'être constituées de la même manière, car la face extérieure du cratère est reliée à des tranches plus ou moins étirées par l'impulsion si vive imprimée au liquide soulevé; au contraire, la face interne touche une bande de la goutte elle-même, c'est-à-dire un ensemble de particules comprimées par le choc; ce sont ces particules qui se mouvront vers la face interne du cratère, non seulement pour diminuer leur propre compression, mais encore pour restreindre l'élasticité de traction des diverses parties constitutives du cratère, qui se maintient ainsi sans se diviser. Le mouvement des parties supérieures de la goutte vers la surface interne de la lame est donc une conséquence naturelle de l'effort du liquide pour regagner sa constitution primitive, car cette constitution

avait été modifiée dans la lame par un étirement soudain, et dans la goutte par une compression subite.

Il n'est par conséquent pas surprenant que la face interne de la figure soulevée porte des taches noires provenant du noir de fumée entraîné avec la goutte après qu'elle a quitté la surface enfumée du verre de montre servant de support.

Si les raisonnements qui précèdent sont exacts, ils fournissent, selon nous, la solution complète de la deuxième question énoncée par l'auteur dans les termes pittoresques que voici :

Pourquoi la goutte s'étale-t-elle comme une doublure sur la face intérieure du cratère, en se repliant pour ainsi dire le long de cette face, et en se transformant en un parapluie retourné ?

Nous pouvons aborder maintenant la solution de la troisième question posée par M. Worthington : Pourquoi, quand le cratère s'affaisse, coule-t-il plutôt vers l'intérieur qu'au dehors, de manière à soulever une colonne centrale si remarquable ?

Tout d'abord, nous croyons pouvoir affirmer que par le choc de la goutte contre le mélange d'eau et de lait, les couches immédiatement sous-jacentes ont été comprimées par suite des impulsions consécutives qui n'ont cessé qu'au moment de la disparition de l'énergie de la goutte choquante. A la vérité, à la compression ainsi produite il faut ajouter l'impulsion due à la descente si prompte de tout le cratère. Il résulte de là que, au moment où celui-ci a regagné le niveau général, nous devrons nous trouver en présence de deux masses liquides constituées bien différemment.

D'une part, celle qui rebondit dans le creux du milieu,

en vertu de sa détente soudaine, et qui s'élève avec une vitesse suffisante pour que les distances intermoléculaires éprouvent de légères augmentations; pour cela doit y naître une certaine élasticité de traction.

D'autre part, les particules du cratère aplati ont subi graduellement une compression assez notable; par conséquent, celles qui se trouvent le plus près du sommet de la colonne centrale seront attirées à leur tour par les couches latérales supérieures de cette colonne et pourront ainsi non seulement reprendre leur constitution normale, mais encore rétablir celle de la masse montante. Or, les particules ainsi attirées sont précisément celles qui avaient recouvert la paroi interne du cratère soulevé.

Voilà pourquoi, si nous ne nous trompons, les fragments de noir de fumée doivent se répandre maintenant autour de la colonne centrale qui rebondit; car la brusque détente doit avoir imprimé une vitesse plus grande vers le haut de la masse montante qu'aux portions inférieures; c'est donc là aussi que s'exerce la plus forte élasticité de traction.

Dans la note actuelle, nous avons tâché d'expliquer sans calcul les trois particularités signalées par l'éminent physicien anglais. Nous n'hésitons pas à déclarer que ses belles expériences sont éminemment propres à montrer l'énergie spéciale acquise par les liquides lorsqu'on modifie les degrés de leur élasticité, soit par compression, soit par traction. On se rappelle que, dans nos quatre communications antérieures sur le même sujet, nous avions pu signaler des exemples curieux du même genre.

—

G. Van der Mensbrugghe, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 12, 1908.

Fig. 1.

Fig. 2.

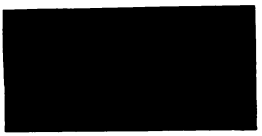


Fig. 3.

Fig. 4.

Fig 5

Fig. 6.

Fig. 7

Fig. 8.

Contribution à l'étude des composés cycliques triméthyléniques du type $\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - R$; par Pierre Bruylants, docteur en sciences.

INTRODUCTION.

Les composés triméthyléniques sont les dérivés cycliques les plus simples; ils renferment tous dans leur molécule le noyau triangulaire du cyclopropane.

Au point de vue de leur constitution, ils peuvent être assimilés aux dérivés isopropyliques, composés les plus simples à chaîne dichotomique.

On peut supposer qu'ils dérivent de ceux-ci, par l'élimination d'une molécule d'hydrogène H_2, aux dépens des deux radicaux méthyl CH_3 extrêmes :

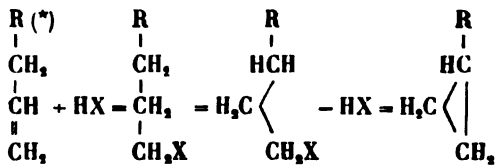
$$RCH\begin{matrix} /CH_3 \\ \backslash CH_3 \end{matrix} - H_2 = RCH\begin{matrix} /CH_2 \\ | \\ \backslash CH_2 \end{matrix}.$$

La chaîne triangulaire triméthylénique se formerait dans ces conditions aux dépens de la chaîne ramifiée isopropylique.

On peut supposer aussi que ces composés triméthyléniques dérivent des composés allyliques correspondants par un processus très simple d'isomérisation :

$$HC \leqslant \begin{matrix} CHHR \\ CH_2 \end{matrix} = H_2C < \begin{matrix} CHR \\ | \\ CH_2 \end{matrix}.$$

De fait, on peut les obtenir par addition et élimination successive d'hydracide halogéné à la molécule de certains composés allyliques :



L'élimination de la molécule d'hydracide halogéné HX ne se faisant plus, comme dans l'acte de la fixation, aux dépens de deux chaînons carbonés voisins, mais bien aux dépens de deux chaînons en position 1.4, le composé allylique non saturé se transforme en composé saturé triméthylénique.

Les composés triméthyléniques sont donc isomères aux composés allyliques. Ces deux classes de composés se différencient cependant nettement par l'action qu'ils subissent de la part des halogènes et des hydracides halogénés.

Les premiers ne s'ajoutent au brome que lentement, parfois seulement à chaud ; aux hydracides halogénés, ils ne s'ajoutent, en général, qu'à chaud et sous pression. Les composés allyliques, au contraire, réagissent intensément avec le brome et absorbent déjà à froid les hydracides halogénés.

Il est intéressant de comparer les dérivés cycliques,

(*) R étant un radical négatif - CN, CO..., etc.

triméthyléniques, respectivement aux dérivés isopropyliques et allyliques (*) correspondants.

C'est le but que je me suis proposé.

J'exposerai exactement l'objet de ce travail en disant qu'il comporte :

1° La préparation et l'étude de quelques composés cycliques triméthyléniques de l'étage C_5 de carburation jusqu à l'étage C_8. Ce sont des dérivés de l'éthyl-triméthylène, de l'isopropyl, de l'isobutyl et de l isoamyl-triméthylène. L'étude des dérivés du méthyl-triméthylène a déjà été faite.

2° L'étude comparative au point de vue chimique et physique de ces composés cycliques triméthyléniques et des composés isopropyliques correspondants.

3° L'étude comparative au point de vue des propriétés physiques de ces mêmes composés triméthyléniques et de leurs isomères les composés allyliques.

L'histoire de ces composés triméthyléniques ne fait que commencer et leur nombre est encore très restreint.

Les composés de l'étage C_3, abstraction faite du triméthylène lui-même et du chlorure de cyclopropanol, obtenu par chloruration du triméthylène (**), sont encore inconnus.

(*) Je désignerai d'une façon générale sous le nom de composés isopropyliques et allyliques ceux qui renferment dans leur molécule respectivement les groupements $-CH<\begin{smallmatrix}CH_3\\CH_3\end{smallmatrix}$ et $-CH_2-CH=CH_2-$. Il est plus aisé d'y ramener ainsi les composés triméthyléniques, qui sont caractérisés par le groupement $-HC<\begin{smallmatrix}CH_2\\|\\CH_2\end{smallmatrix}$.

(**) Gustavson, *Journal f. p. Chemie* (2), 43, 396.

Les composés de l'étage C_4 ont fait l'objet d'une étude plus complète; les dérivés de l'acide éthyléno-acétique et de l'alcool éthyléno-éthylique (*) obtenu récemment à l'état de pureté ont été étudiés complètement.

Parmi les composés plus carbonés, à part quelques dérivés polyméthylés du triméthylène, deux seulement ont été décrits : l'acétone méthyl-triméthylénique et le diméthyl-triméthylène carbinol (**).

On ne connaît d'ailleurs qu'un petit nombre de méthodes d'obtention de ces composés triméthyléniques.

M. Perkin (***) a obtenu les acides triméthylène carbonique et triméthylène dicarbonique par l'action du bibromure d'éthylène sur le malonate d'éthyle sodé.

L'action du même réactif sur l'acétylo-acétate d'éthyle sodé lui a donné l acétone éthyl-triméthylénique (IV).

Un autre procédé, dû à M. L. Henry (V), consiste à traiter le nitrile γ chloro-butyrique par la potasse caustique sèche.

L'élimination de l'acide chlorhydrique se fait aux dépens de deux chaînons en position 1.4; on obtient ainsi le nitrile éthyléno-acétique.

Plus récemment (VI), on a préparé la méthyl-triméthylène-cétone par l'action de la potasse caustique pulvérulente sur l'acétone méthyl- γ chloro-propylique.

Je signalerai ici, pour y revenir plus loin, une méthode

(*) P. Dalle, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, n° 1, 1902.
(**) *Berichte D. Chem. G.*, 34, 3887 (1901).
(***) Perkin, *Berichte D. Chem. G.*, 17, 54 et 323.
(IV) Perkin, *Berichte D. Chem. G.*, 17, 1441.
(V) Henry, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1901, 249.
(VI) Lipp, *Berichte D. Chem. G.*, 22, 1207.

directe d'obtention des acétones triméthyléniques : elle consiste dans l'action des composés halomagnésiens sur le nitrile γ bromobutyrique; elle fournit en un seul stade les acétones triméthyléniques correspondantes.

Le composé qui m'a servi presque uniquement de point de départ pour la préparation de ces dérivés triméthyléniques est le nitrile γ chloro-butyrique.

On l'obtient, comme l'a indiqué M. L. Henry (*), par l'action du cyanure de potassium sur le chloro-bromure de triméthylène. Celui-ci résulte de l'addition d'acide bromhydrique au chlorure d'allyle (**).

La réaction du cyanure de potassium sur le chloro-bromure de triméthylène donne naissance, comme l'a montré M. L. Henry, non seulement au nitrile chloro-butyrique, mais encore à une notable proportion de nitrile glutarique. J'ajouterai que j'ai observé, en outre, la formation en petite quantité (2 à 3 %) de nitrile bromo-butyrique.

On peut donc dire que si la réaction du cyanure de potassium sur le chloro-bromure de triméthylène s'établit de préférence avec le chaînon $-CH_2Br$, elle ne se fait pas uniquement dans ce sens, mais se fait aussi avec le chaînon $-CH_2Cl$. Il se forme ainsi à côté de grandes quan-

---

(*) L. Henry, *Les nitriles alcools*, p 76.

(**) A l'occasion de ce travail, j'ai dû préparer de grandes quantités de chlorobromure de triméthylène. Les méthodes préconisées pour cette préparation ne m'ayant pas donné satisfaction, à raison des rendements trop faibles et des dangers des opérations, j'ai été amené à chercher un procédé plus avantageux. Je décrirai dans un travail spécial la méthode nouvelle que j'ai adoptée.

tités de nitrile γ chloro-butyrique, et le nitrile γ bromobutyrique et le nitrile glutarique.

Ces nitriles γ halogénés se transforment facilement, sous l'influence de la potasse caustique pulvérulente, en nitrile éthyléno-acétique. On observe toujours le dégagement de vapeurs ammoniacales, ce qui indique l'hydratation d'une partie du nitrile.

Dans ces conditions, en acidifiant les résidus alcalins du traitement de ces nitriles, on retire, par extraction à l'éther, de l'acide éthyléno-acétique, accompagné de petites quantités d'amide éthyléno-acétique, produit d'une hydratation incomplète.

La transformation du nitrile éthyléno-acétique en acide se réalise le mieux par voie alcaline. L'hydratation par les solutions aqueuses ne s'effectue que très lentement. Au contraire, en opérant au moyen de potasse caustique en poudre légèrement humectée et de nitrile humide, la réaction est très rapide, parfois même des plus violentes.

Au commencement, il est nécessaire de chauffer légèrement, puis la réaction s'achève rapidement avec un abondant dégagement d'ammoniaque. Il se forme bientôt une masse solide homogène : après addition lente d'eau et ébullition pendant quelques minutes, la réaction est terminée.

La décomposition du sel potassique par l'acide sulfurique dilué fournit l'acide éthyléno-acétique, que l'on extrait de la solution aqueuse par l'éther.

Les rendements sont satisfaisants.

L'éther éthylique de cet acide s'obtient le plus avantageusement au moyen du chlorure acide que l'on décompose par un excès d'alcool éthylique.

La transformation directe du nitrile en éthyléno-acétate d'éthyle, qui semblait devoir s'accomplir en faisant passer un courant d'acide chlorhydrique sec dans la solution alcoolique du nitrile, n'est guère recommandable. L'éther éthylique obtenu par cette voie est toujours souillé de dérivés halogénés, dont il est impossible de le séparer par distillation.

Le point de départ immédiat des composés étudiés est, d'une part, le nitrile éthyléno-acétique, d'autre part, l'éthyléno-acétate d'éthyle.

A l'aide du premier, j'ai obtenu des acétones et les alcools secondaires correspondants.

A l'aide du second, j'ai obtenu des alcools tertiaires, qui ont surtout fait l'objet de cette étude.

Ces recherches ont donc porté uniquement sur les dérivés monosubstitués du triméthylène, ceux où un radical carboné quelconque -R remplace un atome d'hydrogène, d'un des chaînons méthylène formant la chaîne cyclique triméthylénique.

Tous ces dérivés peuvent être rapprochés avantageusement, et je le ferai maintes fois, des composés résultant de la substitution par le même radical carboné -R, d'un atome d'hydrogène de l'unique chaînon méthylène du propane normal.

L'exposé de ce travail est divisé en deux parties :

La première est consacrée à la description et à l'étude des composés triméthyléniques obtenus synthétiquement.

Les plus importants d'entre eux y sont comparés, au point de vue de leurs propriétés chimiques, aux dérivés isopropyliques correspondants.

Dans une seconde partie, tous ces composés triméthyléniques sont comparés, au point de vue de leurs pro-

priétés physiques, aux dérivés correspondants saturés, les composés isopropyliques, et aux dérivés correspondants non saturés, les composés allyliques.

J'annexerai en appendice à ce travail une notice dont le sujet est en rapport direct avec l'étude des composés triméthyléniques. Elle traitera d'une nouvelle méthode de synthèse directe des acétones cycliques triméthyléniques.

Le sujet de cette dissertation m'a été indiqué par M. le professeur L. Henry, et c'est sous sa direction et celle de M. le professeur P. Henry que ces recherches ont été faites.

Qu'il me soit permis de leur présenter ici mes sincères remerciements.

CHAPITRE Ier

§ 1. — Acétones et alcools secondaires.

La méthyl-triméthylène-cétone

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH_3.$$

Ce composé résulte de l'action du méthyl-bromure de magnésium sur le nitrile éthyléno-acétique.

Le produit d'addition magnésien cristallise au sein de l'éther en une belle masse blanche. En détruisant par l'eau uniquement la partie cristalline, on obtient un produit pur; au contraire, la partie restant en solution dans l'éther fournit, après destruction par l'eau, un produit toujours souillé de dérivés halogénés.

Le rendement de cette opération en composé acétonique est loin d'être avantageux; on n'obtient que 40 % environ du rendement théorique.

Ce corps bout à 114° sous la pression de 772 millimètres de mercure.

Sa densité de vapeur, prise par la méthode de Meyer, a été trouvée égale à 2.84, la densité calculée étant 2.90.

Ce composé a déjà été obtenu de deux façons différentes :

M. Perkin (*), d'abord, l'a obtenu en chauffant à 200° l'acide éthylène acétylo-acétique

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > C < \begin{matrix} COOH \\ CO - CH_3 \end{matrix} = \begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH_3 + CO_2.$$

Plus tard, il a été obtenu par l'action de la potasse caustique sur l'acétone méthyl-γ chloro-propylique (**)

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C - Cl \end{matrix} \!\!\!\

bonées, éthyl- et isopropyl-triméthyléniques, fournissent aisément par réduction les alcools secondaires triméthyléniques correspondants.

L'éthyl-triméthylène cétone

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH_2 - CH_3.$$

Ce composé prend naissance dans l'action de l'éthylbromure de magnésium sur le nitrile éthyléno-acétique. Le produit d'addition magnésien est peu soluble dans l'éther, d'où il se précipite sous forme d'une masse cristalline jaunâtre.

Décomposé par l'eau en suivant le traitement ordinaire, ce composé fournit l'acétone; les rendements de l'opération sont de 67 °/₀.

Le produit séché sur le chlorure de calcium fondu, puis distillé, passe dès la première rectification en presque totalité entre 131° et 135°. Une nouvelle rectification permet de fixer le point d'ébullition de cette acétone à 132°-133°, sous la pression de 767 millimètres, toute la colonne thermométrique dans la vapeur.

Voici les résultats de l'analyse de ce produit :

0gr1924 de substance brûlée par CuO ont donné 0gr5141 d'anhydride carbonique et 0gr179 d'eau.

Ces chiffres correspondent à :

	Trouvé °/₀.	Calculé °/₀.
C.	72.98	73.47
H.	10.30	10.21

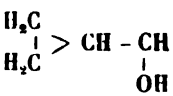
Cette acétone est un liquide incolore, mobile comme de l'eau, à odeur piquante et désagréable.

Sa densité à 20° est 0.9152.

Sa densité de vapeur, prise par la méthode de Meyer, a été trouvée égale à 3.31, la densité calculée étant 3.38.

Son indice de réfraction pour la raie D du sodium, déterminé à 20°, étant 1.42931, on trouve comme pouvoir réfringent moléculaire la valeur 27.61, qui concorde assez avec la valeur 27.07 calculée d'après la formule de ce composé.

L'éthyl-triméthylène carbinol



$$\begin{array}{l} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > CH - \underset{\underset{OH}{|}}{CH} - CH_2 - CH_3.$$

Préparation : Ce corps a été obtenu par l'hydrogénation vive de l'acétone correspondante.

L'hydrogénation a été effectuée en milieu alcalin par l'action du sodium sur l'alcool à 96°, 97°.

Voici quelques détails au sujet de cette opération. Dans 500 grammes d'alcool, tenant en solution 35 grammes d'acétone, on a introduit par petites portions 50 grammes de sodium en morceaux. La réaction, très vive à l'origine, doit être terminée en chauffant au bain d'eau. On entraîne l'alcool éthylique et l'alcool éthyltriméthylénique formé au moyen d'un courant de vapeur d'eau. Les dernières portions entraînées renferment la plus grande partie du produit cherché. L'alcool éthylique, cependant, après dessiccation et rectification, en fournit encore une notable proportion.

Le rendement de l'opération en éthyl-triméthylène carbinol est de 60 °/₀ environ.

J'ai trouvé dans ce composé 71.72 °/₀ de carbone et 12.11 °/₀ d'hydrogène, alors que les proportions calculées de ces éléments sont respectivement 72 °/₀ et 12 °/₀ (*).

Propriétés : L'alcool éthyl-triméthylénique est un liquide incolore beaucoup moins mobile que l'eau, à odeur très prononcée de créosote.

Il bout à 140° sous la pression de 767 millimètres. Il est très peu soluble dans l'eau, mais soluble dans les dissolvants organiques.

Sa densité à 20° est 0.8901.

Sa densité de vapeur, prise par la méthode de Meyer, a été trouvée égale à 3.32, la densité calculée étant 3.45. Son indice de réfraction à 20° pour la raie D du sodium est 1.4326; le pouvoir réfringent moléculaire trouvé est 29.13, alors que cette constante calculée est 29.139.

Traité par le chlorure d'acétyle, cet alcool secondaire fournit à la manière ordinaire un acétate. Celui-ci a encore été obtenu par l'action de l'anhydride acétique et d'une goutte d'acide sulfurique sur l'alcool.

Il constitue un liquide incolore mobile, d'une odeur éthérée très prononcée.

Sa densité à 20° est 0.8175. Il bout sous la pression de 765 millimètres à 159°.

Deux cryoscopies dans l'acide acétique ont donné

(*) Voici les chiffres de cette combustion : 0gr1345 de substance brûlée ont fourni : 0gr3536 d'anhydride carbonique, 0gr1466 d'eau.

comme poids moléculaire respectivement 138 et 139.7, alors que la formule correspond à 142.

Un dosage d'acide acétique dans cet éther a annoncé 41.97 °/₀ d'acide, alors que la formule en demande 42.26 °/₀.

L'isopropyl-triméthylène cétone

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}.$$

Ce corps résulte de l'action de l'isopropyl-bromure de magnésium sur le nitrile éthyléno-acétique. Le produit d'addition cristallise facilement au sein de l'éther; détruit par l'eau en suivant le mode habituel, il fournit l'acétone cherchée. Le rendement de l'opération est d'environ 60 °/₀.

C'est un liquide incolore, mobile, à odeur piquante, insoluble dans l'eau, mais soluble dans l'alcool, l'éther, etc.

Il bout à 139°-141° sous la pression de 769 millimètres.

Sa densité de vapeur prise par la méthode de Meyer a été trouvée égale à 3.78, la densité calculée étant 3.87.

Sa densité à 20° est 0.9006. Son indice de réfraction, à la même température pour la raie D du sodium, étant 1.42731, son pouvoir réfringent moléculaire est 31.77 : le calcul amène à la valeur de 31.64.

Au point de vue de sa constitution, cette acétone est assez intéressante, puisqu'elle renferme le chaînon > CO acétonique, enclavé entre un chaînon isopropyl - HC $< \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$ et un chaînon triméthylène - HC $< \begin{matrix} CH \\ | \\ CH_2 \end{matrix}$; à ce titre,

elle constitue l'intermédiaire entre l'isobutyrone, qui renferme le chaînon acétonique enclavé entre deux chaînons isopropyle, et la ditriméthylène cétone, où ce même chaînon serait entouré de deux radicaux triméthylène (*).

L'isopropyl-triméthylène carbinol

$$\begin{array}{l} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > CH - \underset{\underset{OH}{|}}{CH} - CH < \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 - \end{array}.$$

Ce composé a été obtenu, comme le dérivé éthylique, par la réduction de l'acétone, au moyen du sodium et de l'alcool. L'analyse de ce composé a fourni les chiffres suivants :

0.2087 de substance brûlée ont donné 0.5650 d'anhydride carbonique et 0.2330 d'eau; ce qui correspond à :

	Trouvé %.	Calculé %.
C.	73.85	73 68
H.	12.41	12.28

Ce corps bout à 151°-152° à la pression de 769 millimètres. Il est très visqueux et a, comme le dérivé éthylique, une odeur très prononcée de créosote.

Sa densité de vapeur (méthode de Meyer) est 3 76, la densitée calculée 3.93. Son indice de réfraction pour la raie D est 1.43643; on trouve ainsi comme indice de réfraction moléculaire 33.79; la valeur calculée pour la formule $C_4H_{14}O$ est 33.75.

L'acétate a été obtenu par l'action de l'anhydride

(*) Cette acétone devrait résulter de la distillation sèche de l'éthyléno-acétate calcique.

acétique, en présence d'acide sulfurique, sur l'alcool. C'est un liquide incolore, mobile, d'une agréable odeur.

Il bout à 171°-173°.

Son poids moléculaire, pris par cryoscopie dans l'acide acétique, est 151 ; la formule correspond à 156.

Ce corps renferme 38.07 °/₀ d'acide acétique, alors que la formule en demande 38.46.

§ 2. — Alcools tertiaires et leurs dérivés.

A. — Le diméthyl-triméthylène carbinol

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - \underset{\underset{OH}{|}}{C} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}.$$

Préparation : Ce composé a déjà été obtenu par l'action du méthyl-bromure de magnésium sur l'acétone méthyl-triméthylénique (*) ; je l'ai préparé par l'action du même réactif sur l'éthyléno-acétate d'éthyle. La réaction est conduite suivant le mode opératoire habituel ; cependant il faut éviter tout excès d'acide, lors de la neutralisation de l'hydroxyde de magnésium, provenant de la destruction par l'eau du produit d'addition magnésien.

En présence d'un excès d'acide, on obtient toujours l'alcool souillé de produits bromés, dont il est impossible de le séparer complètement par fractionnement.

Le rendement de l'opération en alcool tertiaire est de 85 °/₀ environ.

(*) N. Zelinsky, *Ouv. cité.*

Propriétés : c'est un liquide incolore, très peu mobile, à odeur camphrée.

Il bout à 124° sous la pression de 776 millimètres. Sa densité à 20° est 0.9335.

Sa densité de vapeur (méthode de Meyer) a été trouvée égale à 3.37; la densité calculée est 3.45.

Son indice de réfraction pour la raie D du sodium est 1.43232, valeur qui, combinée à la densité, indique comme pouvoir réfringent moléculaire 28.69, alors que cette constante calculée est 29.13.

Outre son mode de formation, les deux réactions caractéristiques suivantes nous prouvent à l'évidence sa véritable nature d'alcool tertiaire.

1. L'éthérification complète et rapide à froid, par les hydracides halogénés en solution aqueuse fumante.

L'alcool ajouté à ces réactifs s'y dissout un moment, puis la solution devient louche, et bientôt après l'éther formé vient surnager. Le liquide s'échauffe fortement. C'est, comme l'a montré M. L. Henry (*), la réaction caractéristique des alcools tertiaires.

2. Le chlorure d'acétyle fournit aussi l'éther chlorhydrique, à la manière ordinaire des alcools tertiaires.

J'ai préparé divers éthers de cet alcool tertiaire.

Le chlorure.

Cet éther a été obtenu par voie directe, par l'action de l'acide chlorhydrique en solution aqueuse fumante sur l'alcool diméthyl-triméthylénique. L'éther formé vient

(*) L. Henry, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1905, n° 12.

rapidement surnager à la solution acide. On le lave à l'eau, on le dessèche par quelques flacons d'anhydride phosphorique et l'on rectifie.

L'analyse du produit a fourni les chiffres suivants :

1° 0gr0987 de substance ont donné

0gr1187 de chlorure argentique.

2° 0gr0639 de substance ont donné

0.0767 de AgCl.

De ces chiffres on déduit la composition centésimale suivante :

	Cl %	
	trouvé.	calculé.
1.	29.78	29.96
2.	29.81	

C'est un corps d'odeur agréable, liquide, mobile, incolore. Il bout à 132°-133°, sans décomposition.

Sa densité à 20° est 0.9441.

Sa densité de vapeur, prise à l'appareil de Meyer, est 3.97; la densité calculée est 4.09.

Ce corps est insoluble dans l'eau, mais soluble dans l'éther, l'alcool, l'acide acétique, etc.

A la manière ordinaire des éthers haloïdes tertiaires, il précipite aisément avec les solutions argentiques.

Le bromure.

Ce composé a été obtenu comme le précédent par éthérification directe, au moyen de la solution aqueuse fumante d'acide bromhydrique.

La réaction est rapide et complète, le rendement pour ainsi dire intégral; il suffit d'une seule rectification après dessiccation sur l'anhydride phosphorique pour l'obtenir à l'état de pureté. Le dosage du brome dans ce composé a été effectué par précipitation directe, au moyen de solutions titrées de nitrate argentique.

La proportion centésimale trouvée par cette méthode est 48.69, alors que la formule correspond à 49.08.

C'est un liquide naturellement incolore, mais qui s'altère assez rapidement sous l'action de la lumière. Il a une odeur agréable et pénétrante.

Il bout sans décomposition à 152°-153° sous la pression de 766 millimètres.

Sa densité à 20° est 1.218.

Son poids moléculaire, pris par cryoscopie dans l'acide acétique, a été trouvé égal à 165.7; le poids moléculaire correspondant à la formule $C_6H_{11}Br$ est 163.

Le bromure du diméthyl-triméthylène carbinol ne présente pas de pouvoir additionnel vis-à-vis du brome. Il y a cependant décoloration rapide de ce réactif, mais avec dégagement simultané d'acide bromhydrique, ce qui annonce un phénomène de substitution. Il se forme dans ces conditions un dérivé bibromé sur la constitution duquel nous reviendrons plus loin. (Voir p. 1035.)

L'iodure.

Nous avons cherché d'abord à préparer cet éther par la méthode ordinaire, au moyen du phosphore rouge et de l'iode.

Les rendements étant loin d'être satisfaisants, nous nous sommes adressé alors à l'action de l'iodure de

sodium en solution dans l'alcool méthylique, sur les éthers chlorhydrique et bromhydrique. En employant le bromure, la réaction est des plus rapides : il suffit de chauffer quelques instants à reflux; les rendements sont presque intégraux.

L'addition d'eau à la solution alcoolique détermine la précipitation d'une huile jaunâtre, qui est l'éther formé; on la dessèche sur l'anhydride phosphorique et l'on rectifie dans le vide.

Un dosage d iode pratiqué dans ce composé par précipitation directe au moyen de la solution titrée de nitrate argentique a indiqué 60.72 °/₀ d'iode, alors que la formule $C_6H_{11}I$ correspond à 60.48 °/₀.

C'est un liquide incolore naturellement, mais brunissant rapidement à la lumière. Il bout à 113°-114°, sous la pression de 55 millimètres. L'ébullition à la pression ordinaire le décompose partiellement.

Sa densité à 20° est 1.338.

La cryoscopie dans l'acide acétique a fourni comme poids moléculaire 203, alors que la formule correspond à 210.

L'acétate.

J'avais cherché d'abord à obtenir cet éther acétique en décomposant le produit d'addition magnésien (éthyléno-acétate d'éthyle, plus bromure de méthyl-magnésium) par l'anhydride acétique en solution dans l'éther anhydre, mais le produit obtenu par cette voie était constitué presque uniquement par de l'éther bromhydrique (*).

(*) Ce produit, qui bout à 152°-153°, renferme 47.53 °/₀ de brome, alors que la formule du bromure correspond à 49.08 °/₀.

Je l'ai obtenu plus tard par l'action de l'anhydride acétique, en présence d'acide sulfurique, sur l'alcool diméthyl-triméthylénique. Je l'ai obtenu également, comme je le montrerai plus loin, par l'action de l'acétate potassique sur l'éther bromhydrique.

Ce dérivé acétique est un corps d'odeur très agréable, qui distille sans aucune décomposition à 159°-160° sous la pression ordinaire (*).

Sa densité à 20° est 0.9167.

Des déterminations cryoscopiques faites dans l'acide acétique ont annoncé comme poids moléculaire 146 et 148.7, alors que la formule de l'acétate correspond à 142.

Observations au sujet du diméthyl-triméthylène carbinol.

L'alcool diméthyl-triméthylénique est intéressant à divers titres. Il nous montre d'abord avec quelle facilité le triangle triméthylénique s'ouvre sous l'influence de certains réactifs.

C'est ainsi que M. Zelinsky (**), en traitant cet alcool par l'acide oxalique (***), a obtenu l'oxyde de tétraméthylène-biméthylé disymétrique, composé isomère du diméthyl-triméthylène carbinol; cet oxyde prend nais-

(*) Un dosage d'acide acétique dans ce produit a annoncé 41.90 % de ce corps, alors que la formule en demande 42.26.

(**) N. Zelinsky, *Berichte D. Chem. G.*, 34, 3887.

(***) Réaction instituée dans le but d'obtenir l'hydrocarbure éthylénique correspondant, par déshydratation directe.

sance au cours d'un processus successif d'hydratation et de déshydratation indiqué dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{c} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > CH - \underset{\underset{OH}{|}}{C} < \begin{array}{c} CH_3 \\ CH_3 \end{array} + HOH = CH_2OH - CH_2 - CH_2 - \underset{\underset{OH}{|}}{C} < \begin{array}{c} CH_3 \\ CH_3 \end{array}.$$

$$\underset{\underset{OH}{|}}{H_2C} - CH_2 - CH_2 - \underset{\underset{OH}{|}}{C} < \begin{array}{c} CH_3 \\ CH_3 \end{array} = \underbrace{H_2C - CH_2 - CH_2 - C}_{O} < \begin{array}{c} CH_3 \\ CH_3 \end{array} + H_2O.$$

Considéré au point de vue de ses relations avec le dérivé correspondant isopropylique, le diméthyl-isopropyl carbinol, cet alcool triméthylénique présente, soit en lui-même, soit dans ses dérivés, une stabilité beaucoup plus grande. Celle-ci se traduit très clairement par les faits suivants :

1° L'alcool, le diméthyl-triméthylène carbinol, traité par une quantité équimoléculaire d'anhydride acétique en présence d'une trace d'acide sulfurique concentré, donne naissance à l'acétate, à côté de très minimes quantités d'hydrocarbure. Au contraire, on sait avec quelle aisance l'anhydride acétique enlève au diméthyl-isopropyl carbinol les éléments de l'eau pour fournir un mélange de tétraméthyl-éthylène, celui-ci en proportion prépondérante, et de méthyl-isopropyl-éthylène (*).

2° La grande stabilité de cet alcool tertiaire se manifeste aussi très clairement dans la manière dont se comportent ses éthers haloïdes vis-à-vis des divers réactifs.

(*) L. Henry, *Bull. Association belge des chimistes* et *Comptes rendus*, t. CXLIV, p. 552.

Nous examinerons successivement :

1° L'action de la potasse caustique sèche ou en solution aqueuse concentrée;

2° L'action de la potasse caustique en solution alcoolique;

3° L'action de l'acétate potassique.

1. La potasse caustique sèche ou en solution aqueuse très concentrée n'a, à la pression ordinaire, aucune action sur les éthers chlorhydrique et bromhydrique de cet alcool. L'éther iodhydrique lui-même, chauffé à reflux pendant quelques heures avec ce réactif, n'est que partiellement décomposé pour fournir l'hydrocarbure éthylénique.

On connaît, d'autre part, la facilité avec laquelle les éthers haloïdes du diméthyl-isopropyl carbinol sont décomposés, pour fournir un mélange en proportions variables suivant les conditions, de deux hydrocarbures éthyléniques.

2. L'action de la potasse caustique en solution alcoolique est également bien différente pour les éthers haloïdes de ces deux alcools tertiaires.

Voici les faits en ce qui concerne les dérivés triméthyléniques :

Une solution alcoolique concentrée de 30 grammes de potasse caustique a été chauffée à reflux, avec 45 grammes de bromure du diméthyl-triméthylène carbinol. La caléfaction a duré deux heures. Un abondant précipité de bromure potassique indique la fin de la réaction. Le produit est alors entraîné par un courant de vapeur d'eau; le liquide qui distille se sépare en deux couches : j'ai recueilli de cette façon 26 grammes d'un corps moins dense que l'eau, très odorant, ne renfermant plus de

dérivé halogéné. Après plusieurs rectifications de ce produit, il en est résulté les deux portions que voici :

De 75 à 80°	13 grammes.
De 140 à 146°	10 »

La première portion est constituée d'un hydrocarbure sur le mode d'obtention et la nature duquel nous reviendrons plus loin. (Voir pp. 1046 et suiv.)

La rectification du produit passant entre 140° et 146° permet d'en fixer le point d'ébullition vers 144°-145°.

La densité de vapeur (méthode de Meyer) est 4.49, ce qui indique un poids moléculaire de 130.

La combustion a fourni les chiffres suivants :

0gr1293 de substance brûlée ont fourni
0gr3540 d'anhydride carbonique;
0gr1446 d'eau.

Ce qui, en proportions centésimales, correspond à :

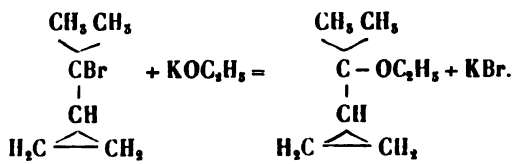
C °/o.	74.69
H °/o.	12.43

Ces chiffres, rapportés au poids moléculaire 130, indiquent la constitution représentée par la formule $C_8H_{16}O$, pour laquelle les proportions centésimales de C et d'H calculées sont :

C °/o.	75.00
H °/o.	12.50

La densité à 20° est 0.82493, ce qui, combiné à l'indice de réfraction 1.42481, indique comme pouvoir réfringent moléculaire 39.68, alors que cette constante calculée pour la formule $C_8H_{16}O$ est 38.51. Ce composé répond donc incontestablement à la formule $C_8H_{16}O$.

D'autre part, sous l'influence des hydracides halogénés en solution aqueuse fumante ou à l'état gazeux, il se transforme aisément en composé halogéné tertiaire. De même, sous l'influence du chlorure d'acétyle en présence d'une trace de chlorure de zinc, il se transforme en un dérivé chloré tertiaire. Dans les conditions ordinaires, le pentachlorure de phosphore ne l'attaque pas. D'après ces propriétés caractéristiques, on est autorisé à lui attribuer la formule d'un éther oxyde mixte, primaire tertiaire : l'oxyde d'éthyle et diméthyl-triméthylène. Il doit résulter de l'action de l'alcoolate de potassium sur le bromure diméthyl-triméthylénique. Le schéma de la réaction est le suivant :



Cependant, des considérations et des faits que nous exposerons plus loin ne nous permettent pas d'admettre définitivement pour ce composé la constitution exprimée par cette formule. (Voir pp. 1052 et suiv.)

La même réaction, appliquée aux éthers haloïdes du diméthyl-isopropyl-carbinol, fournit presque exclusivement les hydrocarbures éthyléniques.

Une opération effectuée sur 50 grammes de bromure ne m'a fourni, en dehors des hydrocarbures éthyléniques, que 3 à 4 grammes d'un produit dont le point d'ébullition est situé vers 120° et qui est peut-être l'éther oxyde mixte de l'alcool éthylique et de l'alcool diméthyl-isopropylique.

3. L'acétate potassique est également un réactif propre à différencier les éthers haloïdes de ces deux alcools tertiaires.

On connaît son action sur les éthers haloïdes diméthyl-isopropyliques; je décrirai plus loin son mode d'action sur les éthers diméthyl-triméthyléniques. (Voir p. 1043.)

L'action du brome sur le diméthyl-triméthylène carbinol est également intéressante. Je l'exposerai pour terminer l'étude comparative de ces deux alcools tertiaires.

L'addition du brome à cet alcool triméthylénique détermine, dès la température ordinaire, une réaction des plus violentes : le réactif est immédiatement décoloré. Il ne se dégage pas d'acide bromhydrique, mais bientôt on constate la formation d'une petite quantité d'eau qui surnage au dérivé bromé formé.

Au moyen de ces indications, on peut se rendre compte de la marche de la réaction : le brome agit d'abord comme substituant sur le chaînon $>CH$ tertiaire, voisin du chaînon alcool tertiaire; il se forme de l'acide bromhydrique, qui réagit immédiatement avec ce dernier pour former un dérivé bibromé bitertiaire.

L'expérience suivante semble concluante :

On a pesé sous l'eau 4 grammes de brome, on y a ajouté l'alcool tertiaire goutte à goutte, en agitant jusqu'à la décoloration complète. Les 4 grammes de brome ont absorbé ainsi $2^{gr}4$ d'alcool tertiaire, ce qui correspond assez exactement à la fixation d'une molécule de brome par une molécule d'alcool tertiaire.

Ce produit bromé, après dessiccation pendant deux jours sur l'acide sulfurique concentré dans le vide, a été analysé.

Il contenait 65.87 °/₀ de brome, alors que la proportion calculée pour la formule $C_6H_{10}Br_2$ est 66.07 (*).

Deux déterminations cryoscopiques ont indiqué comme poids moléculaire respectivement 249 et 251.3; la formule correspond à 262. Je ne suis pas parvenu à obtenir ce composé à l'état solide (**). A la distillation, même sous pression raréfiée, il se décompose.

Au point de vue du résultat final, l'action du brome sur les deux alcools tertiaires, diméthyl-isopropylique et diméthyl-triméthylénique, est donc identique; dans les deux cas, on obtient le dérivé bibromé bitertiaire.

Elle les différencie cependant nettement au point de vue de la marche du phénomène, puisque pour le dérivé isopropylique la réaction ne s'amorce que sous l'influence d'une température de 60° à 70° (***).

Observations au sujet de la constitution des éthers haloïdes et des composés qui en résultent.

Les éthers haloïdes de cet alcool dérivé du cyclopropane et les composés qui en résultent, sont doués de propriétés physiques, très différentes de celles que permettait de prévoir l'analogie avec les dérivés corres-

---

(*) Dosage fait par la méthode à la chaux. Voici le détail : 0gr1109 de substance ont fourni 0gr1703 de AgBr, ce qui correspond à 65.87 °/₀ de brome.

(**) Le bibromure du tétraméthyl-éthylène auquel il correspond est solide et fond à 140°. On devait s'attendre à ce que ce dérivé fût lui-même solide et eût même un point de fusion plus élevé. Il est possible que je ne l'aie pas obtenu à un degré de pureté suffisant.

(***) L. Henry, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1906, p. 424.

pondants isopropyliques. Nous les examinerons au point de vue de leur volatilité.

Ramenons ces composés triméthyléniques à l'alcool dont ils dérivent et comparons-les aux éthers haloïdes diméthyl-isopropyliques ramenés eux-mêmes à l'alcool qui leur donne naissance :

Série diméthyl isopropylique.				Série diméthyl-triméthylénique.		
Alcool	Éb.	116°	> - 4°	Alcool	124°	> 9°
Chlorure	»	112°		Chlorure	133°	
Alcool	»	116°	> 9°	Alcool	124°	> 28°
Bromure	»	125°		Bromure	152°	
Alcool	»	116°	> 25	Alcool	124°	> 46°
Iodure	»	141°		Iodure	170°	env.
Alcool	»	116°	> 0 envir.	Alcool	124°	> 20°
Éther oxyde (*)	»	116°		Éther	145°	

L'inspection de ce tableau nous montre clairement que les points d'ébullition des éthers haloïdes triméthyléniques et de l'éther oxyde qui en dérive, diffèrent notablement des points d'ébullition que leur assignait l'analogie. Si ces composés présentaient vis-à-vis du diméthyl-triméthylène carbinol les mêmes rapports de volatilité que les éthers du diméthyl-isopropyl-carbinol

(*) Cet éther oxyde n'a pas encore été obtenu; mais on sait que les points d'ébullition des composés de ce type sont très voisins de ceux de l'alcool tertiaire lui-même.

vis-à-vis de cet alcool, leurs points d'ébullition seraient donnés approximativement par les chiffres suivants :

Chlorure	124 — 4° = 120°
Bromure	124 + 9° = 133°
Iodure	124 + 25° = 149°
Éther	124 + 0° = 124°

D'autre part, cette remarque ne s'applique qu'aux éthers haloïdes et aux composés obtenus par l'intermédiaire de ceux-ci. Ceux qui ont été obtenus en partant de l'alcool ont des points d'ébullition normaux, ou du moins concordant bien mieux avec ceux qu'indique l'analogie. Nous ne pouvons citer que l'unique exemple de l'acétate obtenu par l'action directe de l'anhydride acétique sur l'alcool.

Série diméthyl-isopropylique.			Série diméthyl-triméthylénique.		
Alcool	116°	> 27°	Alcool	124°	> 35°
Acétate	143°		Acétate	159°	

Que conclure de ces faits? Les éthers haloïdes triméthyléniques correspondent-ils réellement à l'alcool diméthyl-triméthylénique ? N'y a-t-il pas eu une isomérisation haloïdique?

Comparons, au point de vue de ce phénomène, les éthers haloïdes du diméthyl-isopropyl-carbinol à ceux du diméthyl-triméthylène carbinol.

Partant de ce fait que, d'une façon générale, l'isomérisation ne s'effectue que pour autant que le groupe en migration passe d'un atome de carbone plus hydrogéné

à un atome de carbone moins hydrogéné, ce phénomène ne peut avoir lieu dans le cas des dérivés du diméthyl-isopropyl-carbinol.

D'ailleurs, si même il se produisait de manière à provoquer la migration du groupement halogéné, d'un des atomes de carbone tertiaire à l'autre carbone tertiaire voisin, il serait impossible de s'en rendre compte.

En effet, la molécule de ces dérivés diméthyl-isopropyliques, étant constituée de deux groupements « isopropyl » identiques :

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH. \;\Big|\; .HC < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 - \end{matrix}.$$

le produit de l'isomérisation serait nécessairement identique au produit initial.

Il n'en est plus de même pour les dérivés diméthyl-triméthyléniques. La molécule de ces corps n'est plus symétrique; elle est formée d'un groupement « isopropyl » et d'un groupement « triméthylène »

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - \;\Big|\; - HC < \begin{matrix} CH_2 \\ CH_2 - \end{matrix}.$$

Ceux-ci se différencient par la condensation et le tassement des atomes de carbone. L'isomérisation, dans ces dérivés, doit nécessairement donner naissance à des composés nouveaux.

Mais un pareil phénomène d'isomérisation est-il logiquement admissible?

La question qui se pose ici est donc la suivante : D'après les faits connus actuellement sur l'isomérisation

haloïdique, est-il logique d'admettre que les dérivés haloïdes du diméthyl-triméthylène carbinol :

$$\begin{array}{l} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > CH - \underset{\underset{X}{|}}{C} < \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array}$$

donnent naissance aux éthers haloïdes du type :

$$\begin{array}{l} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > \underset{\underset{X}{|}}{C} - \underset{\underset{H}{|}}{C} < \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 - \end{array}.$$

Cette question me semble devoir être résolue par l'affirmative.

L'examen des composés qui présentent ces phénomènes d'isomérisation et l'observation des conditions dans lesquelles ils se présentent, nous renseigneront à ce sujet. On sait que la migration du radical halogéné X ne s'effectue que dans le sens d'un atome de carbone plus hydrogéné à un atome de carbone moins hydrogéné, et que, dans ces conditions, elle s'effectue toujours.

On sait donc que cette modification se produit chaque fois que le radical X peut se porter sur un atome de carbone autour duquel la condensation du carbone sur lui-même est plus considérable.

J'ai fait observer plus haut que la condensation du carbone est plus considérable dans le groupe triméthylène $\begin{array}{l} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > CH -$ que dans le groupe isopropyle $\begin{array}{l} H_3C \\ H_3C \end{array} > CH -$.

Il en résulte donc que l'on peut logiquement admettre une isomérisation.

J'ai émis l'hypothèse de la transformation des éthers

haloïdes, du diméthyl-triméthylène carbinol, en composés du type :

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > \begin{matrix} C - C \\ | \quad\; | \\ X \quad H \end{matrix} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix},$$

pour expliquer la volatilité particulière de ces dérivés par rapport au corps qui leur avait donné naissance.

Mais cette manière de voir correspond-elle à la réalité des faits?

Les expériences suivantes sont aptes à trancher cette question :

1. La transformation de ces éthers haloïdes en alcool, par l'action de nitrate plombique ou argentique;

2. La préparation de l'éther oxyde primaire tertiaire, au moyen de l'alcool tertiaire et sans l'intermédiaire des éthers haloïdes;

3. La transformation des éthers haloïdes en acétate sous l'influence de l'acétate potassique ou argentique.

Ces expériences ont été réalisées; voici l'exposé des faits :

1. — *Transformation des éthers haloïdes en alcool.*

Je me suis adressé d'abord à l'action du nitrate plombique en solution aqueuse concentrée, sur l'éther bromhydrique. La réaction est des plus lentes et très incomplète ; après avoir chauffé à reflux pendant plusieurs heures, je n'ai obtenu qu'un faible précipité de bromure plombique.

L'action du nitrate d'argent est bien plus expéditive : 50 grammes de bromure diméthyl-triméthylénique ont

été traités par 55 grammes de nitrate argentique en solution dans 100 centimètres cubes d'eau. La précipitation du bromure d'argent est instantanée; on a chauffé à l'ébullition à reflux pendant quelques minutes. Par entraînement, au moyen d'un courant de vapeur d'eau, on a recueilli 17 grammes d'un produit moins dense que l'eau, très odorant, qui, à la distillation, passe presque totalement entre 70° et 85°; vers la fin, le thermomètre monte rapidement jusque vers 125°, où il reste un moment stationnaire.

La portion éb. 70° à 85° est constituée d'un hydrocarbure identique à celui qui a été obtenu par l'action de la potasse caustique alcoolique sur le bromure. Le produit passant vers 125° est probablement l'alcool tertiaire; je n'ai cependant pas pu l'identifier d'une façon assez précise.

Cette expérience n'étant en aucune façon concluante, je me suis adressé alors à

2. — *La préparation de l'éther oxyde* $C_8H_{16}O$ *en partant de l'alcool tertiaire.*

Cet éther a été obtenu en chauffant l'alcool tertiaire dissous dans trois fois son volume d'alcool, en tube scellé à 100° (*). La caléfaction dure deux heures.

A la distillation, le produit recueilli se sépare nettement en deux portions :

1. De l'hydrocarbure C_6H_{10} éb. 70°-85° avec un rendement de 38 à 40 °/₀.

(*) En présence d'une petite quantité d'acide sulfurique concentré.

2. Environ 55 °/₀ qui passent, dès les premières rectifications, à 140°-146°.

Cette partie s'est montrée identique dans toutes ses propriétés à l'éther oxyde obtenu dans l'action de la potasse caustique alcoolique sur le bromure.

Cette expérience, quoi qu'il en paraisse, ne peut être considérée comme concluante. En effet, il sera démontré plus loin que cet éther oxyde ne correspond pas à l'alcool tertiaire diméthyl-triméthylénique. (Voir pp. 1052 et suiv.)

3. — *Transformation de l'éther bromhydrique en acétate.*

On sait que les éthers à acides gras sont stables et ne présentent jamais ces phénomènes d'isomérisation; ils peuvent donc nous renseigner dans le cas actuel.

L'acétate a été obtenu par l'action de l'acétate potassique sur l'éther bromhydrique. Cette réaction ne se fait bien qu'à température élevée et sous pression. Voici le détail de l'expérience :

25 grammes d'éther bromhydrique ont été chauffés en tube scellé pendant six heures à 170°, avec un léger excès d'acétate de potassium sec. La réaction terminée, j'ai recueilli 19 grammes de produit ayant une odeur très prononcée d'acétate; après rectification, j'ai pu isoler 13 grammes d'acétate bouillant presque fixe à 159°-160° et de petites quantités d'hydrocarbure vers 75°-80°. L'éther acétique obtenu par cette voie présente des propriétés identiques en tous points à celles de l'acétate obtenu par l'action directe de l'anhydride acétique sur l'alcool.

On peut en conclure que le phénomène d'isomérisa-

tion, dont il a été question plus haut, ne s'est pas produit et que ces éthers haloïdes sont réellement du type

$$\begin{array}{l} H_2C \\ \quad | \\ H_2C \end{array} > CH - \begin{array}{c} C \\ | \\ X \end{array} < \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array}.$$

Les anomalies signalées dans les points d'ébullition des dérivés de l'alcool diméthyl-triméthylénique se présentent sous un autre aspect, lorsqu'on compare la série des composés triméthyléniques directement aux composés isopropyliques correspondants ; il semble alors que ce soit cet alcool tertiaire, de même que ses homologues supérieurs, qui ait un point d'ébullition anormal. Nous reviendrons sur cette question dans la seconde partie de ce travail.

Étude de l'hydrocarbure C_6H_{10} *produit de la déshydratation du diméthyl-triméthylène carbinol.*

Préparation. — Les procédés de préparation qui se présentaient naturellement pour l'obtention de ce corps étaient les suivants :

1. *Procédés basés sur la déshydratation directe de l'alcool.*

Voici les agents de déshydratation que l'on pouvait employer :

a) L'*anhydride acétique.* Ce réactif, dont on s'est servi avec succès dans le cas du diméthyl-isopropyl-carbinol, a fourni, comme je l'ai exposé plus haut, presque exclusivement l'acétate composé stable à la distillation.

L'*acide oxalique*, préconisé comme agent de déshydratation des alcools tertiaires (*), ne donne pas, dans le cas actuel, l'hydrocarbure C_6H_{10}, mais l'oxyde de tétraméthylène biméthylé (**).

L'action déshydratante de l'*acide sulfurique* a été mise en œuvre, mais on n'a opéré qu'avec la solution alcoolique du diméthyl-triméthylène carbinol. Il en est résulté un mélange d'éther oxyde en proportion prépondérante et de l'hydrocarbure C_6H_{10} se formant avec un rendement de 40 °/₀ environ.

Je me suis servi aussi d'un des déshydratants les plus énergiques, l'*anhydride phosphorique*. Dans un petit ballon à distillation fractionnée renfermant de l'anhydride phosphorique et relié à un réfrigérant, on laisse couler l'alcool goutte à goutte; le liquide distille, sans qu'il soit nécessaire de chauffer; il reste dans le ballon un résidu noir charbonneux.

La rectification du produit le sépare en trois parties : 45 °/₀ environ passant entre 70° et 85°, c'est l'hydrocarbure C_6H_{10}; 23 °/₀ d'alcool inaltéré passant vers 125°; enfin, un produit en minime quantité, passant à la distillation vers 145° et qui est probablement un produit de polymérisation de l'hydrocarbure C_6H_{10}.

Ces procédés de déshydratation directe ne donnant pas de résultats satisfaisants, nous les avons abandonnés pour utiliser l'action de *divers réactifs sur les éthers haloïdes de l'alcool tertiaire*.

(*) N. Zelinsky, *loc. cit.*

(**) Idem, *ibid.*

Le tétraméthyl-éthylène et son isomère le méthyl-isopropyl-éthylène s'obtiennent par l'action sur les éthers haloïdes du diméthyl-isopropyl-carbinol des agents que voici :

a) La chaleur;

b) L'acétate potassique;

c) La potasse caustique en solution aqueuse concentrée ou la potasse caustique solide en excès, l'un des deux hydrocarbures se formant en quantité prépondérante, suivant la nature du réactif.

Les éthers haloïdes ont été soumis à l'action de ces divers agents d'hydrolyse :

a) La *chaleur* n'a aucune action : le chlorure et le bromure distillent à la pression ordinaire sans décomposition. L'iodure lui-même ne se décompose que partiellement.

b) L'*acétate de potassium* donne naissance à l'acétate.

c) La caléfaction à reflux de ces éthers haloïdes sur la *potasse caustique aqueuse ou sèche* ne donne lieu qu'à une hydrolyse très partielle de ces composés. La réaction accomplie en tube scellé est plus complète.

Le bromure a été chauffé en tube scellé, avec un notable excès de potasse caustique sèche en poudre, à 170° pendant huit heures. On a obtenu ainsi un produit bouillant dès la première distillation, presque fixe à 77°; il restait une petite quantité de bromure inaltéré éb. 152°-153°.

Les rendements de cette opération en hydrocarbure sont de 72 %.

Une autre méthode d'obtention de cet hydrocarbure, c'est l'action de la *potasse caustique alcoolique* sur ces éthers haloïdes.

Cette réaction a déjà été décrite plus haut. Pour la préparation de l'hydrocarbure, elle est moins avantageuse que la précédente, car on n'obtient ce produit qu'avec des rendements de 57 °/₀ environ ; de plus, son point d'ébullition est beaucoup moins fixe, ce qui semble indiquer la présence d'un autre composé à point d'ébullition voisin, qui pourrait être un hydrocarbure isomère.

Propriétés : Cet hydrocarbure constitue un liquide incolore, d'odeur très prononcée. Il est insoluble dans l'eau, mais soluble dans les dissolvants organiques ordinaires. Sa densité liquide, prise à 20°, est 0.7375. Sous la pression de 758 millimètres de mercure, il bout à 77°, toute la colonne mercurielle du thermomètre dans la vapeur.

Sa densité de vapeur, déterminée selon la méthode de Meyer, a été trouvée égale à 2.87, la densité calculée étant 2.83. L'indice de réfraction pour la raie D du sodium à 20° est 1.45057.

L'analyse de ce produit a donné les chiffres suivants :

0gr1597 de substance brûlée ont fourni 0gr5122 d'anhydride carbonique ;

0gr1730 d'eau.

D'où l'on déduit :

	Trouvé °/₀.	Calculé °/₀.
C	87.49	87.81
H	12.04	12.20

Constitution de cet hydrocarbure.

Dans l'acte de la déshydratation du diméthyl-triméthylène carbinol, deux hydrocarbures éthyléniques peuvent prendre naissance. L'un, hydrocarbure éthylénique bitertiaire, a pour formule

$$\begin{array}{l} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > C = C < \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array}.$$

Il correspond au tétraméthyl-éthylène. L'autre, hydrocarbure éthylénique primaire tertiaire, est représenté par la formule

$$\begin{array}{l} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > \begin{array}{l} C - C \\ | \\ H \end{array} < \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_2 - \end{array}.$$

Voici les expériences réalisées dans le but de se rendre compte de la constitution de cet hydrocarbure :

1. *Addition de cet hydrocarbure à l'acide bromhydrique.* Le premier de ces composés pourrait, dans ces conditions, fournir deux bromures isomères, tous les deux tertiaires. Leur constitution serait exprimée par les formules

$$\begin{array}{l} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > \begin{array}{l} C - C \\ | \quad\; | \\ H \quad Br \end{array} < \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > \begin{array}{l} C - C \\ | \quad\; | \\ Br \; H \end{array} < \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array}.$$

Le second donnerait très probablement l'unique composé tertiaire, le bromure du diméthyl-triméthylène carbinol. Voici les faits :

10 grammes d'hydrocarbure éb. à 77° ont été saturés

par un courant d'acide bromhydrique gazeux. La réaction est très intense, le liquide s'échauffe fortement. La saturation étant complète, le produit est lavé à l'eau légèrement alcalinisée.

Je ne suis pas parvenu à identifier le bromure ainsi obtenu d'une façon certaine; à la distillation, il se sépare en un produit dont le point d'ébullition est situé vers 150°-155°; j'en ai recueilli 5 grammes, puis le thermomètre monte rapidement jusque 200° et il se dégage abondamment de l'acide bromhydrique.

Le produit éb. 150°-155° est un dérivé tertiaire; il précipite aisément avec le nitrate argentique. Un dosage de brome, fait par précipitation directe, indique 47.2 °/₀ de brome, alors que la formule correspond à 49.08.

Par son point d'ébullition, il semble se rapprocher de l'éther bromhydrique de l'alcool tertiaire, mais cette constatation ne peut suffire pour identifier l'hydrocarbure d'une façon complète.

Le produit éb. vers 200° est probablement un dérivé bibromé provenant de la fixation ultérieure de l'acide bromhydrique sur le triangle triméthylénique.

2. La *fixation du brome sur ce dérivé éthylenique* a renseigné sur sa constitution d'une façon claire et précise.

Ce réactif peut s'ajouter au dérivé éthylénique bitertiaire, soit pour former un dérivé bibromé, soit pour former un dérivé tétrabromé, s'il y a fixation de brome sur la chaîne triméthylénique.

En tout cas, un phénomène de substitution, avec dégagement d'acide bromhydrique, n'est pas à prévoir ici.

Quant au dérivé éthylénique primaire et tertiaire, il

peut aussi, en s'ajoutant au brome, former un dérivé bibromé ou un dérivé tétrabromé; mais il est bien probable que l'action du brome se portera aussi sur le groupe > CH - de la chaîne triméthylénique, de manière à former un dérivé tri- ou pentabromé, en dégageant de l'acide bromhydrique.

En fait, l'hydrocarbure, éb. 77°, absorbe rapidement le brome, mais il se dégage bientôt de l'acide bromhydrique.

On a réalisé l'expérience suivante :

6gr5 de brome pesés assez exactement sous l'eau ont été traités par l'hydrocarbure ajouté goutte à goutte. On agite fortement après chaque addition et on va jusqu'à décoloration complète du brome.

Il a fallu pour cela 1gr70 d'hydrocarbure; ceci correspond assez exactement à l'absorption de deux molécules de brome par une molécule d'hydrocarbure.

Le produit bromé ainsi obtenu a été lavé puis séché pendant quelques jours sur l'acide sulfurique dans le vide.

Deux dosages de brome ont été faits dans ce produit : ils ont indiqué 75.26 et 75.43 °/₀ (*) de cet élément; le

---

(*) Voici les chiffres de ces dosages exécutés par la méthode à la chaux :

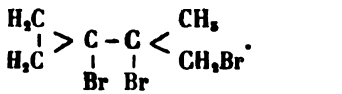
1. Poids de substance. . . .	0gr0987
— d'AgBr.	0gr1746
Br °/₀	75.26
2. Poids de substance. . . .	0gr1013
— d'AgBr.	0gr1796
Br °/₀	75.43

pourcentage calculé pour le dérivé tribromé $C_6H_9Br_3$ est 74.76.

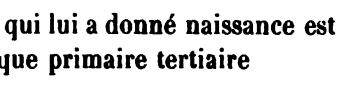
Il n'y a pas à douter de la nature de ce composé, si l'on songe que le dérivé bibromé renferme 66.66 °/₀ de brome et que le dérivé tétrabromé en renferme 80 °/₀.

Le poids moléculaire de ce composé bromé, pris par cryoscopie dans l'acide acétique, a été trouvé égal à 309 et à 307. Le poids du dérivé tribromé est 321, celui du dérivé bibromé 262, celui du dérivé tétrabromé 400.

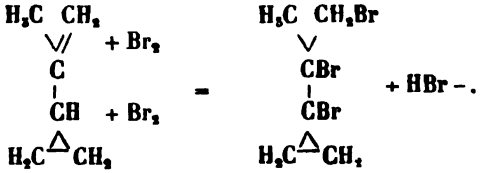
Il n'y a donc plus aucun doute à concevoir sur l'identité de ce composé bromé : il répond incontestablement à la formule



L'hydrocarbure qui lui a donné naissance est lui-même le dérivé éthylénique primaire tertiaire



Voici le schéma de l'action du brome sur ce composé :



Constitution de l'éther oxyde mixte primaire tertiaire $C_8H_{16}O$.

Les modes de préparation de ce corps : action de la potasse caustique alcoolique sur les éthers haloïdes de l'alcool tertiaire ou action de l'acide sulfurique sur sa solution alcoolique, devaient, semble-t-il, renseigner sur sa véritable nature. En effet, soit qu'il résulte du remplacement de l'atome d'halogène de l'éther haloïde par le radical - OC_2H_5 de l'alcoolate alcalin, ou qu'il provienne de l'élimination d'eau, aux dépens d'une molécule d'alcool éthylique et d'une molécule de diméthyl-triméthylène carbinol, on était en droit de lui attribuer la constitution représentée par la formule que voici :

$$\begin{array}{l} H_2C \\ | \\ H_2C \end{array} > CH - \underset{\underset{OC_2H_5}{|}}{C} < \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array}.$$

Cependant, la volatilité particulière (*) de ce corps vis-à-vis de l'alcool tertiaire dont il dérive, m'avait fait concevoir des doutes au sujet de sa constitution. J'ai reconnu plus tard que, sous l'influence des solutions fumantes d'hydracide halogéné, il se transforme en éthers haloïdes différents de ceux du diméthyl-triméthylène carbinol.

(*) Cet éther oxyde bout 20° plus haut que l'alcool tertiaire diméthyl-triméthylénique. On sait que les éthers oxydes de l'alcool éthylique et des alcools tertiaires ont un point d'ébullition très voisin de ces mêmes alcools tertiaires.

Ainsi traité par la solution fumante d'acide bromhydrique, on obtient aisément un éther bromhydrique, isomère de celui du diméthyl-triméthylène carbinol, mais s'en différenciant nettement par ses propriétés physiques.

C'est un corps naturellement incolore, mais s'altérant rapidement à la lumière; il bout à 174° à la pression ordinaire, mais en se décomposant. Sous la pression de 55 millimètres de mercure, il bout à 108°-110°. Sa densité à 20° est 1.1597.

La cryoscopie dans l'acide acétique a donné les résultats suivants :

Poids du dissolvant			15gr513
Substance. . .	0.2937	Abaissement. . .	0.41 P.M. = 174
» . . .	0.4879	» . . .	0.70 P.M. = 172

Le poids moléculaire correspondant à la formule $C_6H_{11}Br$ est 163.

Un dosage de brome par la méthode à la chaux a indiqué 48.47 °/₀ de cet élément (*).

Il en faudrait 49.08.

Ce bromure est donc isomère du bromure de diméthyl-triméthylène carbinol; c'est également un dérivé tertiaire, car il précipite aisément les solutions argentiques et plombiques.

(*) 0gr1309 de substance ont fourni 0gr1491 d'AgBr; cela correspond à 48.47 °/₀ de Br.

La seule formule qui puisse représenter sa constitution est donc la suivante :

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > \begin{matrix} C - C \\ | \quad\; | \\ Br \quad H \end{matrix} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

et l'éther oxyde qui lui a donné naissance doit être lui-même représenté comme suit :

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > \begin{matrix} C - CH \\ | \\ OC_2H_5 \end{matrix} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} \quad (*).$$

Mais comment cet éther oxyde a-t-il pu prendre naissance dans les circonstances rapportées plus haut ?

Considérant ces réactions uniquement dans leur point de départ et leur résultat, on pourrait croire qu'il s'est formé provisoirement l'éther oxyde de formule

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - \begin{matrix} C \\ | \\ OC_2H_5 \end{matrix} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

qui, par une transformation isomérique, a donné naissance à l'autre éther oxyde.

Une telle interprétation est inadmissible, si l'on songe

(*) J'avais cru pouvoir obtenir l'éther $\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - \begin{matrix} C \\ | \\ OC_2H_5 \end{matrix} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$ en faisant agir l'alcoolate de sodium en solution dans l'alcool anhydre sur l'éther chlorhydrique : je n'ai obtenu que de l'éther oxyde éb. 144°-145° et de l'hydrocarbure C_6H_{10}.

que ces éthers oxydes sont des composés stables, qui ne donnent pas lieu à de pareils phénomènes d'isomérisation. Mais la présence de ce composé dans les produits de l'action de la potasse caustique alcoolique sur l'éther bromhydrique, ou de l'acide sulfurique sur la solution alcoolique de l'alcool tertiaire, s'explique aisément par les considérations suivantes :

L'hydrolyse du bromure, ou la déshydratation de l'alcool, ne se font pas dans un seul sens pour donner uniquement de l'hydrocarbure éthylénique primaire tertiaire

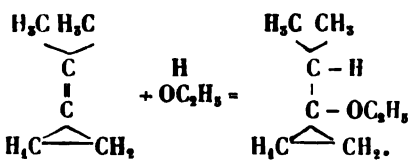
$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - C \leqslant \begin{matrix} CH_3 \\ CH_2 \end{matrix}$$

Ces réactions s'accomplissent aussi aux dépens du complexe bitertiaire $>CH\text{-}CBr<$ ou $>HC\text{-}COH<$ pour donner l'hydrocarbure éthylénique bitertiaire

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > C = C < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}.$$

Celui-ci, en se combinant avec une molécule d'alcool, fournit l'éther oxyde mixte : oxyde d'éthyle et d'éthyléno-isopropyle.

Cette réaction peut être représentée comme suit :



Il est aisé de se rendre compte des proportions rela-

tives des deux hydrocarbures qui prennent naissance dans ces réactions. Reprenons les chiffres indiqués plus haut au sujet de l'action de la potasse caustique alcoolique sur l'éther bromhydrique de l'alcool tertiaire.

45 grammes de ce produit ont donné 13 grammes d'hydrocarbure

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - C < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_2 \end{matrix}.$$

Celui-ci se forme donc avec un rendement de 57.5 °/₀.

De plus, il se forme 10 grammes d'éther oxyde, ce qui correspond à 6gr5 de l'hydrocarbure

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > C = C < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}.$$

Celui-ci se forme donc avec un rendement de 29 °/₀ environ.

Il n'est pas étonnant que l'éther bromhydrique, soumis aux réactifs alcalins dans des conditions différentes, fournisse des produits d'hydrolyse différents. Le même phénomène s'observe pour les dérivés diméthyl-isopropyliques.

L'action de la potasse caustique sèche sur ces éthers haloïdes donne comme produit principal le méthyl-isopropyl-éthylène, comme produit accessoire, le tétraméthyl-éthylène.

Je me suis efforcé plus haut de montrer la grande stabilité des composés diméthyl-triméthyléniques par rapport aux composés diméthyl-isopropyliques.

C'est encore à cette grande stabilité qu'il faut

rattacher la production exclusive du méthyl-triméthylène-éthylène

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - C < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

dans l'action de la potasse caustique sèche sur les éthers haloïdes diméthyl-triméthyléniques.

La potasse aqueuse et la potasse alcoolique, agissant sur les éthers haloïdes isopropyliques, fournissent les deux hydrocarbures dans des proportions inverses; le produit principal de cette action est le tétraméthyl-éthylène.

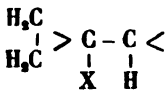
Dans le cas des dérivés triméthyléniques, les mêmes réactifs fournissent encore le carbure éthylénique primaire tertiaire en proportion prépondérante, il est vrai (57 %), mais à côté d'une notable proportion (29 %) d'hydrocarbure bitertiaire, sous la forme d'éther oxyde.

Toutes ces observations semblent donc s'accorder parfaitement. C'est un fait intéressant à constater que le groupement tertiaire $>CH-$ du noyau triméthylénique présente une telle stabilité que l'élimination de l'eau dans la molécule de l'alcool tertiaire, ou des hydracides halogénés dans la molécule des éthers haloïdes, ne se fait pas aux dépens du complexe $>HC - CX<$, mais bien aux dépens du groupement $>CX - CH_3$.

Il résulte de ces considérations que la voie la plus sûre pour arriver à l'hydrocarbure éthylénique bitertiaire

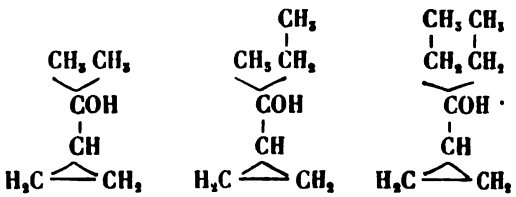
$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > C = C < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

est l'action des alcalis caustiques sur les éthers haloïdes du type



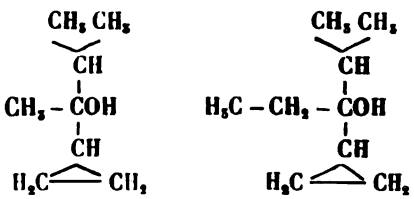
En effet, le composant >CX- tertiaire s'y trouve au contact d'un groupement >CH- identique en tous points à celui des dérivés diméthyl-isopropyliques.

Au point de vue de la manière dont se comportent ces alcools vis-à-vis des agents de déshydratation, il sera intéressant de comparer les trois dérivés :



Nous aurons l'occasion de les examiner à ce point de vue.

Il serait intéressant aussi de les comparer aux alcools tertiaires :



qui renferment le composant >COH alcool tertiaire.

enclavé entre deux chaînons $>CH$ différents par les groupements auxquels ils appartiennent :

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > \underline{CH} - \qquad \begin{matrix} H_3C \\ \\ H_3C \end{matrix} > \underline{CH} -$$

Il est probable que la déshydratation de ces alcools se ferait presque exclusivement aux dépens du groupement

$$> \underset{\underset{OH}{|}}{C} - \underset{\underset{H}{|}}{C} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}.$$

Ces composés s'obtiendraient d'ailleurs facilement par l'action des réactifs halo-magnésiens sur les acétones méthyl-éthyl- ou isopropyl-triméthyléniques.

B. — Le diéthyl-triméthylène carbinol

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - \underset{\underset{OH}{|}}{C} < \begin{matrix} CH_2 - CH_3 \\ CH_2 - CH_3 \end{matrix}.$$

Préparation : Cet alcool tertiaire prend naissance dans l'action de l'éthyl-bromure de magnésium sur l'éthylénoacétate d'éthyle.

La réaction est conduite suivant le mode opératoire habituel, mais pour éviter la production de dérivés halogénés, il y a lieu de prendre les mêmes précautions que pour le diméthyl-triméthylène carbinol.

Le rendement de l'opération est de 92 %.

Propriétés : C'est un liquide incolore, beaucoup moins mobile que l'eau, à odeur camphrée très prononcée. Il bout à 158°-159° sous la pression de 756 millimètres.

Sa densité à 20° est 0.9055.

Sa densité de vapeur prise par la méthode de Meyer a été trouvée égale à 4.55, alors que la densité calculée est 4.42.

L'indice de réfraction pris à 20° pour la raie D du sodium est 1.44638, ce qui, combiné à la densité, indique un pouvoir réfringent moléculaire de 37.78, alors que cette constante, calculée pour la formule $C_8H_{16}O$, est 38 345 (*).

De même que pour le composé biméthylé, la véritable nature d'alcool tertiaire de ce produit peut être prouvée par l'action qu'il subit de la part des solutions aqueuses fumantes d'hydracide halogéné et du chlorure d'acétyle.

Dans le premier cas, il y a éthérification rapide et complète pour former un éther haloïde tertiaire ; dans le second cas, on obtient à la manière ordinaire l'éther chlorhydrique.

Le chlorure.

Il a été obtenu par voie directe, par l'action des solutions aqueuses fumantes d'acide chlorhydrique.

C'est un corps d'odeur agréable, liquide, incolore, mobile.

A la pression ordinaire, il bout sans décomposition

(*) Voici les résultats de l'analyse de ce produit :

0gr1247 de substance brûlée par CuO ont donné { 0gr3451 CO_2 / 0gr1426 H_2O.

Ce qui correspond à { C 74.63 % / H 12.71 % } calculé { 74.99 % / 12.50 %.

entre 160°-166° sans que l'on puisse trouver un point fixe.

Sa densité à 20° est 0.9407.

Sa densité de vapeur, prise à l'appareil de Meyer, est 4.93; la densité calculée pour la formule $C_8H_{15}Cl$ est 5.06.

Un dosage de Cl a donné les résultats suivants :

0gr0873 de substance ont donné 0gr0845 de chlorure argentique, ce qui correspond à 23.95 °/₀ de Cl, alors que la formule en demande 24.23 °/₀.

Le bromure.

Il a également été obtenu par éthérification directe au moyen des solutions d'acide bromhydrique.

C'est un liquide incolore, mais s'altérant assez rapidement à la lumière.

Il bout sans décomposition à 186°-187° sous la pression de 756 millimètres de mercure.

Sa densité à 20° est 1.1479.

Son poids moléculaire pris par cryoscopie dans l'acide acétique a été trouvé égal à 179.8 et 181; le poids moléculaire correspondant à $C_8H_{16}Br$ est 191.

Les résultats obtenus dans un dosage de brome sont satisfaisants (*).

(*) 0gr0989 de substance ont donné 0gr0964 de AgBr, ce qui correspond à 41.36 °/₀ de brome, alors que la proportion calculée est 41.88 °/₀.

L'iodure.

L'iodure a été obtenu par l'action de l'iodure de sodium en solution dans l'alcool méthylique sur le bromure.

C'est un liquide brunissant rapidement à la lumière. Il se décompose par ébullition à la pression ordinaire. Il bout à 152° sous la pression de 55 millimètres.

Sa densité liquide à 20° est 1.3357.

Sa cryoscopie dans l'acide acétique a indiqué comme poids moléculaire 223, alors que la formule $C_8H_{15}I$ correspond à 238.

Cet iodure est insoluble dans l'eau, mais l'alcool et l'éther le dissolvent aisément, comme ses correspondants chlorhydrique et bromhydrique.

L'hydrocarbure C_8H_{14} *et l'éther oxyde* $C_{10}H_{20}O$.

L'action que l'anhydride acétique exerce sur le diéthyl-triméthylène carbinol est bien différente de celle qu'il exerce sur le diméthyl-triméthylène carbinol. 15 grammes de l'alcool diéthyl-triméthylénique ont été soumis à l'action d'une quantité équimoléculaire d'anhydride acétique en présence d'un peu d'acide sulfurique. La réaction terminée, le produit a été lavé à l'eau alcalinisée, puis séché et soumis à la distillation. On a obtenu ainsi 7 grammes d'un corps passant à 129°-130°, puis le thermomètre monte rapidement jusque vers 190° à 200°, où il passe quelques gouttes d'un composé à odeur éthérée très prononcée ; vers la fin, il y a décomposition. Il reste dans le ballon un résidu charbonneux noir.

L'action de l'anhydride acétique sur cet alcool fournit ainsi, à côté de petites quantités d'un éther acétique, un hydrocarbure C_8H_{14}, dont le point d'ébullition est situé à 129°-130°.

L'action de la potasse caustique alcoolique sur le bromure est également différente de celle qu'elle exerce sur le bromure diméthyl-triméthylénique.

L'addition du bromure diéthyl-triméthylénique à la solution alcoolique de potasse caustique détermine, avec un échauffement considérable, la précipitation immédiate de bromure potassique. Il suffit de chauffer à reflux quelques minutes pour terminer la réaction.

On avait mis en œuvre 32 grammes de bromure; à la rectification, on a pu séparer les deux portions que voici :

De 129° - 131°	15 grammes
De 176° - 178°	4 »

La densité de vapeur de ce dernier produit, prise par la méthode de Meyer, a été trouvée égale à 5.56; la densité qui correspond à la formule $C_{10}H_{20}O$ d'un éther oxyde mixte primaire tertiaire est 5.39.

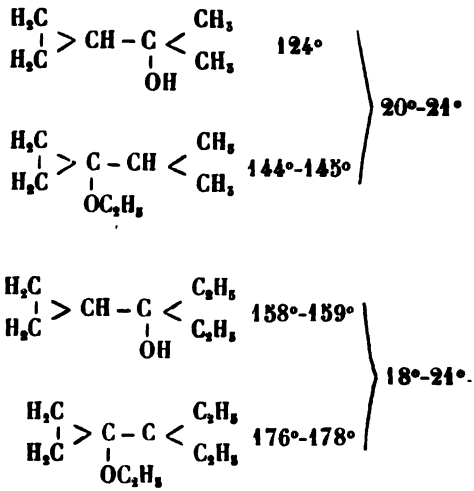
Sa densité à 20° est 0.8130.

Par analogie avec ce qui se passe dans le cas des dérivés diméthyl-triméthyléniques, nous pouvons admettre que la constitution de ce corps est exprimée par la formule

$$\begin{array}{l} H_3C \\ | \\ H_2C \end{array} > \begin{array}{c} C - CH \\ | \\ OC_2H_5 \end{array} < \begin{array}{l} CH_2 - CH_3 \\ CH_2 - CH_3 - \end{array}$$

Il y a entre les points d'ébullition de cet éther et

de l'alcool qui lui correspond les mêmes écarts qu'à l'étage C_6.



Quant au produit dont le point d'ébullition est situé à 129°-130° et qui prend naissance dans l'action de l'anhydride acétique sur l'alcool et dans l'action de la potasse caustique alcoolique sur le bromure, c'est, comme l'a montré l'analyse (*), un hydrocarbure de la formule C_8H_{14}.

Sa densité de vapeur (méthode de Meyer) trouvée est 3.92; la densité calculée est 3.8. Par analogie avec les dérivés diméthyl-triméthyléniques, on peut lui attri-

(*) On y a trouvé 86.88 °/o de carbone et 12.92 °/o d'hydrogène; les proportions calculées de ces éléments sont respectivement 87.28 °/o et 12.73 °/o.

buer la formule d'un hydrocarbure éthylénique secondaire tertiaire :

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - C < \begin{matrix} CH_3 - CH_3 \\ CH - CH_3 \end{matrix}.$$

Sa densité liquide à 20° est 0.7644. Son indice de réfraction, pris à 20° pour la raie D du sodium, est 1.45841.

La différence dans la facilité d'obtention des deux dérivés éthyléniques C_6H_{10} et C_8H_{14} est en rapport avec la différence de stabilité des deux groupements - CH_3 et > CH_2.

Pour les dérivés diméthyl-triméthyléniques, nous l'avons montré, le chaînon > CH du noyau triméthylénique prend une part moins grande à l'élimination de l'eau ou de l'hydracide halogéné que le chaînon - CH_3 du groupement - $C < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$.

Or, dans les composés diéthyl-triméthyléniques, le groupement stable tertiaire est mis en concurrence avec un groupement > CH_2 secondaire; il en résulte, et on le constate aisément, que la déshydratation doit se faire plus facilement et, par conséquent, presque uniquement aux dépens du complexe

$$\begin{matrix} - C - CH_2 - CH_3. \\ X \end{matrix}$$

Reprenant les chiffres donnés à propos de l'action de la potasse caustique alcoolique sur le bromure, nous voyons que l'hydrocarbure éthylénique secondaire tertiaire

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - C < \begin{matrix} CH_2 - CH_3 \\ CH - CH_3 \end{matrix}$$

se forme avec un rendement de 83 °/₀ et que l'hydrocarbure éthylénique bitertiaire

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > C = C < \begin{matrix} CH_2 - CH_3 \\ CH_2 - CH_3 \end{matrix}$$

sous forme de sa combinaison avec une molécule d'alcool ne se forme plus qu'avec un rendement de 15 °/₀ environ.

Dans le cas des dérivés biméthylés, les pourcentages étaient respectivement : 57 pour le dérivé primaire tertiaire et 29 pour le dérivé bitertiaire.

C. — Le méthyl-éthyl-triméthylène carbinol.

Préparation : Ce composé résulte soit de l'action du méthyl-bromure de magnésium sur l'éthyl-triméthylène cétone, soit de l'action de l'éthyl-bromure de magnésium sur la méthyl-triméthylène cétone.

Les rendements sont très avantageux.

Propriétés : C'est un corps liquide visqueux, très odorant. Il bout, sous la pression de 761 millimètres, à 141°-142°.

Sa densité de vapeur (méthode de Meyer) a été trouvée égale à 4.01 ; la densité calculée pour la formule $C_7H_{14}O$ est 3.93.

Sa densité liquide à 20° est 0.90119. Son indice de réfraction étant 1.44135, on trouve comme pouvoir réfringent moléculaire 33.28, alors que cette constante calculée est 33.73.

Comme les alcools diméthyl- et diéthyl-triméthyléniques, il réagit intensément avec le brome.

Les éthers haloïdes ont été obtenus de la même façon que ceux des deux alcools tertiaires.

Le chlorure.

C'est un liquide mobile incolore qui, à la pression ordinaire, distille sans décomposition à la température de 150°-153°.

Sa densité à 20° est 0.9391.

Sa densité de vapeur, prise à l'appareil de Meyer, est 4.65; la densité calculée pour la formule $C_7H_{13}Cl$ est 4.58.

Un dosage de Cl a indiqué dans ce composé 26.43 °/₀ de cet élément, alors que la théorie en demande 26.79 °/₀.

Comme tous les éthers haloïdes tertiaires, il précipite aisément les solutions argentiques.

Le bromure.

C'est un liquide s'altérant rapidement, qui bout à 167°-168° sous la pression de 766 millimètres.

Sa densité liquide à 20° est 1.1938.

Son poids moléculaire pris par cryoscopie a été trouvé égal à 176.5; le poids moléculaire correspondant à la formule $C_7H_{13}Br$ est 177 (*).

(*) 0gr0873 de ce produit ont donné 0gr0919 de bromure d'argent, ce qui correspond à 44.83 °/₀ de brome. Il faudrait 45.2 °/₀ d'après la formule $C_7H_{13}Br$.

L'iodure.

Cet éther a été obtenu de la même manière que les deux iodures tertiaires déjà décrits, par l'action de l'iodure de sodium, en solution dans l'alcool méthylique, sur le bromure.

Il présente des propriétés analogues aux autres éthers du même genre déjà décrits. Il bout à 128°-130° sous la pression de 55 millimètres de mercure.

Sa densité à 20° est 1.3499.

Son poids moléculaire (cryoscopie dans l'acide acétique) a été trouvé égal à 216; le poids correspondant à la formule $C_7H_{13}I$ est 224.

L'hydrocarbure C_7H_{12}.

Dans l'action de l'anhydride acétique sur l'alcool, on obtient l'hydrocarbure C_7H_{12}, mélangé à de minimes quantités d'acétate, qui se décompose partiellement à la distillation. L'hydrocarbure C_7H_{12} a également été obtenu en chauffant le bromure avec la potasse caustique sèche en tube scellé à 170° pendant deux heures.

C'est un liquide volatil, d'odeur et d'aspect analogues aux composés C_6H_{10} et C_8H_{14} auxquels il est intermédiaire. Il bout à 107°-109° sous la pression de 764 millimètres.

Sa densité liquide à 20° est 0.7743.

Sa densité de vapeur (méthode de Meyer) a été trouvée égale à 3.23; la densité calculée est 3.31.

L'indice de réfraction à 20° pour la raie D du sodium est 1.44476.

Par analogie avec les dérivés précédents, on peut lui assigner la formule

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - C < \begin{matrix} CH_3 \\ \\ CH - CH_3 - \end{matrix} \text{ (*)}.$$

Nous n'avons pas eu l'occasion d'étudier l'action de la potasse caustique alcoolique sur le bromure.

CHAPITRE II

Après avoir étudié dans le chapitre précédent un certain nombre de composés triméthyléniques, et après avoir comparé, au point de vue de leurs propriétés chimiques, les plus importants d'entre eux avec les composés isopropyliques correspondants, je me suis proposé, dans cette seconde partie, de comparer ces mêmes dérivés au point de vue de leurs propriétés physiques.

Il sera possible ainsi de se rendre compte de l'influence exercée sur ces propriétés par la transformation de la chaîne isopropylique en chaîne cyclique triméthylénique, et cela dans un certain nombre de classes composées (**).

(*) La combustion a fourni les chiffres que voici :

0gr1303 de substance brûlée ont donné 0gr4165 d'anhydride carbonique et 0gr1481 d'eau.

Cela correspond à C °/o 87.21 et H °/o 12.63.

Il faudrait C °/o 87.50 et H °/o 12.48.

(**) Cette étude comparative a été faite pour les dérivés isobutyliques et éthyléno-éthyliques d'une part, pour les dérivés isobutyriques et éthyléno-acétiques, d'autre part.

Voir le mémoire de P. Dalle, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1902, n° 1.

Je me suis efforcé aussi de comparer ces composés triméthyléniques à leurs isomères, les composés allyliques correspondants.

1. — Volatilité.

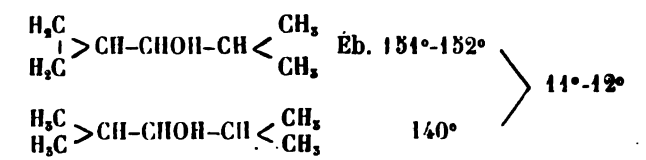
A. — Composés triméthyléniques et isopropyliques.

Acétones :

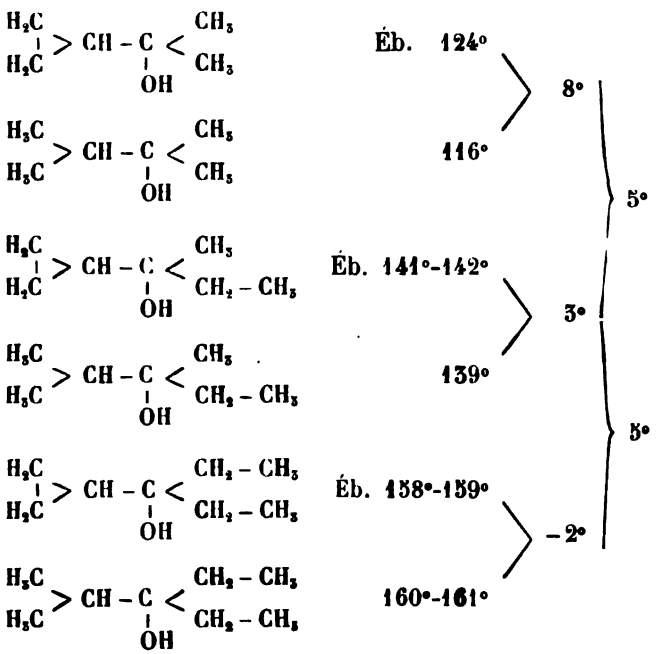
$\begin{matrix} H_2C \\ \vert \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH_3$	Éb.	114°	20°
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - CO - CH_3$		94°	
$\begin{matrix} H_2C \\ \vert \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH_2 - CH_3$	Éb.	133°	19°
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - CO - CH_2 - CH_3$		114°	
$\begin{matrix} H_2C \\ \vert \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$	Éb.	140°	16°
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - CO - CH < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$		124°	

Alcools secondaires :

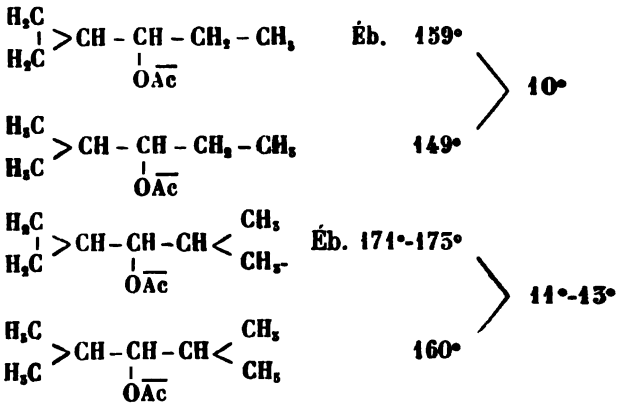
$\begin{matrix} H_2C \\ \vert \\ H_2C \end{matrix} > CH - CHOH - CH_2 - CH_3$	Éb.	140°	13°
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - CHOH - CH_2 - CH_3$		127°	



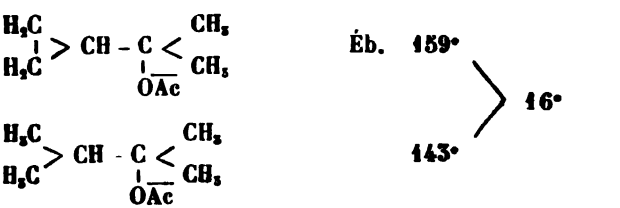
Alcools tertiaires :



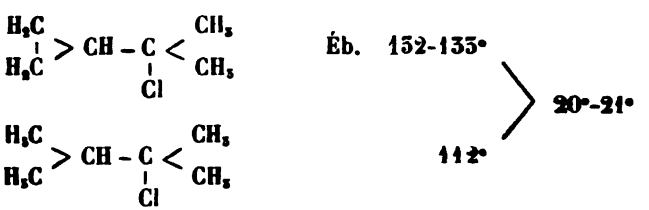
Acétates des alcools secondaires :



Acétates des alcools tertiaires :



Éthers haloïdes des alcools tertiaires :



$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - \underset{Br}{C} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - \underset{Br}{C} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

Éb. 152-153°

125°

27°-28°

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - \underset{I}{C} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - \underset{I}{C} < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$$

Éb. vers 165°-170° (*)

140°-142° (**)

25°-28°

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - \underset{Cl}{C} < \begin{matrix} CH_3 \\ C_2H_5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - \underset{Cl}{C} < \begin{matrix} CH_3 \\ C_2H_5 \end{matrix}$$

Éb. 150°-153°

137°

13°-16°

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - \underset{Cl}{C} < \begin{matrix} CH_2 - CH_3 \\ CH_2 - CH_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - \underset{Cl}{C} < \begin{matrix} CH_2 - CH_3 \\ CH_2 - CH_3 \end{matrix}$$

Éb. vers 165°

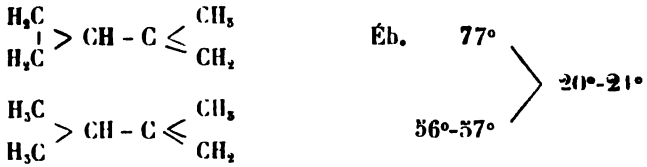
150°-155°

10°-15°

(*) Température d'ébullition ramenée à la pression ordinaire.

(**) *Dictionnaire de chimie* de WURTZ, 2d supplément, p. 127.

Hydrocarbures :



Les autres dérivés isopropyliques sont encore inconnus; il est regrettable surtout que les hydrocarbures C_7H_{14} et C_8H_{16}, composés isopropyliques correspondant à C_7H_{12} et C_8H_{14}, n'aient pas encore été décrits.

De même les éthers oxydes de la série isopropylique n'ont pas encore été mis au jour.

Conclusion : On peut dire d'une façon générale que la transformation de la chaîne ramifiée isopropylique en chaîne fermée triméthylénique s'accompagne d'une notable élévation dans le point d'ébullition. L'élimination de deux atomes d'hydrogène des composés isopropyliques en diminue considérablement la volatilité.

Il n'est pas possible d'établir une règle générale au moyen des données précédentes, mais en particulier pour les diverses classes de composés nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

Dans les acétones, la transformation de la ramure isopropylique en cycle triméthylénique élève le point d'ébullition de 20° dans le premier terme, la méthyl-triméthylène-cétone; cette influence s'affaiblit à mesure que le poids moléculaire augmente : la différence n'est plus que de 16° pour les composés en C_7.

Quant aux alcools secondaires, nous n'avons eu l'occa-

sion que d'en étudier deux : ils sont moins influencés par cette transformation; entre les composés en C_6, il y a 13° d'écart, 11° à 12° entre les composés en C_7. Des différences analogues existent pour les éthers acétiques de ces alcools.

En ce qui concerne les alcools tertiaires, cette influence ne se fait plus guère sentir que dans le premier terme, le composé en C_6. Les composés plus carbonés ont un point d'ébullition très voisin de celui des composés isopropyliques.

Ce fait est exceptionnel et il ne se rencontre que dans la série des alcools tertiaires : leurs éthers haloïdes et acétiques sont beaucoup moins volatils que les composés à chaîne ouverte correspondants : la différence de 20° à 25° dans les premiers termes tombe à 10° et à 15° pour les dérivés plus carbonés. Entre les points d'ébullition des deux hydrocarbures C_6H_{12} et C_6H_{10}, la différence est de 20°.

En résumé, on peut dire que l'influence de cette transformation se fait surtout sentir dans les composés à fonction chimique peu prononcée, tels que les acétones et hydrocarbures; cette influence diminue notablement et devient même nulle dans les composés à fonction chimique bien plus prononcée, tels que les alcools secondaires, mais surtout les alcools tertiaires, dont les affinités sont si développées vis-à-vis d'un grand nombre d'agents chimiques.

On peut ajouter que cette influence diminue toujours avec le degré de carburation (*).

(*) Dans le mémoire de M. P. Dalle, *Sur le triméthylène carbinol* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, n° 1, 1902), on trouve, au sujet des relations de volatilité entre les composés cycliques triméthylé-

B. — Composés triméthyléniques et allyliques.

$\begin{matrix} H_2C \\ \vert \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH_2 - CH_3$	Éb.	133°	3°-5°
$H_2C = CH - CH_2 - CH_2 - CO - CH_3$		128°-130°	
$\begin{matrix} H_2C \\ \vert \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$	Éb	140°	7°
$H_2C = CH - CH_2 - CO - CH < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$		133°	

---

niques et les composés à chaîne ouverte ramifiée, la note suivante :

1. La transformation de la chaîne ramifiée ouverte en chaîne fermée du système $\begin{matrix} H_2C \\ \vert \\ H_2C \end{matrix} > CH -$ a pour conséquence une élévation notable dans le point d'ébullition.

2. L'importance de cette élévation est en rapport avec le degré de substitution qu'a subi le chaînon CH_2 commun aux dérivés à chaîne ouverte et à chaîne fermée [1].

a. Elle est de 18° à 20° environ pour les dérivés monosubstitués.

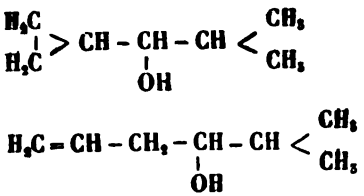
b. Elle est de 27° à 28° pour les dérivés trisubstitués.

Je n'ai pas eu à ma disposition des dérivés monosubstitués nouveaux du méthyl-triméthylène. Je n'ai étudié que les dérivés bi- et trisubstitués de cet hydrocarbure.

Pour aucun de ceux-ci, on peut s'en rendre compte par les chiffres indiqués plus haut, les écarts ne sont aussi considérables.

La règle énoncée par M. Dalle, au sujet des relations de volatilité entre des composés triméthyléniques et les composés saturés correspondants, est beaucoup trop générale; si elle s'applique aux dérivés en C_4, on le voit, elle ne s'applique plus aux dérivés plus carbonés.

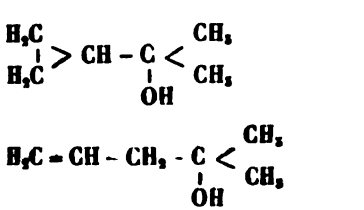
(1) L'auteur ramène tous les composés qu'il a étudiés au méthyl-triméthylène.



Éb. 151°-152°

139°

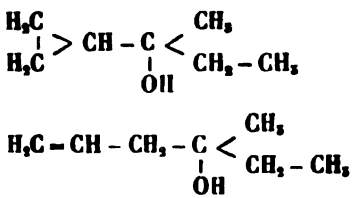
12°-13°



Éb. 124°

119°5

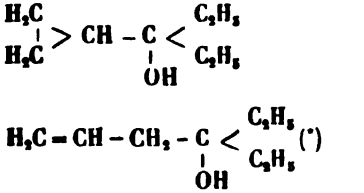
4°5



Éb. 141°-142°

139°

2°-5°



Éb. 158°-159°

156°

2°-3°

(*) Il est intéressant de mettre en regard des points d'ébullition de ces alcools tertiaires non saturés ceux des composés analogues isopropyliques. On verra que les relations de volatilité entre ces deux

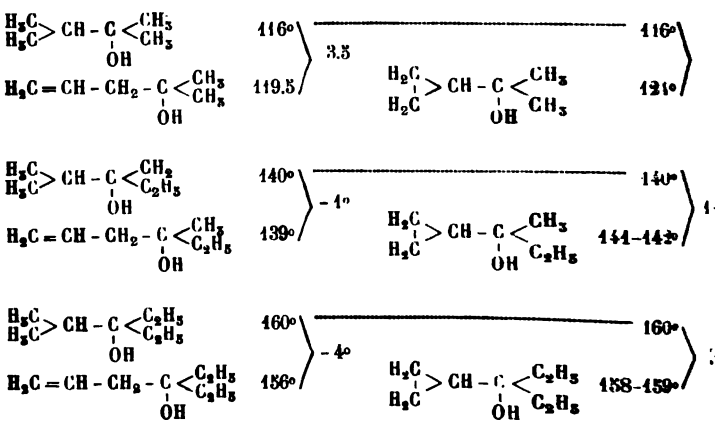
Ces quelques exemples montrent nettement que la transformation des composés non saturés allyliques en leurs isomères cycliques triméthyléniques ne modifie que très peu le point d'ébullition. L'influence sur la volatilité de ces composés, de la condensation, du tassement du carbone, qui s'effectue dans ces transformations, n'est donc que très minime.

2. — Densité à l'état liquide.

Nous examinerons comparativement les trois classes de composés isopropyliques, triméthyléniques et allyliques.

---

classes de composés sont très analogues à celles qui existent entre les mêmes composés isopropyliques et triméthyléniques.



On le voit, l'analogie est complète.

Les densités des composés triméthyléniques ont été déterminées à 20° et, par rapport à l'eau, à la même température.

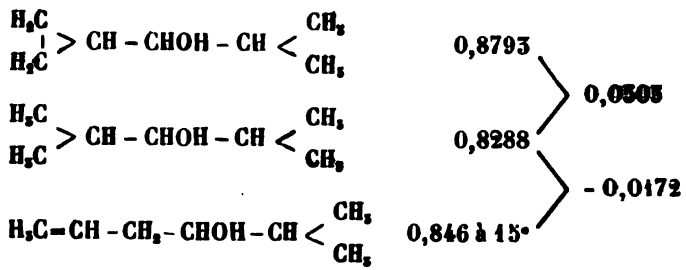
Acétones :

$\begin{matrix} H_2C \\ \vert \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH_2 - CH_3$	Éb.	0,9121	0,0981
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - CO - CH_2 - CH_3$		0,814 à 18°	0,0200
$H_2C = CH - CH_2 - CH_2 - CO - CH_3$ (*)		0,834	
$\begin{matrix} H_2C \\ \vert \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$		0,8976	0,0914
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - CO - CH < \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}$		0,8062	

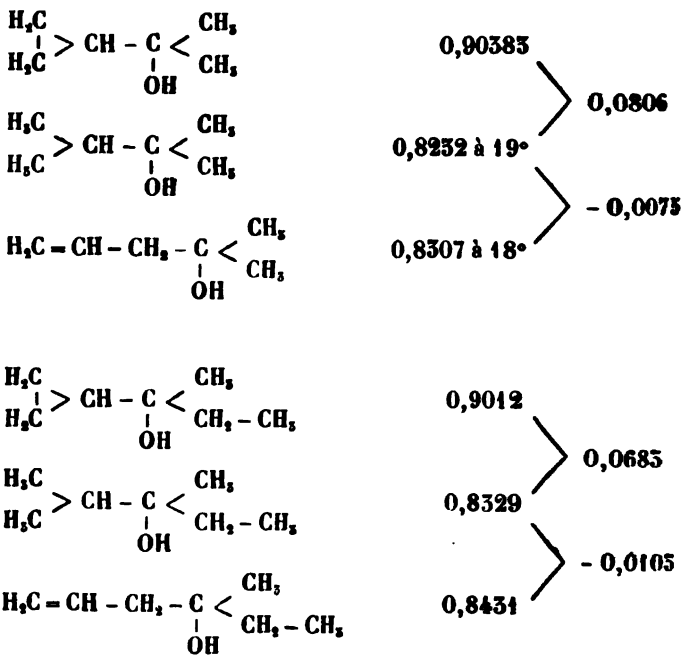
Alcools secondaires :

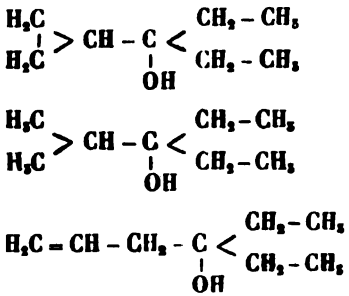
$\begin{matrix} H_2C \\ \vert \\ H_2C \end{matrix} > CH - CHOH - CH_2 - CH_3$	0,8871	0,0628
$\begin{matrix} H_3C \\ H_3C \end{matrix} > CH - CHOH - CH_2 - CH_3$	0,8243	- 0,0187
$H_2C = CH - CH_2 - CHOH - CH_2 - CH_3$	0,8430 à 18°	

(*) Ce dérivé ne correspond pas aux autres, il leur est isomère.



Alcools tertiaires :





0,9055

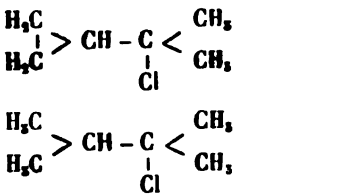
0,0760

0,8295

0,0416

0,8711 à 20 °/₀

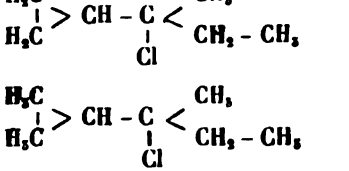
Éthers haloïdes et acétiques :



0,9440

0,0660

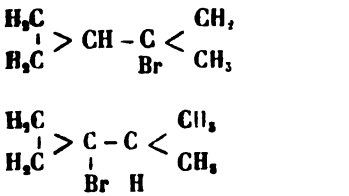
0,8784 à 19°



0,9391

0,0551

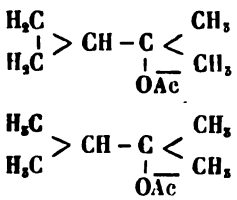
0,8840 à 22°



1,2431

0,0834

1,1597



0°91604

0°9226

La seule inspection de ces quelques chiffres montre que la transformation des composés renfermant la chaîne isopropylique en composés renfermant le noyau triméthylénique, s'accompagne d'une notable augmentation du poids spécifique de ces composés. Comme on pouvait le prévoir, on constate que la densité des composés allyliques est intermédiaire entre celle des composés isopropyliques et des composés triméthyléniques corespondants.

APPENDICE.

Nouvelle méthode de préparation des composés cycliques triméthyléniques.

Au cours de ces recherches, j'ai eu l'occasion de constater une réaction intéressante donnant naissance aux cétones cycliques triméthyléniques.

Le point de départ est le nitrile γ bromobutyrique. Celui-ci a été obtenu par l'action de cyanure de potassium (1 molécule) sur le bibromure de triméthylène (1 molécule). Les rendements de cette opération ne sont guère avantageux, il se forme beaucoup de nitrite glutarique.

Voici l'expérience réalisée, pour passer en une seule

opération de ce nitrile aux acétones cycliques triméthyléniques :

37 grammes de nitrile bromobutyrique (soit $^1/_4$ de molécule) ont été mis en réaction avec une solution d'éthyl-bromure de magnésium provenant de 12 grammes de ce métal ($^1/_2$ molécule).

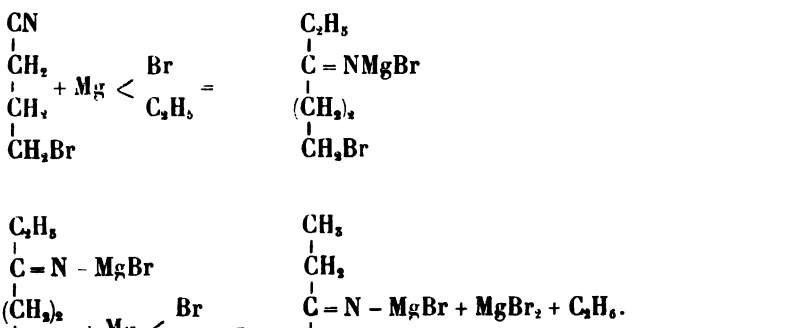
La réaction est assez violente; vers la fin de l'opération, le liquide se sépare en deux couches.

Après décomposition par l'eau, on a recueilli 26 gr. de produit qui, à la distillation, se sépare ainsi :

130° - 135°	12 grammes.
161° - 166°	5 »

Vers 200°, quelques gouttes d'un composé halogéné.

Le premier produit éb. 130°-135° est l'acétone éthyltriméthylénique identifiée par ses propriétés physiques; elle prend naissance par le processus suivant :



Ce produit, lors de la décomposition par l'eau, fournit l'éthyl-triméthylène cétone

$$\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - CO - CH_2 - CH_3.$$

Le produit éb. 161°-166° est l'éthyl-amyl-cétone et résulte de la synthèse suivante :

$$\begin{matrix} CN \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2Br \end{matrix} \quad \begin{matrix} Mg < \begin{matrix} Br \\ C_2H_5 \end{matrix} \\ + \\ Mg < \begin{matrix} Br \\ C_2H_5 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ C = N - MgBr \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ C_2H_5 \end{matrix} + MgBr_2.$$

Enfin, le produit supérieur est constitué très probablement d'acétone-éthyl- γ bromopropylique.

Il est à prévoir que le nitrile butyrique γ chloré se comportera d'une façon analogue vis-à-vis des réactifs halomagnésiens.

Il sera intéressant aussi de soumettre les acétones propyliques γ halogénées à cette action : ce que l'on sait de l'action des alcalis caustiques sur ces dérivés autorise à penser que l'on obtiendrait ainsi aisément les alcools tertiaires triméthyléniques.

—

Préparation du chlorobromure et du bibromure de triméthylène; par Pierre Bruylants, docteur en sciences.

Le chlorobromure de triméthylène $CH_2Cl\text{-}CH_2\text{-}CH_2Br$ constitue le point de départ ultime des composés cycliques triméthyléniques que nous avons décrits dans le travail précédent (*).

Sa préparation revient à fixer une molécule d'acide bromhydrique HBr sur la molécule du chlorure d'allyle, ou inversement à fixer une molécule d'acide chlorhydrique sur la molécule de bromure d'allyle. Ce que l'on sait de la facilité relative de fixation des hydracides halogénés sur les composés à soudure éthylénique fait choisir unanimement la première méthode.

Le bibromure de triméthylène constitue le point de départ le plus important des composés triméthyléniques, à chaîne rectiligne. La préparation revient à fixer une molécule d'acide bromhydrique sur la molécule du bromure d'allyle.

Différents procédés ont été préconisés pour la préparation de ces corps; les principaux travaux sont dus à Reboul, Mlle Lermontoff et Erlenmeyer.

Dans toutes les méthodes décrites, la fixation de l'hydracide halogéné sur le groupement éthylénique $-CH=CH_2$ se fait sous l'influence de la chaleur ou de la pression, en

(*) Voir pp. 1011-1084.

général, sous l'influence de ces deux agents physiques réunis.

Dans l'application de ces méthodes, on se rend aisément compte de ce que, si elles peuvent servir à l'obtention de minimes quantités de ces composés, elles ne peuvent servir à leur préparation en quantité plus considérable.

Or, dans le cas présent, le chlorobromure de triméthylène devait me servir comme point de départ pour la préparation d'une série de composés cycliques triméthyléniques : il m'en fallait donc une notable quantité, si l'on songe que les transformations relativement longues qui devaient me mener à ces composés, éliminaient de la molécule primitive les atomes d'halogène, qui en constituent la plus grande partie en poids (*).

1. — *Préparation du chlorobromure.*

J'ai mis en œuvre d'abord la méthode indiquée par Reboul (**). Selon ses indications, du chlorure d'allyle a été chauffé en tube scellé à 100° pendant plusieurs heures, avec une solution aqueuse d'acide bromhydrique, saturée à - 15°.

Outre les dangers d'explosion que l'on encourt toujours, vu les pressions très considérables, on n'obtient que des rendements vraiment dérisoires.

(*) Un kilogramme de chlorobromure de triméthylène fournit à peine 290 grammes de nitrile éthyléno-acétique. De même les autres transformations sont peu avantageuses.

(**) *Annales de chimie et de physique* (5), 14, 487.

Voici le détail de l'opération dans laquelle la durée de chauffe a été la plus prolongée :

75 grammes de chlorure d'allyle ont été enfermés dans une ampoule scellée, avec 200 grammes de la solution aqueuse bromhydrique saturée à - 15°. On a chauffé à 100° au bain d'eau, pendant soixante heures environ.

Après refroidissement, la couche surnageante, mélange de chlorure d'allyle et des chlorobromures isomères C_3H_6ClBr, décantée puis lavée à l'eau et séchée, a été soumise à la distillation.

On recueille environ 55 grammes de C_3H_5Cl inaltéré passant jusque 65° environ. A partir de là, le thermomètre monte très rapidement jusque 120°, on recueille 34 grammes de produit passant entre 120° et 150°, surtout de 140° à 150°. La rectification de ce produit fournit 27 grammes de chlorobromure de triméthylène éb. 142°-143° et quelques grammes de produit passant vers 120°-125°, chlorobromure de propylène.

On voit que les rendements en chlorobromure de triméthylène de cette opération longue et dangereuse atteignent à peine 18 °/₀ du rendement théorique.

Cette méthode est donc absolument inapplicable dans le cas présent.

Le procédé dû à Mlle Lermontoff : chauffer à 180°, en tube scellé, du chlorure d'allyle saturé d'acide bromhydrique à 20°, était encore beaucoup moins utilisable. Je n'ai pas cherché à l'appliquer en grand parce que, d'une part, les explosions sont très fréquentes et, partant, les pertes en chlorure d'allyle très considérables, et que, d'autre part, les quantités de chlorure d'allyle à mettre en œuvre dans chaque opération sont minimes.

J'ai cherché alors à appliquer à la préparation du

chlorobromure de triméthylène la méthode proposée par Erlenmeyer pour la préparation du bibromure de triméthylène.

Cet auteur, dans un mémoire publié dans les *Liebig's Annalen der Chemie* (*), décrit plusieurs procédés de préparation de ce corps et les condamne lui-même successivement comme ne donnant pas de résultats satisfaisants; il finit par s'arrêter au mode opératoire suivant :

Saturer du bromure d'allyle à - 20° par HBr sec, puis porter le produit, dans des flacons bien bouchés, à la température de 35° à 40°. La pression ayant disparu à l'intérieur du flacon, on sature de nouveau dans le froid et reporte à 35°. Il suffit de répéter ce traitement quatre ou cinq fois pour que 50 °/₀ du bromure d'allyle soient transformés.

L'auteur fait aussi remarquer que la lumière solaire, en tant qu'énergie lumineuse, n'a aucune action; les meilleurs résultats ont été obtenus à l'abri de la lumière.

Voici le détail d'une des nombreuses expériences faites avec le chlorure d'allyle suivant les indications de Erlenmeyer :

75 grammes de C_3H_5Cl, dans un flacon à l'émeri de 200 centimètres cubes, ont été saturés à - 17° par HBr sec.

HBr absorbé = 18 grammes. On laisse revenir lentement à la température ordinaire, puis, au bout d'une journée, on porte au bain d'eau vers 35° à 40°, on le maintient environ trente heures à cette température.

(*) *Annalen der Chemie*, 197, 180.

Après refroidissement à - 17°, on resature par HBr sec : 5 grammes sont encore absorbés. On reporte à la température 35° à 40° pendant le même laps de temps, puis, après lavage à l'eau et dessiccation, on soumet à la rectification.

On a recueilli ainsi 19 grammes environ de chlorobromure de triméthylène.

En faisant varier successivement toutes les conditions d'opération, pression, température, siccité ou humidité du chlorure d'allyle et de l'acide bromhydrique, on n'est pas arrivé à des résultats plus favorables.

Je ne suis pas arrivé à de meilleurs résultats en employant les procédés suivants :

1. Traiter le chlorure d'allyle par l'acide bromhydrique en solution dans l'éther.

2. Traiter la vapeur de chlorure d'allyle par l'acide bromhydrique gazeux en présence d'un catalyseur, la mousse de platine : on a fait barboter l'acide à travers le chlorure vers 45°, le mélange des gaz traverse un tube légèrement chauffé, renfermant de la mousse de platine. Le chlorure d'allyle est condensé à la sortie de l'appareil.

3. Enfin, me basant sur l'activité réactionnelle très considérable des corps à l'état naissant, j'avais espéré pouvoir fixer la molécule d'hydracide halogéné sur le complexe éthylénique $-HC=CH_2$, en traitant le bromure de phosphore par le chlorure d'allyle humide.

Après cette série d'essais infructueux, je suis enfin parvenu à préparer le chlorobromure de triméthylène en traitant le chlorure d'allyle par de l'acide bromhydrique gazeux, non desséché, à la température ordinaire et en plein soleil.

L'exposition de ce procédé se fera le mieux en relatant avec tous ses détails une des nombreuses opérations faites pour la préparation de ce corps.

On a opéré sur 250 grammes de chlorure d'allyle dans un flacon d'un litre.

Tare du flacon.	523 grammes
C_3H_5Cl	250 »
	773 grammes

Température ambiante : 21°.

Première saturation : Courant lent d'acide bromhydrique non desséché. Température initiale du liquide : 21°. La saturation terminée, le flacon pèse

802 grammes
— 773 »

= 29 grammes d'HBr.

Après cinquante minutes d'exposition au soleil, il y a à l'intérieur du flacon une forte dépression et le liquide s'est échauffé à 25°.

Deuxième saturation : Le thermomètre monte graduellement, l'absorption du gaz acide est plus complète qu'à la première saturation.

Celle-ci terminée, le liquide fumant fortement, la température s'est élevée à 31°.

Poids du flacon :

846 grammes
— 802 »

= 44 grammes d'HBr.

On laisse exposé au soleil une demi-heure. Il s'est fait de nouveau une forte dépression à l'intérieur du flacon. La température est redescendue à 28°.

Troisième saturation : Le liquide s'échauffe rapidement jusqu'à 34° et sa température atteint 39° à la fin de la saturation ; le gaz est absorbé complètement, pourvu que le courant ne soit pas trop rapide. Poids du flacon à la fin de la saturation :

901 grammes
— 846 »

= 55 grammes d'HBr.

Après une heure environ, tout le gaz est absorbé et la température est retombée à 25°.

Dans la quatrième saturation, le liquide ne s'échauffe plus notablement et il n'absorbe plus que très peu d'acide bromhydrique. Le flacon pèse alors

918 gramme
— 901 »

= 17 grammes d'HBr.

La totalité d'acide bromhydrique absorbée, dans ces quatre saturations successives, par 250 grammes de C_3H_5Cl, est donc de 145 grammes.

Le produit après lavage à l'eau et dessiccation sur P_2O_5 a été soumis à la rectification.

On a séparé les parties que voici :

- 70°.	107 gr.	de C_3H_5Cl -
70° - 110°.	13 gr.	
110° - 135°.	24 gr.	de C_3H_6ClBr-
135° - 150°.	235 gr.	

Quelques rectifications de ces deux dernières portions fournissent finalement :

220 grammes de chlorobromure de triméthylène éb. 142°-143° ;

19 grammes de chlorobromure de propylène éb. 120°-125°.

Le rendement de l'opération en chlorobromure de triméthylène est donc de 43 %. Il se forme, de plus, de minimes quantités de chlorobromure de propylène : 3 à 4 %.

Ce procédé consiste donc simplement à saturer le chlorure d'allyle, à la température ordinaire en plein soleil, par l'acide bromhydrique gazeux. Il ne nécessite aucune opération difficile ou dangereuse ; la réaction est rapide et l'on obtient des rendements très avantageux. puisque le chlorure d'allyle inaltéré peut servir pour d'autres opérations.

Il faut observer, cependant, que la réaction ne s'établit pas toujours aussi rapidement que dans l'exemple cité plus haut. Il a fallu parfois que le chlorure d'allyle saturé reste exposé au soleil toute une journée avant que la combinaison de l'acide en solution ne soit complète. En général, la réaction, une fois amorcée, se continue rapidement.

Le soleil, en tant qu'énergie lumineuse, exerce sur la marche de cette réaction une influence manifeste : des essais faits dans des conditions d'éclairement différents l'ont prouvé à l'évidence. La température ambiante exerce aussi une influence notable sur cette réaction. Les meilleures conditions sont réalisées quand cette température ne dépasse pas 20° à 22°. Quand elle atteint 35° à 38°, la réaction ne se fait plus que très péniblement (*).

2. — *Préparation du bibromure de triméthylène.*

Le bibromure se prépare d'une façon identique au chlorobromure en saturant le bromure d'allyle exposé au soleil par l'acide bromhydrique gazeux.

La réaction se fait même plus facilement et plus énergiquement qu'avec le chlorure. La température ambiante peut être plus élevée que dans le premier cas et atteindre même 30° à 35° sans nuire à la marche de la réaction.

Pour que ces indications au sujet de la préparation de ces composés halogénés du triméthylème soient complètes, nous devons y ajouter encore le mode de préparation des éthers haloïdes allyliques et de l'acide bromhydrique.

(*) Deux opérations menées de front dans des conditions identiques d'éclairement, mais dans l'une desquelles la température ambiante était 37°, dans l'autre cette même température 20°, ont donné des résultats bien différents. Après six saturations successives, on n'a obtenu dans la première que 12 °/o de chlorobromure, dans la seconde, au contraire, 41 °/o de ce produit.

Le chlorure d'allyle provient de l'action éthérifiante de l'acide chlorhydrique sur l'alcool allylique. Après saturation de ce produit à 0° par l'acide chlorhydrique sec, on chauffe en vase scellé à 100° pendant trois heures. Les rendements obtenus ainsi sont de loin plus avantageux que ceux que l'on obtient en saturant l'alcool à froid et en procédant alors à une simple distillation, ou même en saturant l'alcool par le gaz acide à sa température d'ébullition. Cette réaction ne s'effectue que lentement dans ces conditions, et les produits de polymérisation semblent se former en plus grande quantité sous l'influence prolongée de l'acide.

Le bromure d'allyle s'obtient avec de très bons rendements en saturant l'alcool d'acide bromhydrique à froid et en soumettant alors à la distillation.

L'acide bromhydrique est préparé suivant la méthode ordinaire : action du brome sur le phosphore rouge humide. La condition essentielle, dans le cas présent, étant que le gaz acide soit débarrassé le plus complètement possible du brome, on le fait barboter à travers deux flacons laveurs renfermant de l'eau tenant du phosphore rouge en suspension. Il est absolument inutile de sécher le gaz.

ÉLECTIONS.

Il est procédé, par la voie du scrutin secret, aux élections pour les places vacantes : M. Paul Stroobant est élu correspondant de la Section des sciences mathématiques et physiques.

MM. Charles Barrois, à Lille, et Maria-Yves Delage, à Sceaux, sont élus associés de la Section des sciences naturelles.

PRÉPARATIFS DE LA SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE.

La Classe prend ensuite connaissance des discours qui constituent le programme de la séance publique de demain : *L'Okapi. — Ses affinités avec les Giraffidés vivants et fossiles*, par M. Fraipont; *L'objet de la démonstration mathématique et la réalité*, par M. de la Vallée Poussin.

Séance publique du 16 décembre 1905.

M. J. Fraipont, directeur.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, ff. de secrétaire perpétuel.

M. Tinel, *président* de l'Académie et directeur de la Classe des beaux-arts, ainsi que M. J. Deruyts, *vice-directeur* de la Classe des sciences, prennent également place au bureau.

Sont présents : MM. Éd. Van Beneden, C. Malaise, Ch. Van Bambeke, Alfr. Gilkinet, G. Van der Mensbrugghe, P. De Heen, L. Fredericq, J. Neuberg, Ch. Fraipont, Paul Pelseneer, A. Gravis, A. Lameere, *membres*, Th. Durand, A. Rutot, Willem, A. de Hemptinne, *correspondants*.

Assistent à la séance :

Classe des lettres et des sciences morales et politiques. — MM. A. Giron, E. Discailles, V. Brants, J. Leclercq, E. Gossart, J. Lameere, *membres*.

Classe des beaux-arts. — MM. J. Hymans, *vice-directeur*; G. De Groot, G. Huberti, L. Lenain, X. Mellery, L. Frédéric, *membres*; Jules Brunfaut, *correspondant*.

L'Okapi. — *Ses affinités avec les Giraffidés vivants et fossiles*; par Julien Fraipont, directeur de la Classe.

Les revues spéciales de zoologie renferment, chaque année, la description et la figuration de nombreuses espèces nouvelles d'animaux invertébrés. Ce sont surtout des formes marines ou parasites, ou bien des insectes des régions exotiques encore peu explorées. Plus rares sont les découvertes de vertébrés nouveaux. Plus rares encore sont celles de nouvelles espèces de mammifères. Et dans ce cas, il ne s'agit souvent que du démembrement d'espèces connues, fait par des spécialistes trop portés à voir des espèces là où il n'y a que des variétés et des races locales.

Tel ne fut pas le cas pour ce bel et grand animal découvert, il y a quelques années, dans l'Afrique équatoriale, et que les indigènes appellent *O:api*.

L'histoire de cette découverte mérite d'être rappelée dans ses détails.

Sir Harry Johnston, gouverneur de l'Uganda anglais, n'est pas seulement un administrateur et un diplomate d'élite, c'est encore un explorateur, doublé d'un naturaliste, excellent observateur. Lors d'un séjour qu'il fit en Afrique en 1882-1883 et alors qu'il était l'hôte de Stanley, celui-ci lui avait confié que la grande forêt équatoriale est habitée, dans le Haut-Ituri, par plusieurs bêtes nouvelles, parmi lesquelles un animal ayant l'aspect d'une mule et nommé O:api par les nains de cette région.

Dès son retour dans l'Uganda en 1899, il profita d'une circonstance fortuite pour se mettre à la recherche de ce nouveau mammifère. Il avait recueilli une troupe de pygmées, enlevés du territoire de l'État Indépendant du Congo par un flibustier allemand. Il conserva longtemps ces indigènes auprès de lui et, lorsqu'il put comprendre leur langage, il les interrogea au sujet de l'okapi. Ceux-ci lui confirmèrent que dans la partie de la forêt qu'ils habitaient vit une sorte de baudet ayant la robe d'un zèbre. Sir Johnston entreprit alors de reconduire cette troupe de nains dans leur patrie, caressant l'espoir de se procurer en même temps quelques exemplaires de ce curieux mammifère. Il organise une expédition et, accompagné des pygmées, il traverse la rivière Semliki, puis il gagne le fort M'Beni, premier poste de l'État Indépendant. Là, il apprend, des officiers stationnaires, que les soldats indigènes chassent quelquefois l'okapi, en forêt, pour ravitailler le poste de viande fraîche ; mais aucun d'eux n'avait jamais vu l'animal vivant. Le chef de poste Meura lui fit remettre deux morceaux de peau du dernier individu abattu. Sir Johnston expédia, sans retard, ces fragments au Dr Sclater, secrétaire de la Société zoologique de Londres. Ensuite, ayant obtenu des guides, il pénétra avec ses nains dans la forêt et se mit à la recherche de l'okapi. D'après les renseignements de Stanley, confirmés dans son livre *Darkest Africa*, confirmés aussi par les dires des indigènes, l'okapi aurait été un solipède, et voilà que les pygmées lui montrent une piste fourchue analogue à celle d'un élan, comme étant celle de l'animal poursuivi. Sa curiosité n'en était que plus excitée. Cependant, plusieurs jours de courses infructueuses se passent et tous les membres de l'expé-

dition deviennent malades dans cette forêt marécageuse et surchauffée. Johnston se voit forcé, après avoir rapatrié les nains, de regagner au plus vite le poste de Beni. L'officier Meura, voyant le désappointement du gouverneur anglais, lui fit la promesse de lui faire parvenir la première dépouille d'okapi qui serait amenée au poste. Puis sir Johnston regagna l'Uganda.

Peu de temps après, Karl Eriksson, officier suédois au service de l'État du Congo, qui avait remplacé le lieutenant Meura au poste de Beni, fit parvenir au gouverneur de l'Uganda une dépouille d'okapi et deux crânes.

La première lettre de sir Harry Johnston à M. Sclater avait été lue, le 20 novembre 1900, à la Société zoologique de Londres. Il y disait qu'il avait constaté l'existence d'une nouvelle espèce de zèbre dans la forêt équatoriale, là où habitent les pygmées. Un mois plus tard, le Dr Sclater exhibait à la *Zoological Society* les deux lanières de peau envoyées par Johnston. Puis, à la séance de février 1901, il lut une note où il attribuait ces fragments de peau à une nouvelle espèce de zèbre, qu'il dénomma *Equus* (?) *Johnstoni*.

Dès que sir Harry Johnston fut en possession de la dépouille et des deux crânes envoyés par Eriksson, il reconnut avec une rare sagacité, qu'il était en présence d'un Giraffidé présentant des affinités avec le genre *Helladotherium* du Miocène de Pikermi. Il exécuta une aquarelle représentant l'animal en deux positions différentes; puis il expédia la dépouille et les crânes au British Museum. En même temps, il envoyait son aquarelle à la Société zoologique de Londres, et un message où il consignait ses observations et proposait d'appeler le nouvel animal : *Helladotherium tigrinum*.

Le *Times* du 7 mai 1901 annonça cette découverte de sir Harry Johnston et, le même jour, le secrétaire de la Société zoologique montra son aquarelle et donna lecture de sa note aux membres de cette institution, venus en très grand nombre à cette séance.

Un mois plus tard, sir Ray Lankester présenta la peau naturalisée aux membres de cette compagnie. Il montra que c'est bien un animal voisin de la girafe, mais qu'il est plus proche du genre tertiaire décrit par Gaudry sous le nom de *Palaeotragus*, et par Forsyth Major sous celui de *Samotherium*. Il proposa de créer un genre nouveau pour ce beau mammifère sous le nom d'*Okapia*, tout en lui conservant le nom spécifique de *Johnstoni*, que méritait si bien le gouverneur de l'Uganda.

Dès le 18 mai 1901, quelques jours après la publication du message de sir Harry Johnston au *Times*, le professeur Boule de Paris, faisait paraître un article dans le journal *La Nature*, sous le titre sensationnel : *Un fossile qui ressuscite*. Puis, le 16 novembre de la même année, il écrivait une deuxième communication sur l'animal découvert par Johnston.

N'ayant vu, à cette époque, aucun spécimen original de l'okapi, notre collègue du Muséum de Paris appuyait les vues de son maître, Albert Gaudry, concernant les affinités de cet animal avec l'*Helladotherium*. Il terminait son article en regrettant que Ray Lankester n'ait pas maintenu pour l'hôte de la forêt équatoriale, le nom générique du mammifère tertiaire.

Sir Ray Lankester envoyait, le 25 novembre 1901, une note à l'Académie des sciences de Paris, sous le titre : *Okapia Johnstoni, nouveau mammifère voisin des girafes découvert dans l'Afrique centrale*. A cette même séance,

le professeur Albert Gaudry, dont nous déplorons la perte récente, présenta la restauration du squelette de l'*Helladotherium*, qu'il avait exhumé quarante ans auparavant du Miocène de Pikermi. Il indiqua les contours présumés du corps du fossile tertiaire à l'état vivant et attira l'attention de la savante Compagnie sur la ressemblance qui existe entre l'*Helladotherium* et l'okapi du British Museum.

En août 1902, sir Ray Lankester publia son mémoire *in extenso* sur l'unique dépouille d'okapi que possédait alors le British Museum et sur les deux crânes non adultes qui l'accompagnaient.

Telles furent les péripéties de la découverte de ce précieux animal et les trois baptêmes successifs qu'il eut à subir en moins de deux ans.

Un article du *Geographical Journal* de Londres, de janvier 1901, rendant compte de l'expédition de sir Harry Johnston dans la forêt équatoriale, apprit aux autorités de l'État Indépendant, à Bruxelles, l'existence de l'okapi sur son territoire. Aussitôt le Gouvernement central donna ordre à ses agents du Haut-Ituri d'avoir à capturer et à envoyer au Musée de Tervueren des exemplaires du nouveau mammifère. Il rappela en même temps à ses fonctionnaires le texte des instructions qui avaient été méconnues dans l'espèce, leur enjoignant de remettre aux autorités congolaises toutes les trouvailles scientifiques qu'ils pouvaient faire sur le territoire de l'État Indépendant.

Dans le cours de l'année 1902, le Gouvernement central reçut à Bruxelles la première peau d'okapi adulte et le squelette d'un autre spécimen, provenant tous deux du Haut-Ituri.

D'autre part, le Gouverneur général à Boma prenait, en septembre 1902, un arrêté interdisant la chasse et la capture des okapis sur tout le territoire de l'État Indépendant.

Forsyth Major, savant bien connu par ses travaux sur les Giraffidés fossiles de l'île de Samos, fut chargé, à sa demande, par les autorités de l'État du Congo, de faire l'étude des matériaux parvenus à Bruxelles, concernant le curieux mammifère.

Il fit paraître ses premières observations dans différents numéros de la *Belgique coloniale* et dans les *Proceedings* de la Société zoologique de Londres, pendant l'année 1902. Puis, en 1905, il renonça à publier la monographie qu'il avait promise pour les *Annales de l'État Indépendant du Congo*.

Je fus chargé de cette tâche en 1906.

Pendant le cours des années 1902 à 1906, le Gouvernement central de l'État Indépendant reçut une vingtaine de dépouilles et de squelettes d'okapis, dont il distribua des exemplaires à différents gouvernements étrangers et à plusieurs institutions scientifiques, réservant des spécimens à son Musée de Tervueren. Il permit aussi à quelques missions anglaises de chasser l'okapi. C'est ainsi que parvinrent en Angleterre quelques exemplaires, dus notamment au major Powel-Cotton et au lieutenant Boyd Alexander. Enfin plusieurs individus, provenant de détournement ou de braconnage, sont encore parvenus en Europe. Mais, jusqu'ici, tous les okapis connus proviennent du territoire de notre colonie congolaise.

Les travaux ou notes, basés sur l'étude de pièces originales, concernant l'okapi, publiés jusqu'aujourd'hui, sont dus à sir Harry Johnston (1900-1901), Sclater

(1901), sir Ray Lankester (1901, 1902, 1907, 1908), Forsyth Major (1902), De Pauw (1904), Ménégaux (1904), A. Carruccio (1905) et Fraipont (1907). Mais de nombreux zoologistes et publicistes se sont encore occupés à divers points de vue de notre animal. Je citerai les articles du Prof^r Gaudry (1901), du Prof^r Boule (1901), du Prof^r Lameere (1902), de Contreras (1902), de Lydeker (1902), du Dr Eimer Lömberg (1903 et 1906), du Prof^r Bürckart (1905), du capitaine Alexander (1906), du capitaine Gosseling (1906).

L'émotion et l'activité scientifique provoquées par la découverte de l'okapi ne se sont pas localisées au monde des zoologistes. Des égyptologues ont cru reconnaître cet animal dans certaines figurations des monuments de l'ancienne Égypte. Ils ont pensé, avec Wiedmann de Bonn (1902), que les Égyptiens pharaoniques l'ont représenté sous les traits de Sit ou Set, divinité typhonique, personnifiant le désert et la stérilité, que l'on rencontre sur un bas-relief de l'époque de Thoutmosis III et sur un monument de l'époque de Seti Ier. Cette identification a été combattue avec raison par Cl. Gaillard (1903), de Lyon, et par Hippolyte Boussac (1907), de Paris.

Beaucoup de revues, de manuels, d'encyclopédies, de dictionnaires récents, de journaux illustrés et autres, ont publié aussi des articles sur l'okapi.

J'ai eu à ma disposition, pour faire la monographie *Okapia*, parue en 1907 dans les *Annales de l'État du Congo*, douze dépouilles, sept squelettes et onze crânes, appartenant à des animaux d'âges variés et de sexes différents. J'ai, de plus, utilisé les notes et renseigne-

ments manuscrits sur l'animal vivant ou mort, ou à l'état frais, sur ses mœurs et son habitat, fournis par les chefs de district, les chefs de poste et les indigènes de la forêt équatoriale.

Je suis heureux de saisir cette occasion académique pour payer une dette de reconnaissance, au nom des zoologistes, à ces officiers, à ces fonctionnaires et à ces agents de notre colonie, qui ont été nos pionniers et nos collaborateurs au centre de l'Afrique. C'est au prix des plus grandes difficultés, souvent au prix de véritables dangers, qu'ils sont arrivés à nous procurer des dépouilles de cet étrange animal, qui vit dans les parties les plus inextricables de la grande forêt, sous un climat meurtrier pour les nègres eux-mêmes. Parmi ces Africains, nous devons surtout nous souvenir des services rendus par les commandants Sillye, Arnold, Bertrand, Ensch, La Plume, par les chefs de poste Anzelius, Jadoul, Sifler, Van Hulde, par le Dr David, par MM. Mertens et Lamboray. Les autorités de l'État Indépendant ont fait exécuter de nombreuses et superbes planches pour illustrer ma monographie parue dans les *Annales du Congo*. Nous ne sommes pas habitués, en Belgique, à une telle générosité pour une œuvre scientifique. Ces *Annales* relèvent aujourd'hui du Ministère des Colonies. Nous faisons des vœux pour que notre Gouvernement leur conserve l'ampleur qu'avaient su leur donner les autorités congolaises.

Description.

J'aurais voulu exhiber au Palais des Académies les exemplaires naturalisés du Musée de Tervueren; mais je n'ai pu obtenir cette autorisation, à cause des dangers de transport.

Je ne donnerai ici qu'une courte description de l'okapi et j'attirerai surtout l'attention sur les caractères et les particularités sur lesquelles je m'appuyerai pour établir les affinités de cet animal avec les autres Giraffidés. Je renvoie, pour le reste, à ma monographie, où je me suis longuement étendu sur les caractères extérieurs et sur les détails du squelette.

L'okapi adulte a la taille d'un grand cerf. Il mesure, au garrot, de un mètre quarante centimètres à un mètre cinquante, et les belles peaux atteignent deux mètres vingt centimètres, de l'extrémité du museau à la naissance de la queue.

Le tronc est étroit, surtout au niveau du poitrail. Le cou n'est pas plus long que celui de la plupart des antilopes. La tête peu élevée est effilée. Le pavillon de l'oreille est remarquablement grand et largement étalé; il est plus développé que celui de la girafe et même que celui de l'âne.

Les orbites, assez hautes, regardent obliquement en avant.

L'œil, plutôt petit, a une coloration brun-noir.

Le mâle porte sur le front deux petites cornes coniques, incurvées en arrière. Elles sont recouvertes par la peau comme chez la girafe, mais leur extrémité libre, au lieu de porter une touffe de poils, est dénudée chez l'adulte, sur une largeur d'un ou deux centimètres, à la façon d'un petit bois de cerf.

La femelle n'a pas de cornes; on aperçoit, à la place de celles-ci, deux tourbillons de poils.

Le chanfrein est légèrement busqué dans les deux sexes.

Le museau, étroit et effilé, s'élargit un peu au niveau

du mufle. La lèvre supérieure est légèrement proéminente. La langue est longue et effilée comme celle de la girafe.

Les pattes sont relativement hautes et robustes, plus épaisses que celles de la plupart des antilopes ou des cervidés; elles sont sensiblement de même taille en avant et en arrière. Elles se terminent chacune par une paire de sabots cornés, assez larges et suffisamment amples pour constituer à l'animal une base de sustentation lui permettant de s'aventurer dans des endroits marécageux.

La queue est mince et légèrement conique ; elle se termine, comme chez la girafe, par une touffe de crins noirs.

La robe de l'okapi est remarquablement éclatante en couleur. Le poil est ras et luisant. (Voir pl. I.)

Le tronc, le cou, le haut de la tête, les oreilles et la queue sont d'un beau brun marron réchauffé de roux, chez le mâle, brun foncé ou bai obscur chez la femelle, brun foncé presque noir avec des reflets pourprés chez les jeunes mâles. Les tons du pelage s'éclaircissent chez les vieux sujets, de façon qu'ils paraissent passés.

Une crête étroite de poils roux ou brun roux s'étend depuis la nuque jusqu'à la racine de la queue chez les sujets jeunes. Elle s'arrête vers le milieu du dos chez les adultes et les vieux individus. La longueur et la coloration des poils de cette crête varient avec l'âge. Ils s'usent surtout au niveau du cou et du dos.

Le fourreau du mâle est roux sur les côtés et blanchâtre en dessous.

Les joues sont gris chevreuil ou gris souris, passant vers le bas au blanc crème ou au blanc sale. La gorge

est blanche jusqu'en arrière des oreilles. Le mufle est noir.

Le haut de la face interne de l'avant-bras est blanc. La couverture externe de la même région est brun marron, zébrée de raies blanches transversales, dont le nombre et la disposition varient d'un individu à l'autre et même d'une patte à l'autre ; il y en a de trois à six.

Un anneau blanc se marque au-dessus de l'articulation carpo-métacarpienne. Au niveau de cette articulation se voit un anneau foncé, qui s'élargit en avant. Le milieu de cet élargissement est occupé par un écusson de poils jaunes, qui peut être remplacé par une tache irrégulière, ou qui peut manquer complètement. D'autre part, l'anneau foncé tout entier peut être remplacé par une plaque irrégulière de poils bruns.

La région du canon ou du métacarpe est d'un beau blanc crème. Elle est traversée en avant par une bande verticale de poils noirs, s'incurvant en dehors vers le bas, pour aller rejoindre un large anneau de poils noirs recouvrant le boulet, ou s'arrêter à une petite distance de celui-ci. Enfin, un anneau étroit de poils blancs entoure le paturon et repose sur les sabots luisants et d'une belle coloration noire.

J'insiste sur la variabilité du nombre des raies claires, sur la continuité ou la discontinuité de l'anneau clair situé au-dessus de l'articulation carpo-métacarpienne, sur l'inconstance de la présence d'un écusson de poils clairs au milieu du genou, sur le prolongement variable de l'extrémité inférieure de la bande verticale de poils noirs du canon antérieur.

C'est à tort qu'on a cru pouvoir considérer telle ou telle de ces particularités comme des caractères spéci-

fiques différents chez les premiers spécimens arrivés en Europe.

La face interne de l'arrière-train, de la cuisse et de la région tibiale est d'une coloration blanc crème, zébrée sur le bord postérieur des pointes des bandes brunes de la face externe.

Le fond de la couverture externe de cette même région est brun-marron ou brun pourpré. Des bandes transversales blanc crème, de largeur irrégulière, plus ou moins sinueuses, s'étalent sur ce fond obscur et s'effilent en avant sur la cuisse et, en arrière, sur la région tibiale. Le nombre et les dimensions de ces bandes claires varient d'un individu à l'autre et d'une patte à l'autre. J'en ai compté de quinze à trente. Elles sont plus nombreuses chez les jeunes sujets. Le jarret (région de l'articulation tarso-métatarsienne) porte un anneau de poils brun marron. En dessous, le reste du jarret et tout le canon sont uniformément blanc crème.

La région du boulet porte une haute bande noire échancrée par devant. Sa hauteur est tantôt égale, tantôt supérieure à celle du même anneau du membre antérieur. Le paturon est aussi entouré d'un cercle de poils blancs, qui repose sur des sabots un peu plus surbaissés que les antérieurs.

Le squelette de l'okapi indique un animal à la fois svelte et robuste. Ce n'est pas ici la place d'entrer dans les détails d'une description minutieuse qui a été donnée ailleurs.

La tête osseuse est singulièrement allongée et étroite. Sa longueur dépend surtout du grand développement horizontal de la région post-orbitaire, qui est sensible-

ment dans le même plan que la région pré-orbitaire. En effet, la partie antérieure de l'écaille de l'occipital et les pariétaux concourent à la délimitation supérieure de la voûte du crâne et se trouvent dans le même plan horizontal que les frontaux. C'est la même projection cranienne que chez le Palaeotrague. Les bosses frontales, sur lesquelles s'insèrent les cornillons, occupent ici une position intermédiaire entre celles du *Palaeotragus* franchement supra-orbitaires et celles de la girafe, post-orbitaires (fig. 1, 2, 4, pl. II).

Tout autre est le profil du crâne de la girafe (fig. 4), dont la voûte forme un cône à sommet correspondant aux bosses pariéto-frontales, au niveau de la suture coronale. Les pariétaux sont inclinés en bas et en arrière, tandis que les frontaux sont incurvés en bas et en avant au niveau des cornes; puis, ils se relèvent en avant en une bosse médiane. Les os nasaux sont aussi déclives en avant.

La région orbitaire de l'okapi s'étale beaucoup moins en dehors que chez la girafe et que chez la plupart des cervidés. Le pourtour de l'orbite est moins « télescopique », pour me servir de l'expression imagée de Ray Lankester. La base des os nasaux porte une légère bosse médiane, qui n'existe ni chez la girafe, ni chez le *Palaeotragus*, et qui rend le chanfrein busqué.

Il existe chez l'okapi, comme chez la girafe, un large orifice des fosses prélacrymales, situé en avant des os lacrymaux; il n'y a pas de trou lacrymal.

La particularité la plus marquée de la face inférieure du crâne est le grand développement des bulles tympaniques en rapport avec l'énorme pavillon de l'oreille. Ce sont deux grosses saillies qui proéminent à droite et à gauche du basi-occipital.

La section antéro-postérieure et verticale du crâne montre que le plan de l'axe basi-cranial forme, avec le plan de l'axe palatin-horizontal, un angle très aigu; elle montre aussi que la voûte de la cavité cérébrale et son plancher sont presque horizontaux et parallèles

Les sinus ou cavités pneumatiques sont beaucoup moins développés que chez la girafe et plus développés que chez le Palaeotrague. Tandis que chez la girafe les os de toute la voûte de la tête osseuse, depuis la crête occipitale jusqu'à la moitié postérieure des os nasaux, sont creusés d'énormes sinus, écartant largement les tables osseuses, surtout dans la région pariéto-frontale, seul le frontal et le tiers postérieur des nasaux en possèdent chez l'okapi. Par contre, le palais osseux de celui-ci est pourvu de sinus plus développés que chez la girafe.

On sait que le grand développement des cavités pneumatiques dans les os du crâne des mammifères est ordinairement l'indice de formes très différenciées du type primitif, témoins : les bœufs, les rhinocéros, les éléphants et les girafes.

Le crâne de la femelle est un peu plus long et un peu plus étroit que celui du mâle. Je pense que c'est encore à tort qu'on a pris ces particularités de sexe pour des caractères spécifiques. Dans nos races domestiques de cavicornes, chez les antilopes et les cervidés, le mâle a presque toujours le crâne plus haut, plus large et plus court que la femelle. (Comparer fig. 1 et 3, pl. II.)

La mâchoire inférieure n'a jamais les branches soudées au niveau de la symphyse. La portion symphysaire est plus courte, plus étroite que celle de la girafe, et elle ne s'étale pas en spatule.

Les dents sont au nombre de trente-deux chez l'adulte. La formule dentaire est $\frac{0}{3} \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{3.3}{3.3}$.

Les six incisives et les deux incisives-canines de la mâchoire inférieure sont petites, délicates, étroites et faiblement enchâssées dans leur alvéole. Elles ne sont pas étalées en clavier comme chez la girafe, mais disposées en pince.

Les canines ressemblent aux incisives chez l'adulte. Cependant leur couronne est un peu plus épaisse, un peu plus conique et légèrement *bifoliée*. Cette dernière particularité est beaucoup plus accentuée sur la couronne des canines caduques, ce qui est aussi le cas chez la girafe. C'est là un caractère exclusivement propre aux Giraffidés, comme l'a fait remarquer Ray Lankester.

La forme et la grandeur des molaires de lait et des molaires définitives, aussi bien que la disposition et la complication de leurs denticules, indiquent une parenté plus rapprochée de cet animal avec le genre fossile Palaeotrague qu'avec la girafe. Ses molaires possèdent encore certains caractères de celles du *Palaeotragus*, que la girafe a perdus; mais elles ont aussi d'autres particularités de détail que n'a pas encore le Palaeotrague, qui lui sont propres ou que possède aussi la girafe.

Les molaires définitives sont très différentes des molaires caduques; j'ai décrit minutieusement les unes et les autres dans ma monographie.

Je veux m'étendre ici davantage sur les caractères des cornes de l'okapi dont l'étude présente un haut intérêt au point de vue de l'origine de ces formations chez les *Pecora*.

L'os frontal du jeune mâle porte à droite et à gauche,

au-dessus et un peu en arrière des orbites, deux fortes tubérosités. Ce sont les apophyses ou bosses frontales des auteurs. Sur celles-ci s'appliquent les cônes osseux, les chevilles osseuses ou cornillons. Ces cornillons sont séparés, chez les jeunes mâles, des bosses frontales par une couche de tissu fibreux périostique, épaisse de plusieurs millimètres (fig. 5, pl. II). L'examen microscopique de coupes minces, faites à travers cette couche, provenant d'un sujet récemment reçu du Congo, ne m'a laissé aucundoute sur la nature histologique de ce tissu.

Les cornillons ont la forme de deux petits cônes, légèrement incurvés en arrière, hauts et larges de quelques centimètres. Ils sont formés d'un tissu osseux spongieux, criblés de trous à leur surface et sillonnés de gouttières vasculaires profondes. Leur base concave présente des mamelons spongieux irréguliers et criblés, eux aussi, de petits trous. La table osseuse du frontal présente également à ce niveau des mamelons spongieux qui s'engrènent avec ceux de la base des cônes osseux. Les uns et les autres plongent dans la couche de tissu fibreux périostique intercalé. Le tout est recouvert par la peau (fig. 7, pl. III).

Lorsque l'animal est devenu adulte, la couche de tissu fibreux périostique est complètement résorbée, ainsi que la paroi de la plupart des vaisseaux Les bosses frontales se fusionnent complètement avec la base des cornillons, au point qu'on ne peut distinguer à l'extérieur aucune trace de suture, ni sur une section aucune différence dans la structure de l'os. Le tissu osseux des cornillons est d'ailleurs devenu plus dense et plus dur. La soudure entre les cornillons et les bosses pariéto-frontales se fait beaucoup plus tard chez la girafe. Les cornillons, d'après

Ray Lankester, sont d'abord supra-pariétaux et chevauchent secondairement sur les frontaux. Les sinus frontaux ne pénètrent pas dans les cornillons de l'okapi, mais restent limités aux bosses frontales, comme chez le chamois.

Tandis que chez le jeune mâle, tout le cornillon est recouvert par la peau, comme chez la girafe, le bout de l'extrémité libre se dénude chez l'adulte et prend les caractères d'une petite calotte osseuse convexe, à surface polie, à bords inférieurs irréguliers et séparés du reste de la corne par un ou plusieurs sillons plus ou moins profonds (fig. 1, pl. II). Le tissu osseux y devient plus compact, plus dense et surtout plus dur que dans le reste de la corne recouverte de la peau. Cette différenciation de l'extrémité libre des cornes des premiers okapis reçus à Tervueren n'avait pas échappé à l'observation de Forsyth Major, dès novembre 1902. Ray Lankester nous dit, dans l'appendice de son mémoire de 1902, qu'il eut l'attention attirée par Forsyth Major sur ces pointes en forme de petits chapeaux polis et percés à travers la peau comme un bois de cervidé. Le directeur du Musée de South Kensington a étudié ces formations sur quatre exemplaires mâles, reçus depuis en Angleterre. Il pense que les fissures transversales de l'extrémité libre de la corne ont pour but de séparer cette portion dénudée du reste de l' « ossicône » et de la préparer à la casse, juste comme un bois de cervidé est préparé à la chute. Mais chez l'okapi, il y aurait un deuxième et quelquefois un troisième segment ainsi préparés avant la chute du premier.

Ménégaux, se basant sur l'observation de l'exemplaire du Museum de Paris, écrivait, en 1904, dans le tome II de la *Vie illustrée des animaux* : « Les cornes, qui n'existent que chez le mâle, présentent cette particularité

unique, c'est qu'après avoir été recouvertes par la peau sur les neuf dixièmes de leur longueur, leur extrémité libre porte un petit bois d'environ 1 centimètre. Cet animal fait donc le passage des Cervidés aux girafes.» La conclusion est évidemment prématurée et non justifiée

J'ai eu sous les yeux de nombreux crânes d'okapis mâles de différents âges. Leur étude m'a conduit aux conclusions que je vais développer. Quand l'okapi mâle est devenu adulte et qu'il se sert de ses cornes, le bout libre se dénude et acquiert les caractères d'un petit bois terminal. La pointe dénudée s'isole par une ou plusieurs fissures, qui se produisent sous l'action résorbante du tissu vivant sous-jacent. Cette pointe s'use ou se casse ensuite par l'usage. L'animal continuant à se servir de ses cornes, les portions sous-jacentes se dénudent progressivement, se polissent, et le même processus d'isolement de la partie dénudée se produit. Il en résulte que les cornes des okapis diminuent de hauteur, au fur et à mesure que ces animaux avancent en âge et qu'elles ont leur maximum de taille chez les mâles sub-adultes. C'est ce que j'ai pu constater d'une façon très positive. Ainsi les cornes des vieux mâles sont réduites souvent à des moignons surbaissés (fig. 6, pl. II). Quelquefois une corne est plus usée que l'autre, par suite sans doute de l'habitude que l'animal a prise de se servir plus volontiers de celle-ci que de celle-là. Tel mâle, dont l'usure des dents indique le même âge que tel autre, montre des cornes moins usées, ayant eu sans doute moins de combats à livrer par suite de la rareté de rivaux dans le district qu'il habitait.

Quoi qu'il en soit, l'okapi, tout en ayant encore des cornes de Velléricornes, des cornes velues, peut être

considéré comme possédant des bois rudimentaires. Le mode d'apparition de ces bois et leur mode d'usure nous donnent l'explication de la formation des bois des Cervidés et la cause de leur chute. Je ne conclurai en aucune façon de ces faits que les bois des Cervidés dérivent phylogénétiquement des cornes des Giraffidés. Je pense, au contraire, que les uns et les autres se sont développés parallèlement et indépendamment pendant les temps tertiaires, ensuite des mêmes causes physiologiques, des mêmes processus morphologiques, que l'étude de l'okapi nous a peut-être permis d'éclaircir. Les données de l'histoire paléontologique des *Pecora* fossiles et en particulier des Cervidés et des Giraffidés tertiaires nous conduisent à la même conclusion.

C'est surtout depuis les travaux relativement récents de A. Brandt, de H. Nitsche, de U. Dürst, de O. Thomas et de Ray Lankester, sur le développement des cornes chez les Bovidae, chez les Cervidae et les Giraffidae, éclairés par les recherches paléontologiques de Gaudry et de Rütimeyer, que l'on a pu commencer à se faire une conception générale de la signification et de l'origine des cornes chez les ruminants, telle que l'ont exprimée Max Weber dans un travail récent et Ray Lankester dans diverses notices. Le Prof^r Lameere a aussi traité ce sujet avec beaucoup d'érudition dans un article sur l'okapi (1902).

Les morphologistes sont presque tous d'accord pour admettre que la voûte du crâne des ongulés tertiaires s'est garnie de bosses, tantôt paires tantôt impaires, développées aux dépens des os du crâne, à partir du moment où ils se sont servis de la tête pour donner des coups, surtout les mâles dans leurs combats d'amour.

L'étude des cornes chez les Giraffidés fossiles et vivants fournit de précieuses indications au sujet de l'origine de ces formations et donne l'ébauche de presque tous les cas que nous voyons réalisés dans des directions ultimes chez les autres *Pecora*. L'okapi, en particulier, occupe ici une place privilégiée.

Chez les jeunes mâles, les bosses frontales et la bosse nasale médiane nous montrent la forme primitive, la première étape de ces productions, comme de simples saillies de la table externe des os. Brandt, puis Dürst ont montré chez le veau que ces bosses se forment par dépôts de couches osseuses aux dépens de la face interne du périoste. C'est le « pédicule de la corne », c'est le *Hornstiel*, le *Rosenstock*, le *Stirnzafen* des Cervidés.

La cheville osseuse, ou noyau osseux (*Knochen Kern*), ou os cornu des Bovidés, d'après les travaux embryologiques de Brandt et de Dürst, d'abord séparés des bosses frontales, se développent aux dépens d'un tissu ostéogène dérivant de la face *externe* du périoste de l'os frontal. Il en serait de même des cornillons de la girafe, d'après Nitche. Suivant cet observateur, la dague (*Strange*) des Cervidés serait une formation homologue de l'os cornu des Bovidés.

Les observations que j'ai faites sur des cornillons non encore soudés au frontal chez l'okapi et séparés de celui-ci par un périoste hypertrophié m'avaient conduit aux mêmes conclusions. Je n'ai pu cependant en faire la démonstration matérielle, les sujets observés étant déjà trop âgés.

Cependant il y a encore place ici pour une autre hypothèse, je m'empresse de le reconnaître : les cornillons de la girafe et de l'okapi pourraient se former

aux dépens de deux noyaux osseux, tout à fait séparés primitivement des os sous-jacents et sans intervention du périoste de ceux-ci.

C'est la thèse que soutient Ray Lankester dans un travail récent (1907) concernant un fœtus de girafe. Il a observé que les *ossicônes* prennent naissance dans une masse fibro-ostéogène, indépendante du périoste du pariétal sous-jacent, masse appartenant au derme cutané. Il en conclut que les cornillons de la girafe et vraisemblablement de l'okapi sont des formations *tégumentaires* et qu'elles ne peuvent par conséquent être identifiées aux chevilles osseuses des Bovidés.

En admettant même que les cornillons de la girafe et de l'okapi naissent aujourd'hui aux dépens de deux noyaux osseux complètement séparés du périoste des os sous-jacents, je ne vois pas bien qu'il y ait une différence essentielle d'origine dans ce processus, si, comme le pensent encore la majorité des morphologistes, les os frontaux et les os pariétaux sont déjà eux-mêmes des os d'origine cutanée.

Quoi qu'il en soit, ces cornillons, une fois formés chez la girafe et l'okapi, se comportent comme la cheville osseuse des Bovidés. Ils se soudent aux bosses frontales, pariétales ou pariéto-frontales sous-jacentes. La peau les recouvre totalement. Cette constitution caractérise un stade transitoire qui se rencontre chez tous les Bovidés et Cervidés.

Chez la girafe, l'évolution de la corne ne va pas plus loin.

Nous assistons à l'appàrition d'un stade ultérieur de différenciation chez l'okapi adulte : la dénudation de l'extrémité libre. Le reste de la corne est encore velu et

la peau ne disparaît qu'au fur et à mesure de l'usure des extrémités.

D'autre part, chez certains Cervidés tertiaires, tels que les *Procervulus*, toute la tige (*Strange*) se dénude par oblitération des vaisseaux, par dessiccation et dépouillement mécanique, pour donner naissance aux bois permanents. Ce qui n'est, semble-t-il, qu'un raccourcissement dans l'évolution de ces organes.

Enfin, les dernières étapes de différenciation nous sont données chez les autres Cervidés de la fin du Tertiaire et des temps modernes : c'est d'abord la chute de la partie supérieure des bois comme chez les *Dicrocerus* et *Cervulus* (Muntjac), puis la chute totale et périodique de ces organes chez les vrais *Cervus*.

Je ne m'attarderai guère à l'examen du reste du squelette.

La colonne vertébrale est composée de 44 vertèbres : 7 cervicales, 14 dorsales, 5 lombaires, 4 sacrées et 13 ou 14 caudales.

Les vertèbres cervicales n'ont rien de l'énorme développement qu'elles prennent chez la girafe et leur forme est toute différente. Ray Lankester vient tout récemment (1908) d'attirer l'attention sur plusieurs particularités de cette région de la colonne vertébrale chez l'okapi.

Les côtes sont au nombre de 14. Le sternum est bien développé.

L'omoplate subtriangulaire, à large col, est épaisse et robuste.

L'humérus est court, épais et trapu.

Le radius, relativement long, légèrement convexe en avant et concave en arrière, est moins allongé et moins droit que chez la girafe.

Le cubitus présente le même degré d'atrophie et les mêmes rapports avec le radius que chez les cerfs et chez les antilopes.

La première rangée du carpe comprend : le pyramidal, le semi-lunaire, le scaphoïde et le pisiforme. La deuxième rangée montre l'onciforme et le grand os soudé au trapézoïde. Le carpe chez la girafe présente exactement la même composition.

Le métacarpe ou canon antérieur est relativement grand, élancé, mais beaucoup moins long que chez la girafe.

Viennent ensuite trois rangées d'une paire de phalanges.

Il y a deux paires de grands sésamoïdes et une paire de petits sésamoïdes.

Le bassin est plus trapu, moins haut et moins largement ouvert en arrière chez le mâle que chez la femelle.

Le fémur est court et épais.

La rotule a la forme d'un triangle à base supérieure et à sommet effilé vers le bas.

Le tibia a le corps prismatique, plus gros à son extrémité supérieure qu'à la partie inférieure.

Le péroné est atrophié. Cependant, son extrémité inférieure est représentée par un petit os subrectangulaire, l'os coronoïde tarsien des auteurs, l'os malléolien de Cuvier, que j'appellerais volontiers os péronéal (*os fibularis*) pour indiquer son origine et sa signification, si le calcanéum n'avait déjà reçu ce nom, en anatomie comparée.

L'astragale de l'okapi et de la girafe ressemble beaucoup à celui du bœuf et des grandes antilopes.

Le calcaneum de l'okapi se rapproche bien plus par sa forme de celui du bœuf que de celui de la girafe.

Le scaphoïde, le cuboïde antérieur, le cuboïde postérieur, le deuxième et le troisième cunéiformes, sont soudés chez l'adulte en un seul os, que j'appellerai du nom peu euphonique : *cubo-cunéi-scaphoïde*. Seul le premier cunéiforme rudimentaire reste isolé et appliqué au scaphoïde.

La réduction des os du tarse n'est pas la même chez la girafe. Les cuboïdes antérieur et postérieur sont soudés au scaphoïde pour former le *cubo-scaphoïde*, tandis que les trois cunéiformes sont soudés entre eux.

Le canon postérieur est beaucoup plus court que chez la girafe. Il correspond au métatarsien principal. Il est un peu plus long que le canon antérieur. On remarque vers le tiers postérieur de la face interne et sous le bord supérieur du canon une petite côte osseuse verticale, longue de 3 ou 4 millimètres. C'est le dernier vestige du deuxième métatarsien atrophié, que l'on voit aussi chez la girafe.

Les phalanges des membres postérieurs, un peu plus grêles que les antérieurs, ont les mêmes caractères.

Il existe une paire de sésamoïdes.

Telles sont les particularités les plus importantes des formes extérieures et du squelette sur lesquelles nous nous appuyons pour établir les caractères génériques et spécifiques de l'okapi, ainsi que ses affinités avec les autres Giraffidés.

Mœurs et habitat.

Le mot *O : api* signifie, dans le langage *wambok*, baudet ou âne. D'autre part, Eriksson écrit que les indigènes l'appellent *Dumba* dans la plus grande partie

du territoire qu'il fréquente. J'ignore la signification de ce mot parmi les idiomes des peuplades du Haut-Congo.

L'okapi habite les parties les plus touffues et les plus inextricables des forêts du haut nord de l'État indépendant, limitées à l'ouest par l'Ubangi, au nord par l'Ubangi et l'Uele, à l'est par l'Uele et la Semliki, au sud par une ligne tirée de Karimi sur la Semliki et passant par Ponthierville et Coquilhatville.

Il a surtout été observé et capturé dans le Haut-Ituri, spécialement dans la forêt avoisinant le poste de Mawambi. Plusieurs captures ont été faites dans le Haut-Uele, entre les rivières Likati, Rubi, Uele et Bomokandi. Il est rare dans les forêts du Haut-Ubangi (pl. IV).

L'okapi était considéré par les indigènes de ces régions comme un animal rare et précieux déjà avant l'arrivée des blancs. Au dire des nègres, nous apprend le commandant Sillye, un chef seul pouvait s'asseoir sur une peau d'okapi, dont la valeur d'échange correspondait jadis à celle d'une femme. Sa peau est aussi très recherchée des indigènes pour faire des ceintures, des bandoulières et des fourreaux de carquois. Ce sont deux de ces lanières qui furent remises au début à sir Johnston et que le Dr Sclater présenta à la *Zoological Society*. Une autre existe dans la collection ethnographique de l'abbaye de Maredsous. J'en possède également une, obtenue par échange des *Ababuas*.

Les indigènes prétendent que jadis on en observait des troupeaux aux environs d'Adjamu. Le lieutenant Leoni écrit dans un de ses rapports qu'il en vit deux bandes en juin 1900, sur la route de Nepoko (Ituri). Cependant, d'après les renseignements concordants de presque tous les

chefs de district, chefs de poste, chasseurs et indigènes de la forêt équatoriale, les okapis vivent seulement par couples, quelquefois accompagnés d'un jeune. Tous sont unanimes à dire que ce sont des animaux essentiellement de forêt. Ils se tiennent le jour dans les parties les plus touffues et les plus sombres des bois. Ils n'en sortent que la nuit ou à l'aube pour aller chercher leur nourriture dans les clairières, au bord des petits cours d'eau et dans les marécages.

L'okapi est d'ailleurs un animal très craintif, très prudent et complètement inoffensif. Son regard est doux comme celui d'une gazelle et sa voix ressemble au beuglement de la vache. Le commandant Laplume nous renseigne qu'il marche l'amble comme la girafe, ce que De Pauw avait déjà pressenti et indiqué sur plusieurs dépouilles et squelettes montés. La plupart des exemplaires parvenus en Europe ont été tués en forêt par des indigènes et amenés tout dépecés au poste le plus proche. Le sous-lieutenant Anzelius, chef de poste à Mawambi, est un des rares Européens qui ait tiré lui-même des okapis et qui ait vu des exemplaires vivants ou non dépouillés. D'une seule expédition dans le bassin de l'Ibina (Haut-Ituri), il rapporta à Mawambi six okapis. Il nous a fourni le premier des renseignements précis sur le sexe des sujets abattus et sur les caractères distinctifs des mâles et des femelles. C'est notamment par lui que nous savons que les mâles seuls ont des cornes.

Anzelius écrit aussi que les okapis se tiennent par couples. Ils marchent à la file, le mâle derrière la femelle. Quand celle-ci broute, le mâle se tient aux aguets à la façon des antilopes. Au moindre bruit, il dresse l'oreille et donne l'alerte. La femelle détale la première en bon-

dissant, le mâle la suit et ils disparaissent en quelques secondes dans la futaie. Leur nourriture consiste, dit Anzelius, en de grandes feuilles pointues d'une certaine liane.

Le lieutenant Eriksson nous confirme que les okapis viennent seuls ou par paires pâturer la nuit dans les clairières marécageuses.

Le capitaine J.-B. Gossling, de l'expédition Alexander-Gossling (1906), mort sur le Nil, a lui aussi fourni quelques renseignements sur les mœurs des okapis de la région du Rubi, du Sikati et de l'Uele. Lui également nous dit que les okapis se rencontrent isolément ou par paires, rarement à trois. Ils fréquentent la nuit des endroits marécageux, parcourus par des petits cours d'eau « où croît, dit-il, une plante dont la tige atteint une hauteur de dix pieds (?). Ce sont les jeunes pousses de cette plante qui constituent presque exclusivement la nourriture des okapis. » Gossling ajoute qu'on peut rencontrer ces animaux jusque vers huit heures du matin ; après quoi, ils se retirent sous bois jusqu à la nuit tombante.

L'okapi ayant l'oreille très fine, il est fort difficile pour les chasseurs de l'approcher à portée de fusil. Certains indigènes cependant, d'après Eriksson, notamment les *Wambatti*, parviennent, en se dissimulant, à l'approcher et à le frapper de leurs lances. Mais le plus souvent les nègres s'emparent des okapis à l'aide de trappes. Ils creusent des trous larges et profonds à travers les sentiers suivis par ces animaux et les recouvrent de branchages. M. José Lopez, naturaliste de l'expédition Alexander-Gossling, s'est procuré de cette façon un okapi vivant, dans le district d'Angu (zone du Rubi). Feu le

capitaine Alexander a envoyé en Angleterre une description de ce captif (1906), le seul adulte qui ait été observé vivant par les Européens. Sa dépouille fut rapportée en 1907 en Angleterre, par le lieutenant Boy Alexander.

Le commandant Sillye s'était procuré un jeune okapi vivant, en 1903, dans le Haut-Ituri, mais celui-ci ne tarda pas à s'échapper du poste où il était gardé.

En 1907, les indigènes amenèrent au poste d'Angu (zone du Rubi) un jeune okapi âgé de 8 jours. On ne put le conserver que quelques semaines en vie. J'ai donné dans ma monographie le cliché photographique de ce jeune animal quand il avait un mois. Depuis lors, j'ai reçu une autre photographie et quelques renseignements dus au commandant Laplume.

Je viens d'apprendre que de nouveau un jeune okapi est tenu en captivité au poste d'Angu.

Telles sont les données encore bien incomplètes que nous possédons sur les mœurs de l'okapi.

Ce superbe mammifère, d'après tous les renseignements que nous avons recueillis, est rare dans toute la région de la forêt équatoriale, sauf dans quelques stations du Haut-Ituri. N'ayant d'autre défense que la forêt meurtrière, cette forme si intéressante de Giraffidés est destinée à disparaître bientôt. Nous aimons à croire que le Gouvernement belge sauvegardera, dans toute la mesure de ses moyens, l'existence des derniers spécimens. Comme l'avait fait l'État du Congo, il prendra les mesures les plus sévères pour empêcher la chasse et la capture des okapis.

Position systématique de l'Okapi.

L'intérêt qui s'attache à l'okapi ne résulte pas seulement du fait que c'est un grand mammifère nouveau et rare, mais surtout de ses affinités avec des formes fossiles de l'époque tertiaire. Sir Harry Johnston, en 1901, lorsqu'il fut en possession d'une peau et de deux cornes, avait identifié notre animal à l'*Helladotherium* du Miocène de Pikermi. Il en avait fait, nous l'avons vu, l'*Helladotherium tigrinum*.

Ray Lankester reconnaissant sur ces crânes des bosses frontales paires et impaires et une cavité pré-lacrymale, caractères que ne possède pas l'*Helladotherium*, repoussa avec raison cette identification. D'autre part, la nature et le développement des cornes frontales d'un autre genre fossile, le *Palaeotragus* (Gaudry) du Miocène de Pikermi, le *Samotherium* (F. Major) du Miocène de Samos, ne lui permettaient pas davantage de faire rentrer dans ce genre les exemplaires sans cornes qu'il avait entre les mains.

Les différences avec la girafe étaient plus accusées encore : forme du crâne, développement des sinus, position des cornes paires, position de la bosse impaire, différence angulaire du plan de l'axe basi-cranial avec le plan basi-facial, réduction de l'arc mandibulaire ou incisif, dimension des oreilles.

Ray Lankester créa donc un genre nouveau pour cet étrange animal. Il lui donna son nom indigène latinisé : *Okapia*, conservant le nom spécifique, donné par Sclater, de *Johnstoni*. Complétant la diagnose du savant anglais, nous définirons ce genre comme suit :

Genre *Okapia* : Giraffidé ayant une paire de bosses frontales à position intermédiaire entre celle supraorbitaire des Palaeotragues et celle fronto-pariétale, post-orbitaire des girafes; bosses frontales surmontées de cornillons, recouverts de la peau et dénudés à leur extrémité libre, à la façon d'un petit bois permanent de cervidé; cornillons s'usant et se dénudant progressivement; une protubérance médiane à la base des os nasaux, toujours recouverte par la peau; orbites à bords peu saillants; région post-orbitaire très allongée ayant la même direction que la région préorbitaire; plan de l'axe palatin horizontal formant, avec le plan de l'axe basi-cranial, un angle très aigu; cavités pneumatiques du crâne moins développées que chez la girafe et plus développées que chez le Palaeotrague; incisives et canines très petites, disposées en pinces et non en clavier, en rapport avec un arc mandibulaire étroit; os du tarse (sauf calcaneum et astragale) soudés en un fort *cubo-cunéi-scaphoïde*, avec un premier cunéiforme libre et très réduit.

Forsyth Major avait cru pouvoir établir deux espèces parmi les quelques exemplaires ramenés en Europe en 1902. D'autre part, sir Ray Lankester avait pensé un moment être en mesure de distinguer trois espèces.

La longue et minutieuse étude que j'ai faite sur un plus grand nombre de spécimens m'a amené à ne reconnaître qu'une seule espèce : l'*Okapia Johnstoni*.

J'ai, en effet, démontré, dans ma monographie, qu'aucun des caractères basés sur la forme ou les dimensions du crâne, qu'aucune des particularités de coloration et de dessins de la robe de l'okapi, invoqués comme caractères spécifiques, ne sont fixes. Ce sont des différences dépendant de l'âge et surtout du sexe des individus.

Forsyth Major qui, le premier, eut à sa disposition des exemplaires d'okapi adultes pourvus de cornes, que lui procura l'État Indépendant du Congo, avait bien reconnu les vraies affinités de cet animal. Il occupe une position intermédiaire entre les girafes actuelles et le *Palaeotragus* (*Samotherium*) du Miocène de Pikermi, en Grèce, de l'île de Samos (Asie Mineure) et de Maragtha, en Perse. C'est ainsi que les cornes frontales de l'okapi sont moins antérieures que celles du *Palaeotragus* et plus antérieures que celles de la girafe. Le *Palaeotragus* n'a pas de bosse impaire médiane; elle est frontale chez la girafe; elle est nasale chez l'okapi.

On sait que les pattes de derrière sont plus longues que celles de devant, que l'os de l'avant-bras (radius) est plus court que celui de la jambe (tibia) chez la plupart des antilopes et des ruminants. C'est le contraire chez les girafes actuelles.

Il ressort d'une série de mesures prises par Forsyth Major et par moi que l'okapi occupe, avec *Palaeotragus*, une position intermédiaire entre les vrais ruminants et les girafes, au point de vue de la longueur des membres, qui sont à peu près égaux. Encore, chez certains okapis, le membre postérieur est un peu plus long que l'antérieur.

Nous avons pu nous convaincre, à la suite de Forsyth Major, que l'okapi partage certains caractères avec *Palaeotragus*, d'autres avec la girafe et que, par une troisième catégorie de caractères, il est plus primitif que les Giraffidés fossiles actuellement connus.

Okapia partage avec *Palaeotragus* :

a) Les proportions normales du cou et des membres des *Pecora*;

b) Des cornes chez le mâle;

c) La forme et les proportions moins grêles de l'extrémité antérieure de la tête osseuse;

d) La direction horizontale des prémaxillaires;

e) L'allongement de la région pariétale et son développement horizontal;

f) La direction presque parallèle des plans basi-facial et basi-cranial (Ray Lankester).

Il partage avec la girafe :

a) Un plus grand développement des cavités pneumatiques des os du crâne;

b) Une plus grande fusion des os du tarse;

c) La forme foliacée de la canine caduque.

Il possède, comme caractères intermédiaires entre les deux genres :

a) La position de la paire de cornes frontales;

b) Le développement des sinus;

c) Le développement des vertèbres cervicales;

d) Les caractères des molaires.

Il a, comme caractères plus primitifs que *Palaeotragus* :

a) L'élargissement moindre de la région inter-orbitaire ;

b) La position moins postérieure des orbites;

c) La brièveté du fût des dents.

Il jouit des caractères propres suivants :

a) L'extrémité libre des cornes frontales dénudées prenant les caractères de petits bois et s'usant par l'usage;

b) Un bulle tympanique énorme et un pavillon de l'oreille très grand;

c) Une réduction des os du tarse un peu plus avancée que chez le Palaeotrague et différente de chez la girafe;

d) Une protubérance impaire médio-nasale.

La girafe à cinq cornes de l'Afrique australe (*Giraffa camelopardalis Cottoni*) diffère plus de la girafe du Cap (*Giraffa camelopardalis Wardi*) ou de la girafe du Kordofan (*Giraffa camelopardalis antiquorum*) par les caractères du crâne que l'okapi ne diffère du *Palaeotragus*, quoique nous ne connaissions pas suffisamment la nature des cornes de ce dernier. Les autres caractères différentiels du squelette sont-ils suffisants pour entraîner la création d'un nouveau genre? Si Ray Lankester et, à sa suite, Forsyth Major n'avaient maintenu le genre nouveau, je ne l'aurais pas créé. J'aurais provisoirement considéré l'okapi comme un Palaeotrague, représenté dans la nature actuelle par une espèce nouvelle

Quoi qu'il en soit, l'okapi de la forêt équatoriale africaine vient combler un vide qui existait entre les Giraffidés tertiaires primitifs et les girafes à caractères extrêmes. C'est une forme qui se place entre le genre *Palaeotragus* du Miocène supérieur et le genre *Giraffa*, mais plus rapprochée du premier que du second. A ce titre, l'expression de *fossile qui ressuscite*, du professeur Boule, était juste dans une certaine mesure. Comme le Palaeotrague, l'okapi est une girafe qui n'a pas encore gagné un long cou ni de grandes pattes, mais dont les cornes, d'autre part, représentent déjà un stade plus éloigné de la souche et plus spécialisé dans une direction déterminée. C'est un chaînon de plus que nous pouvons intercaler dans l'histoire généalogique des Giraffidés, reliant ainsi plus intimement les formes primitives miocènes avec celles d'aujourd'hui.

—

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Okapia Johnstoni, Sclater, mâle adulte; figure très réduite.

PLANCHE II.

Les figures sont réduites au 1/4 environ de la grandeur naturelle.

FIG. 1. — Okapi ♂ adulte, dont l'extrémité libre des cornillons était dénudée à la façon d'un petit bois de cerf.

FIG. 2. — Okapi ♂ adulte.

FIG. 3. — Okapi ♀ adulte.

FIG. 4. — Girafe du Cap, ♀ adulte.

FIG. 5. — Okapi ♂ sub-adulte, dont les cornillons ne sont pas encore soudés au crâne et qui étaient complètement recouverts par la peau.

FIG. 6. — Okapi ♂ vieux, dont les cornillons sont usés.

PLANCHE III.

FIG. 7. — Cornillon d'Okapi ♂ sub-adulte, grandeur naturelle.

PLANCHE IV.

Aire géographique et zones de capture de l'okapi.

OKAPIA JOHNSTONI, SCLATER. (1/20 de la gr. nat.)

Fig. 1.

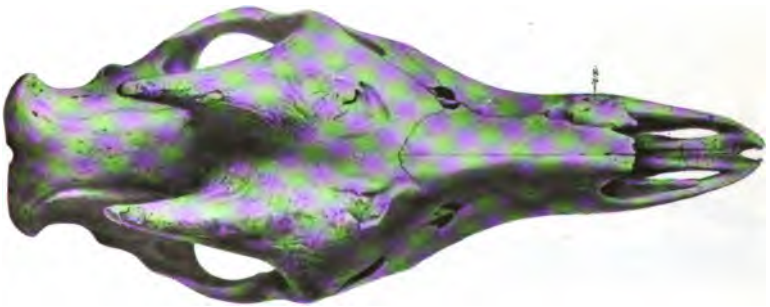


Fig. 2.

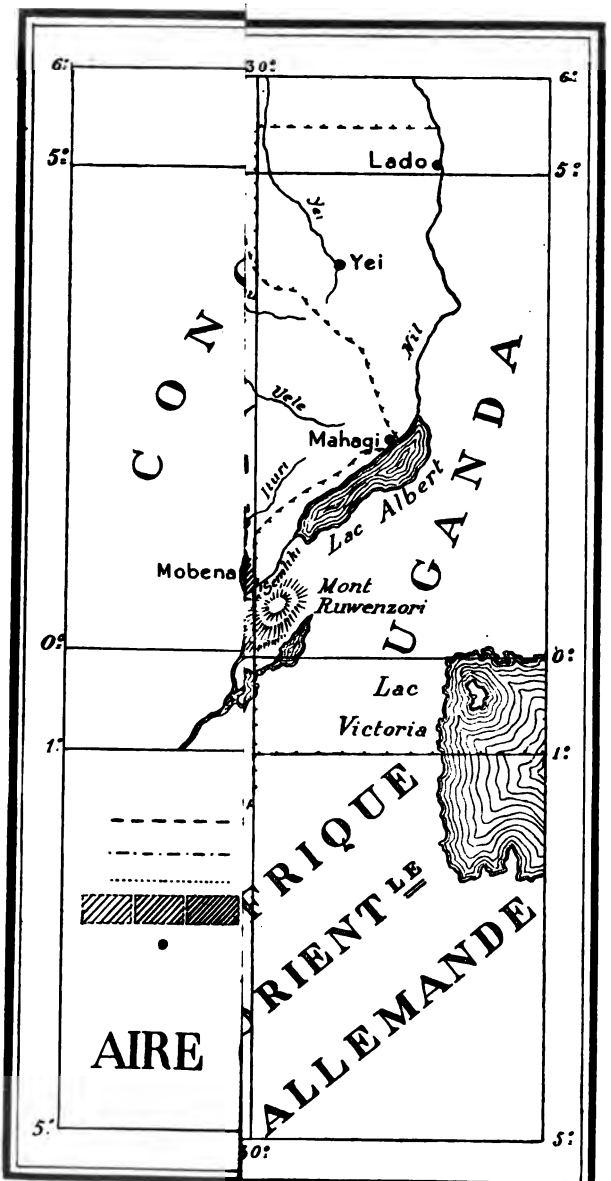
FIG. 3

FIG. 4.

FIG. 5.

FIG. 6.

FIG. 7.


6°
30°
6°
5°
Lado
5°
Yei
Yei
Nil
CON
Uele
Mahagi
Ituri
Lac Albert
UGANDA
Mobena
Mont
Ruwenzori
0°
0°
Lac
Victoria
1°
1°
FRIQUE
RIENT LE
ALLEMANDE
AIRE
5°
30°
5°

L'objet de la démonstration mathématique et la réalité; par C. de la Vallée Poussin, membre de l'Académie.

1. Le mathématicien qui affronte le périlleux honneur de parler de ses études de prédilection devant un auditoire d'élite, mais qui n'est pas exclusivement composé d'adorateurs fervents de la science des nombres, s'expose assurément au danger d'être obscur, fatigant, disons le mot, ennuyeux.

Je n'ose me flatter d'éviter cet écueil, surtout après la conférence si actuelle et si intéressante que vous venez d'entendre. Si donc je crois me conformer aux traditions de cette assemblée en traitant devant vous, plutôt qu'une question de science pure, un point de philosophie mathématique, ce sera mon excuse, et je réclame toute votre indulgence.

On vous a parlé, il y a quelques années, des principes de la mécanique, plus récemment de la portée objective du calcul des probabilités; et on l'a fait avec une autorité et une compétence à laquelle je n'ai pas le droit de prétendre. Le sujet dont je veux vous entretenir aujourd'hui peut présenter avec les précédents quelques rapports d'analogie, assez lointains d'ailleurs : ce sujet sera l'*objet de la démonstration mathématique et la réalité.*

Les mathématiciens ont la réputation de se mettre volontiers en dehors de la réalité, et c'est peut-être un hommage rendu à la puissance de leur faculté d'abstraction. Mais je crains aussi que cette opinion ait souvent, dans l'esprit des praticiens, une portée moins obligeante.

Pour moi, Messieurs, je ne m'occuperai ni des mathématiciens ni des expérimentateurs, mais seulement des mathématiques et de l'expérience, et ce sont les mathématiques elles-mêmes que je me propose d'opposer aujourd'hui à la réalité, ou, plus exactement, l'objet de la certitude mathématique à celui des sciences expérimentales.

Maintenant, qu'appellerons-nous certitude mathématique et d'où peut-elle nous venir?

2. Lorsqu'on veut dire qu'une conclusion quelconque est démontrée d'une manière absolument certaine, on dit communément que cette conclusion est démontrée *mathématiquement*, — mathématiquement, c'est-à-dire avec une précision et une rigueur qui ne laissent place à aucune incertitude. Tel est, en effet, le sens de cet adverbe, dont l'usage est peut-être abusif, car bien d'autres que les mathématiciens ne font pas faute de s'en servir.

Emploieraient-ils, en effet, ce mot sans une légitime défiance s'ils pensaient que l'objet de la certitude mathématique ne peut sortir de l'abstraction pure et que, en dehors des mathématiques elles-mêmes, rien ne peut être démontré mathématiquement?

Et encore, y a-t-il seulement une science où nous puissions prétendre à la précision et à la certitude absolues? Rappelez-vous les paroles de Pascal : « Nous voguons sur un milieu vaste, toujours incertains et flottants, poussés d'un bout vers l'autre. Quelque terme où nous pensions nous attacher et nous affermir, il branle et nous quitte; et, si nous le suivons, il échappe à nos prises, nous glisse et fuit d'une fuite éternelle. » Alors

s'il est vrai que les causes premières nous restent toujours cachées, si toutes nos connaissances sont relatives, c'est-à-dire s'il nous est impossible de préciser les réalités du monde extérieur autrement que par leurs rapports, ou si nous ne pouvons même les concevoir que les unes en fonction des autres, alors rien assurément de ce qui est en dehors de nous-mêmes ne peut être l'objet de cette compréhension rigoureuse, de cette certitude absolue et indiscutable à laquelle nous prétendons en mathématiques.

Cette certitude, nous ne la trouverons pas non plus dans notre intuition sensible, dans notre intuition spatiale en particulier, cette faculté que nous avons de nous représenter des figures à contours plus ou moins arrêtés. Il n'y a là qu'un appel au sens et à l'imagination, une expérience d'une précision au moins douteuse, un fait qui, comme tout autre fait, confine à l'inconnu et au mystère.

La raison, forcée de se replier sur elle-même, est réduite à chercher son appui dans les lois mêmes de l'esprit humain. Mais on ne peut rien construire avec de la logique pure : le raisonnement doit bien s'exercer sur quelque chose. Il faut trouver une notion première, qui soit à la fois générale et parfaitement précise, car il n'y a de science que de ce qui est général et de science mathématique en particulier que de ce qui est parfaitement rigoureux. Mais ces deux caractères semblent s'exclure. C'est une règle bien connue, même des écoliers, que les concepts ne gagnent en généralité que ce qu'ils perdent de leur précision. Il y a une exception pourtant, c'est notre concept du nombre entier qui conserve dans

sa généralité une absolue précision. Et, en effet, la règle que je rappelais il y a un instant s'applique bien aux idées générales qui résultent d'un travail d'abstraction sur des idées plus particulières; elle ne s'applique pas à l'idée du nombre, parce que celle-ci ne résulte pas d'une analyse de cette espèce; bien au contraire, comme le soutiennent Gauss, Kronecker et Dedekind (*), le nombre est une création de l'esprit humain. C'est par une opération de l'esprit que nous *construisons* les nombres entiers, et c'est d'ailleurs ce qui apparaît dans *la loi de formation de tous ces nombres par addition successive de l'unité* — ce qui est leur véritable définition mathématique (**).

Mais je ne pousserai pas à bout l'examen de cette question qui m'entraînerait trop loin, je n'en retiendrai que la conclusion, à savoir que notre besoin de clarté et de rigueur ne trouve sa satisfaction complète, absolue que dans notre intuition du nombre pur.

C'est donc sur cette abstraction, et sur cette abstraction seule, le nombre entier, qu'il faut faire reposer, pour lui assurer la rigueur, l'édifice entier de la science exacte. Et si vraiment il en est ainsi, notre conclusion s'imposera, à savoir que le seul objet de la certitude

---

(*) *Encyclopédie des sciences mathém.*, t. I, vol. 1, fasc. 1, p. 8.

(**) C'est sur cette définition que repose le mode de démonstration par récurrence qui caractérise l'*arithmétique*. On peut opposer à celui-ci le mode de démonstration par *passage à la limite* qui caractérise l'*analyse*.

M. Poincaré a montré le rôle du raisonnement par récurrence dans son ouvrage sur *La science et l'hypothèse* (pp. 19 et suiv.). Il me semble cependant qu'il donne à ce mode de raisonnement un caractère trop exclusif.

mathématique se trouve dans les propriétés des nombres entiers et de leurs combinaisons multiples, — hors de tout contact avec le monde extérieur.

3. Ainsi, par cela même qu'elle n'emprunte à l'expérience sensible aucun des éléments de sa certitude, on accorde aisément que l'arithmétique est absolument rigoureuse. Mais l'analyse et la géométrie?

L'analyse qui s'occupe de la quantité continue, la géométrie qui bâtit ses constructions dans l'espace, n'empruntent-elles pas à l'expérience leurs premières données? Comment pourront-elles s'en dégager, afin de prétendre à cette certitude que ni les sens ni l'intuition ne peuvent nous donner? Nous allons examiner très brièvement la question.

La grandeur continue est celle que nous concevons comme indéfiniment divisible en parties de même espèce. Que ce concept soit d'origine expérimentale, c'est incontestable. La première idée nous en est inspirée par les grandeurs mesurables de la nature. Mais cette idée se précise, plus particulièrement grâce à notre intuition spatiale, dans notre représentation de l'étendue linéaire. C'est généralement à cette représentation de la longueur comptée sur une droite que nous cherchons à ramener toutes les autres grandeurs, parce que c'est la représentation la plus simple, la plus précise et la plus répandue.

Cependant, ce n'est encore là qu'une image sensible et, comme telle, incapable de nous conduire à la rigueur mathématique. On ne s'en est pas toujours inquiété et longtemps on s'est fié à cette intuition, plus ou moins précisée par des postulats, pour fonder sur cette repré-

sentation la théorie des limites (*). Ce n'est que dans le courant du siècle dernier qu'on a donné à cette théorie la même rigueur qu'à l'arithmétique; et cela, comme nous venons d'en reconnaître la nécessité, par l'élimination de toutes les données expérimentales, sauf celle du nombre pur (**).

Cette transformation peut se caractériser par un mot, qui est dû à Kronecker, l'*arithmétisation* (***) de l'analyse,

---

(*) Pour tous les mathématiciens du XVIIe et du XVIIIe siècles, le fait, pour une suite infinie de nombres quelconques donnés, d'avoir ou non une limite, résultait de notre intuition spatiale; cette intuition nous oblige à admettre l'existence de la limite ou à la rejeter, suivant les cas, lorsque nous interprétons géométriquement les nombres de la suite. On admettait, par exemple, comme évident *a priori* que tout arc de courbe défini géométriquement a une longueur déterminée... (PRINGSHEIM, dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. I. vol. 1, fasc. 2, p. 179.)

(**) M. Pringsheim exprime le même avis (*Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. I, vol. 1, fasc. 1, p. 157) : « Le nombre de ceux qui estiment que l'intuition sensible conserve toujours quelque chose de flottant et d'imprécis a beaucoup augmenté dans ces dernières années; si, comme tout porte à le croire, cette opinion s'accentue encore, aucune doctrine analogue à celle de G. Ascoli (c'est-à-dire basée sur l'intuition de la grandeur) ne parviendra à se substituer à la doctrine arithmétisante; la caractéristique de toute doctrine arithmétisante est précisément de suppléer à l'imprécision de l'intuition spatiale en constituant *a priori*, sans faire aucun appel à cette intuition, non plus qu'à toute autre intuition sensible, l'échelle des nombres réels pour faire correspondre ensuite à cette échelle, au moyen d'un postulat, la suite des points d'une droite; la notion de droite revêt ainsi le caractère de netteté et de précision *qui lui manquait*. » Voy. aussi F. KLEIN, *Math. Annal.*, 37 (1890), p. 572.

(***) Le mot *arithmétiser* est dû à Kronecker, qui l'a employé dans le sens restreint conforme à sa doctrine. [*J. Reine u. angew. Mathem.*, 101 (1887), p. 338.]

et dans cette doctrine arithmétisante, le premier concept à reconstruire était donc celui de la grandeur continue. On y est arrivé en créant par des définitions verbales le *continuum des nombres abstraits*, qui est le véritable continu mathématique.

Ce continuum est constitué par l'ensemble de tous les nombres, tant rationnels qu'irrationnels, dont la définition a été mise sous des formes à peu près équivalentes par Kronecker et par Dedekind. Cette définition n'emprunte plus rien à l'expérience sensible, puisqu'elle revient en définitive à certains modes de classement des nombres entiers.

Ainsi, le continu mathématique est une création artificielle de l'esprit, n'ayant aucune objectivité dans le monde extérieur, mais, par contre, nous pouvons raisonner sur lui avec une entière rigueur, — abandonnant l'autre continu, le physique et l'intuitif, aux méditations et aux discussions sans issue des philosophes.

Mais voici qui est peut-être plus remarquable encore parce que c'était plus difficile.

Ce que l'on a fait pour l'analyse, on l'a fait aussi pour la géométrie. Qu'il me soit donc permis, en passant, de saluer la mémoire de notre illustre et regretté confrère Joseph De Tilly, qui, dans ses études de géométrie abstraite, est parvenu l'un des premiers à reconstruire toute la géométrie sans faire une seule fois appel à notre intuition de l'étendue. Pour y parvenir, il a suffi de substituer aux concepts expérimentaux de la géométrie, des êtres de pure raison, créés par une définition tellement choisie, que ces êtres idéaux aient entre eux les rapports mêmes que l'on prétendait découvrir dans les êtres concrets.

Or, c'est tout ce qu'il faut, puisque ce sont ces rapports seuls qui intéressent le mathématicien.

Bien plus, cette substitution présente le double avantage de nous débarrasser de toutes les incertitudes d'ordre expérimental, et ensuite de déblayer définitivement le vaste champ des mathématiques de toute la métaphysique qui l'obscurcissait.

Mais ceci ne fait pas l'affaire des philosophes.

Ce que vous gagnez en rigueur, disent-ils, vous le perdez en objectivité. Votre science est impeccable, mais en le restant elle s'interdit tout contact avec le monde extérieur. Vous avez substitué aux êtres intuitifs des êtres artificiels auxquels vous donnez une définition rigoureuse. Et après? Il reste à montrer que l'objet réel et concret répond bien à votre définition nouvelle. C'est alors seulement que vous pourrez affirmer qu'il jouit de la propriété en question. Vous n'avez fait que déplacer la question.

M. Poincaré a prévu cette objection et il répond (*): L'objection n'est pas exacte; on n'a pas déplacé la difficulté, on l'a divisée. La proposition qu'il s'agissait d'établir se composait en réalité de deux propositions différentes, mais que l'on n'avait pas distinguées tout d'abord. La première était une vérité mathématique et elle est maintenant rigoureusement établie. La seconde était une vérité expérimentale. L'expérience seule peut nous apprendre que tel objet réel et concret répond ou ne répond pas à une définition abstraite. Cette seconde vérité n'est pas démontrée mathématiquement,

---

(*) *La valeur de la science*, p. 23.

mais elle ne peut pas l'être, pas plus que ne peuvent l'être les lois empiriques des sciences physiques et naturelles. Il serait déraisonnable de demander davantage.

Croyez-vous que cette réponse fera le compte de nos philosophes? N'y comptez pas. On ne renonce pas si aisément au plaisir de raisonner *mathématiquement* sur la réalité. — Non, répondront-ils à l'éminent académicien, vous nous oubliez; il n'y avait pas deux questions seulement, l'une mathématique et l'autre expérimentale, il y avait aussi une question métaphysique, la plus importante, la seule même qui nous intéresse, c'est celle de l'objectivité ou de la réalité des idéaux géométriques. Vous en faites vraiment trop bon marché et nous avons, pour votre géométrie, plus d'estime que vous n'en avez vous-mêmes, si nous pensons que, dans toute sa rigueur, elle a une portée objective.

Que M. Poincaré ne croie pas à cette objectivité, c'est ce qui est déjà suffisamment établi par le fait qu'il ne pose pas la question; et je n'y crois pas plus que lui. Mais qu'il y ait beaucoup de personnes, même parmi les mathématiciens, qui y croient, c'est encore possible. Et aussi bien, puisque j'en suis arrivé à cette question et qu'il faut m'aventurer sur le terrain de la métaphysique, je ne reculerai pas devant l'expression complète de ma pensée.

4. Tout d'abord, qu'est-ce donc que *croire à l'objectivité des idéaux géométriques?* En quoi peut consister cet acte de foi?

Voici le langage qui m'a déjà été tenu plus d'une fois par des philosophes de l'école objectiviste.

Je reconnais que je ne peux me représenter ni le point, ni la droite, ni aucune des figures exactes de la géométrie, c'est entendu. Mais je peux me représenter une ligne de plus en plus mince et de plus en plus droite, un point de plus en plus petit et de plus en plus précis : l'*idéal géométrique* est la limite de cette suite de représentations, limite où toute représentation disparaît, qui n'existe donc plus en tant que représentation, mais qui a le même droit à l'existence que la représentation elle-même : je dis donc qu'elle existe. Je ne saurais pas le vérifier, moins encore le démontrer; mais j'y crois, j'y crois absolument, et d'ailleurs vous y croyez vous-même.

Nous sommes d'accord, je pense, que cette argumentation n'en est pas une, et que les prémisses, fussent-elles vraies, n'entraînent pas la conclusion. Mais, il y a plus, les prémisses sont l'expression d'une erreur, elles reposent sur la confusion de deux choses essentiellement différentes : l'*exact sensible* et l'*exact géométrique*.

Il est faux de dire que nos représentations sensibles n'atteignent pas leur limite d'exactitude.

Si nous avons de bons yeux, une arête de maison vue d'un peu loin nous donnera l'impression d'une droite quand nous n'y apercevrons plus de défaut; et, après cet exact sensible, il n'y a pas d'au delà, il n'y a pas d'image plus exacte de la droite géométrique; et, comme personne ne soutient que cet exact sensible soit l'exact géométrique, c'est donc que celui-ci n'est pas une limite de représentations sensibles.

D'autre part, que faut-il penser de cette prétention de se représenter une ligne de plus en plus mince, un point de plus en plus petit, ou encore une longueur qui tend

vers le zéro mathématique? Elle méconnaît les conditions mêmes de la sensibilité. Tant que nous avons une représentation nette de la grandeur linéaire, nous pouvons la partager en deux. Mais cela ne va pas ainsi indéfiniment, parce que la netteté de l'image s'altère peu à peu, si bien qu'en divisant de plus en plus la représentation, on finit par la détruire, et j'en conclus encore une fois que les idéaux géométriques ne sont pas des limites de représentations.

Mais on pourrait peut-être m'accuser de prêter aux philosophes objectivistes des idées qu'ils n'ont pas. Pour éviter tout malentendu, je vais, si vous le voulez bien, m'adresser à l'un d'eux, mathématicien de premier ordre, Paul du Bois-Reymond, qui a écrit tout un volume sur la question (*).

Dans cet ouvrage, le géomètre allemand met aux prises deux interlocuteurs, l'un, qu'il appelle l'idéaliste, croit à l'objectivité des idéaux, l'autre, qu'il appelle l'empiriste, n'y croit pas.

La discussion se poursuit entre eux pendant une centaine de pages. Vous me reprocheriez certainement de ne pas vous faire connaître la conclusion que l'auteur lui-même tire de ce long débat. La voici, et je ne pense pas qu'elle soit de nature à vous satisfaire plus que moi, puisque cette conclusion est qu'il n'y en a aucune.

L'observation la plus tenace ne m'a pas conduit, dit-il (p. 22), au delà de la constatation que voici :

« Il y a pour l'esprit deux manières tout à fait dis-

(*) *Théorie générale des fonctions*. Traduction française par G. Milhaud et A. Girot (Paris), Imprimerie niçoise (Nice), 1887.

» tinctes de saisir les choses (la manière de l'idéaliste et
» celle de l'empiriste), qui ont un droit égal à être prises
» pour l'intuition fondamentale de la science, parce
» qu'aucune des deux n'apporte de résultat absurde, *du*
» *moins tant qu'il s'agit des mathématiques*. Et, lorsque
» dans d'autres sciences, l'une de ces deux formes de
» pensée semble aboutir à des contradictions, la majorité
» des penseurs a préféré jusqu'à nos jours supporter cet
» inconvénient plutôt que de renoncer à l'intuition cor-
» respondante du monde. »

A lire cette conclusion, on pourrait croire que les deux thèses, celle de l'idéaliste et celle de l'empiriste, aboutissent toutes les deux à des contradictions. Mais quand on parcourt l'ouvrage, et malgré le faible de l'auteur pour l'idéalisme, il apparaît bien que les contradictions se trouvent toujours du même côté et du côté de l'idéaliste.

Ce n'est pas que l'ouvrage de Paul du Bois-Reymond soit dépourvu de mérites. Bien au contraire, il en a de très sérieux, sinon ce ne serait pas la peine d'en parler. Il y a assurément d'excellentes remarques dans l'argumentation de l'empiriste en particulier, et j'en ai même fait mon profit (*); mais, pour le moment, c'est à l'idéaliste seul que je veux emprunter l'exposé de sa doctrine.

Écoutez, voici le *credo* de l'idéaliste (p. 71) :

« Comme idéaliste, je crois *à la réalité de mes idéaux*,
» je crois à la réalité objective de mes idées poursuivies
» jusqu'aux limites extrêmes de ma pensée, quoique, en

(*) La distinction entre l'exact sensible et l'exact géométrique et le rôle du concept de grandeur exacte dans la conception idéaliste sont très bien mis en évidence par l'empiriste.

» vérité, comme l'infini, elles ne soient pas représentables.
» Je crois à l'infini et à l'*existence objective d'images géométriques précises* ou plus correctement à leur possibilité, car
» cette possibilité signifie que seule des circonstances
» secondaires et accessoires peuvent s'opposer à leur exis-
» tence, comme on dit qu'il est possible que deux montres
» marchent parfaitement ensemble. Et toutes conclu-
» sions qui reposent sur de pareilles hypothèses doivent
» tomber dans le domaine de la possibilité, ou bien, sui-
» vant leur nature, dans celui de la réalité. »

Plus loin (p. 94), l'idéaliste nous expose les fondements de sa croyance :

« La représentation d'espace vide est, sans doute, une
» limite de représentations réelles, mais on ne peut dire
» si elle est réelle elle-même (*), c'est-à-dire s'il y a ou y
» aura un espace dans lequel les corps se meuvent exac-
» tement suivant la loi de l'inertie (**), qui ne laisse
» passer aucun rayon de lumière, dans lequel aucune
» force ne pénètre, bref, si grâce aux acquisitions que
» l'avenir réserve à la physique, il y aura des pompes
» destinées à supprimer les impondérables... »

(*) L'auteur entend évidemment par *représentation réelle,* la représentation d'une chose réelle. Il s'agit donc de savoir si le vide absolu est une réalité.

(**) Comme je le ferai remarquer plus loin, nous ne pouvons avoir du *vide absolu* aucune représentation; les idées du *mouvement* et de l'*inertie* dans un tel espace me paraissent complètement dépourvues de sens, le vide absolu étant par lui-même la négation de toute relation. L'auteur confond ici la *représentation d'espace* (réel) *vide* avec ce que j'appelle plus loin l'*espace représentatif*.

« Dans tous les cas, je pourrai donner l'espace vide » comme fondement de mes considérations, car toute » chambre est l'image, la représentation réelle d'un » espace, et comme je peux retirer en grande partie ce » qu'elle contient, supposé que je dispose de moyens » suffisants, j'ai la représentation de cet espace vidé de » tout ce qu'il contient de matériel, limite toute natu- » relle de nos représentations réelles, et la science » devrait renoncer à beaucoup, si elle se refusait à » admettre cette limite. Je pars ainsi de l'espace vide ou » plus généralement de l'espace homogène.

» Évidemment dans tout espace vide non seulement » on peut introduire par la pensée des figures sans nom- » bre, mais encore elles y sont réellement. Dans ce bloc » de marbre est taillé notre portrait, puisque le sculp- » teur peut, avec son ciseau et suivant son talent, attein- » dre une ressemblance plus ou moins grande. De même, » j'affirme que dans cet espace que j'imagine homogène, » toute figure de forme précise non seulement peut être » supposée, mais encore est contenue réellement...

» L'esprit ne trouve pas sa satisfaction dans la matière » homogène et continue, il la décompose et la ramène à » ses éléments formels vides de tout contenu..., alors » ces éléments, pour atteindre la limite dernière de » la pensée, doivent être saisis tout simplement comme » des images exactes, comme des surfaces, des lignes, » des points idéaux. Si l'on veut s'en tenir aux points, » leur distance est une ligne droite qui a tout au moins » des extrémités exactes, et c'est là l'hypothèse fonda- » mentale du système idéaliste. »

5. Telle est la thèse idéaliste. Elle se ramène donc aux deux affirmations suivantes :

1° L'idée de l'espace homogène, c'est-à-dire géométrique, s'obtient par un simple travail d'abstraction sur nos représentations. Nous débarrassons par la pensée l'espace de tout ce qu'il contient de matériel; alors il nous reste une représentation d'espace vide qui est l'espace géométrique ;

2° Dans cet espace géométrique existent des figures géométriques exactes et, en particulier, des points dont les distances sont des grandeurs exactes, etc.

Eh bien, je n'aperçois dans ces affirmations que pure illusion.

Je me demande d'abord si nous avons une représentation de l'espace *vidé de tout ce qu'il contient de matériel.* L'espace vidé de tout contenu, c'est une idée vidée de tout contenu, un pur néant, la négation de toute représentation.

Mais pour être clair, je me vois obligé de distinguer deux notions différentes de l'espace. J'appellerai la première l'*espace réel*, l'autre l'*espace représentatif*.

L'*espace réel*, au dire des philosophes qui en parlent, serait ce qui subsiste de l'étendue concrète, après qu'on y a fait le vide absolu de tout ce qu'elle peut renfermer de matériel. De cet espace-là nous ne savons pas grand'-chose, non pas même s'il a une existence quelconque, et il est aussi insaisissable à nos sens qu'à nos raisonnements. Seuls les corps peuvent être l'objet de nos perceptions et c'est sur eux seuls que nous pouvons expérimenter et par les seuls procédés approximatifs que la physique met à notre disposition. Nous n'avons aucune idée de l'*espace réel*, *vide* dans le sens absolu du mot.

Ceux qui, comme l'idéaliste de Paul du Bois-Reymond, prétendent raisonner sur lui, confondent le prétendu espace réel avec l'espace représentatif ou intuitif qui est tout autre chose.

L'espace représentatif, lui, est une création, un produit de notre imagination où j'aperçois le concours de trois sortes d'images : images visuelles, images tactiles et images motrices. S'il m'est permis d'employer le langage des mathématiciens, je dirai que c'est la représentation d'un ensemble de points formant un continu physique à trois dimensions. Les éléments de ce continu sont donc des *points*, des points ayant une individualité propre et parfaitement distincts les uns des autres; et ces points sont bien quelque chose : c'est là l'essentiel, c'est là ce qui différencie nettement l'espace représentatif du vide absolu de l'espace réel, lequel est insaisissable. Mais que sont ces points de l'espace représentatif? Quelque chose de matériel assurément, mais quoi? La question est un peu délicate, mais elle vaut la peine qu'on l'examine (*).

Lorsque je me représente un objet, je me le représente à l'aide des images de couleur et d'impénétrabilité qui m'attestent son existence. Mais ces images à elles seules ne me permettent pas d'extérioriser l'objet, de lui assigner son lieu, sa position dans l'espace; il faut pour cela associer aux précédentes une troisième sorte d'images, les images motrices. *Localiser un objet*, comme le dit excellemment M. Poincaré, *c'est se représenter les mouvements qu'il faut faire pour atteindre cet objet.*

Partant, on peut se figurer sans trop de peine ce que

(*) V. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, p. 106.

c'est qu'un point de l'espace représentatif. Lorsqu'un objet occupe une certaine position par rapport à nous, cette position ou ce point — si l'objet est assez petit pour être assimilable à un point — cette position ou ce point est caractérisé par un groupe de mouvements, par exemple, par le groupe des mouvements qui nous permettraient de toucher l'objet du doigt. Supprimons maintenant la représentation de l'objet, c'est-à-dire les images de couleur et d'impénétrabilité, il ne nous restera plus que la représentation d'un groupe de mouvements, ou plus exactement — si l'on ne présuppose pas la notion d'espace — la représentation des sensations musculaires qui correspondent à ces mouvements. Tout ce qu'il y a de réel dans la représentation d'un point de l'espace intuitif revient donc à la notion d'un certain groupe de sensations musculaires.

L'espace intuitif lui-même est constitué par l'ensemble de tous ces points, et c'est un milieu, un canevas dans lequel nous repérons nos représentations des objets matériels.

La représentation de l'espace vide de tout corps ne devrait plus renfermer que des images motrices, toute représentation de couleur ou d'impénétrabilité étant bannie. Mais il y a, sans doute, bien peu de personnes qui aient, sur leurs représentations, un pouvoir de dissociation suffisant pour isoler complètement les images motrices. Il leur faut garder au moins une trace, comme le souvenir des autres images, pour pouvoir synthétiser autour d'elles leurs groupes de mouvements. Pour ces personnes-là, l'espace représentatif va prendre, par conséquent, la forme d'un corps très subtil, d'un corps amené au maximum de transparence et de pénétrabilité,

dans lequel elles pourront ensuite construire et repérer toutes les représentations géométriques particulières, de même que l'on peut tracer toutes les figures que l'on veut sur une feuille de papier blanc.

On pourrait encore comparer l'espace ainsi conçu à un liquide sans masse, transparent et tranquille, dans lequel les corps se meuvent comme au sein d'un vaste océan. Cette représentation est si familière que les personnes peu réfléchies la prennent volontiers pour une représentation de l'espace réel et veulent faire de cette sorte d'*éther* une manière d'espace absolu.

Mais ce qui précède suffit pour dévoiler l'illusion. Cet espace représentatif est *purement relatif à notre corps*, il n'a d'autre support que notre propre sensibilité, c'est nous qui en sommes le centre et nous l'emportons avec nous, ses points n'ont d'existence et d'individualité que dans nos fibres nerveuses. Notre imagination seule en a fait tous les frais.

Maintenant, l'*espace vide* que se représente l'idéaliste, qui contient des points et des lignes *comme un bloc de marbre contient une statue*, c'est bien l'espace précédent, l'espace intuitif. C'est bien l'espace qu'il se représente, mais ce n'est pas celui dont il veut parler, dans lequel il prétend découvrir des points et des lignes géométriques, des distances exactes. Celui-ci c'est l'espace géométrique dont l'autre n'est qu'une image très grossière, comme l'exact sensible est l'image imparfaite de l'exact géométrique. En d'autres termes, l'espace géométrique est une construction de notre raison, c'est l'*idéal* de l'espace représentatif, et cet idéal n'a aucune réalité ni en nous, ni hors de nous.

J'affirme en effet que le concept de *distance exacte* en

particulier, lequel est la base fondamentale de la géométrie idéale, est un pur produit verbal de la pensée, de sorte que le concept d'espace géométrique, loin d'être antérieur à cette notion, comme le voudrait l'idéaliste, la présuppose au contraire.

Revenons, en effet, sur nos représentations sensibles; on s'apercevra bien vite que nous n'en avons aucune de la grandeur homogène et exacte.

D'abord, aucune de nos sensations ne varie d'une manière purement quantitative, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de changement dans l'intensité de nos sensations qui ne soit, en même temps, un changement dans sa qualité. En portant 10 kilos, nous n'éprouvons pas dix sensations pareilles à celle que nous donne un poids de un kilo, nous éprouvons une sensation plus violente, mais autre. Comme toutes nos images intuitives participent de ce même caractère, nous n'avons pas de représentation *sensible* de la grandeur continue homogène. Nous ne formons ce concept qu'en associant à une représentation réelle une définition purement verbale.

D'autre part, il est bien vrai que nous n'apercevons pas de vide dans l'échelle de nos sensations; mais il est non moins vrai qu'entre deux sensations distinctes nous ne pouvons pas en intercaler une infinité de discernables. C'est, comme vous le savez, la loi de Weber : deux excitations peu différentes produisent la même sensation. Nous pouvons donc passer d'une sensation à une autre par une suite limitée de sensations dont aucune ne se distingue de la précédente.

Si nous plaçons notre montre à une distance suffisante de notre œil, nous ne verrons plus marcher les aiguilles, et cela veut dire que nos impressions consécutives sont

les mêmes. Mais, après quelques minutes, notre impression sera complètement changée et nous apercevrons que les aiguilles ont marché. La conclusion, c'est que deux sensations suffisamment peu différentes, mais encore distinctes, peuvent être indiscernables d'une même troisième : les lettres représentant ces sensations, ce fait s'exprimera par les relations

$$A = B, \qquad B = C, \qquad A < C$$

et telle est, dit M. Poincaré (*), la formule du continu physique.

Donc nos sensations et, par suite, nos représentations ne peuvent être des grandeurs mathématiques exactes : elles conservent toujours quelque chose de vague, de flottant, d'indéterminé. Il le faut bien, sous peine de contradiction. Ainsi, nous n'avons pas de représentation de la grandeur continue exacte et nous ne nous formons ce concept qu'en joignant encore une fois à une représentation réelle une définition purement verbale.

Notre intuition spatiale qui résulte de l'association d'images sensibles possède les mêmes caractères que ces images : elle garde toujours quelque chose de vague, de flottant, d'indéterminé, et j'ajoute que ce caractère d'indétermination est sans doute la condition même de sa possibilité. Je veux dire par là qu'une réalité à la fois *continue* dans le sens physique et *exacte* dans le sens mathématique me paraît quelque chose de contradictoire en soi. Et, en effet, l'idéaliste qui l'admet est conduit à des conséquences auxquelles il m'est impossible de souscrire (**).

(*) *Science et hypothèse*, p. 35.

(**) P. du Bois-Reymond, *Théorie générale des fonctions*, p. 73.

Je crois à l'infini, disait-il tout à l'heure, et, en effet, il y croit. Il croit que le nombre des points situés sur une droite, *dans la réalité objective*, est infini. Il croit que l'étendue se décompose en une infinité d'étendues partielles dont aucune n'est finie; il croit que l'*infiniment petit* existe réellement. Il croit tout cela, le malheureux, et bien d'autres choses encore, et c'est parce qu'il est logiquement forcé d'y croire que je rejette son système.

Je me crois donc autorisé à conclure.

Les figures sensibles présentes à l'esprit du géomètre ne sont que les signes des êtres abstraits sur lesquels il raisonne, comme les mots sont les signes des idées, avec cet avantage que les représentations géométriques sont les images plus ou moins fidèles des idéaux dont elles tiennent la place. Les images sont dans l'étendue, mais les idéaux n'y sont pas. C'est ce que M. Poincaré a exprimé par une comparaison bien topique.

Le géomètre, dit-il, cherche toujours à se représenter les figures qu'il étudie, mais ses représentations ne sont pour lui que des instruments; *il fait de la géométrie avec de l'étendue comme il en fait avec de la craie* (*).

6. Le géomètre fait de la géométrie avec de l'étendue comme il en fait avec de la craie. Assurément, les tout premiers fondateurs de la géométrie ne devaient pas s'en douter. Ils croyaient certainement que leurs définitions s'appliquaient à des objets réels, conçus comme limites réellement existantes ou tout au moins possibles de leurs représentations intuitives. Mais le conflit entre l'intuition

(*) *Science et hypothèse*, p. 29.

et l'entendement a éclaté dès que le raisonnement a porté sur des définitions rigoureuses.

L'histoire nous en a gardé le souvenir. Il a suffi de la découverte des incommensurables pour mettre l'intuition en déroute. Nous pouvons nous en fier sur ce point au plus pénétrant des historiens de cette époque lointaine.

« A l'origine, écrit Paul Tannery (*), on fondait la corrélation entre la géométrie et l'arithmétique sur la proportion géométrique dans l'hypothèse de la commensurabilité de toutes les grandeurs, *hypothèse certainement aussi naturelle qu'elle est fausse*... La découverte de l'incommensurabilité par Pythagore dut donc causer en géométrie *un véritable scandale logique.* » Comment? il y a des grandeurs qui n'ont pas de commune mesure. Mais c'était contraire aux faits les mieux établis, à l'intuition la plus immédiate, au plus vulgaire bon sens de ce temps-là (**).

Après la déchéance des sciences grecques, pendant toute la durée du moyen âge et même jusqu'à l'aurore du

---

(*) *La géométrie grecque.* Paris, 1887, p. 97.

(**) Les mathématiques grecques étaient-elles aussi rigoureuses que les nôtres? Si l'on se borne à la théorie générale des proportions du cinquième livre d'Euclide, on peut répondre *oui*, parce que cette théorie est complètement équivalente, quant à sa forme, avec notre théorie des nombres irrationnels. Seulement, nous avons le droit d'être plus sûrs de cette rigueur que les Grecs, parce que les Grecs raisonnent sur la *grandeur en général.* Celle-ci est définie par les propriétés tirées de notre intuition sensible, mais on y ajoute la *condition d'être exacte,* et on est en droit de se demander si cette condition n'introduit pas de contradiction. (Voyez aussi la note p. 1136.)

dernier siècle, le sens complet de la rigueur se perd. Après la découverte de l'analyse infinitésimale et pendant toute la durée du XVIIIe siècle, les progrès de l'analyse se fondent encore sur la considération de la grandeur continue intuitive, et, faute de définitions rigoureuses, la raison et l'intuition font assez bon ménage. Mais, au cours du XIXe siècle, le sens de la rigueur renaît, et derechef les hypothèses les plus universellement acceptées sont reconnues *aussi fausses qu'elles avaient été naturelles*.

Je n'insisterai pas sur le scandale provoqué par les fonctions continues sans dérivées et les courbes sans tangentes, — qui ont cependant le même droit à l'existence que les autres, comme aurait dit du Bois-Reymond. On en a suffisamment parlé. Il me suffira de dire que c'est d'alors que date la construction du *continuum des nombres abstraits*. C'est de l'étude directe de ce continuum qu'est sortie la théorie toute récente des ensembles de M. Cantor, qui semble un perpétuel défi à l'intuition. Depuis lors, le nombre de ceux qui croient à l'objectivité des idéaux géométriques a beaucoup diminué, mais l'enseignement est encore tout imprégné de cette croyance. C'est ainsi qu'un principe comme celui-ci : *toute grandeur croissante et bornée a une limite* est souvent donné comme un axiome intuitif. Mais je ne voudrais pas m'insurger contre ce qui peut être utile comme procédé d'enseignement. « Comme il y a une âme de bonté dans les choses mauvaises, il y a une âme de vérité dans les choses fausses (*). » C'est bien le cas de le dire, et les

(*) HERBERT SPENCER, *Premiers principes*, traduction française, p. 1.

professeurs qui ne s'en doutent pas doivent être terriblement méticuleux.

7. Cette dernière réflexion me suggère aussi la conclusion à donner à cet entretien. Après avoir dit ce que l'on ne doit pas demander à l'intuition : la rigueur, il me reste à dire ce qu'il faut attendre d'elle. Après avoir fait la part de la raison pure, il me reste à faire celle de l'imagination, à lui assigner son rôle, et vous verrez que ce rôle est encore assez beau.

Nos représentations sensibles, ai-je dit, ne sont qu'un instrument; j'ajoute maintenant que cet instrument est indispensable. Sans lui, il n'y aurait pas de science mathématique, et du jour où cet instrument viendrait à manquer, la science cesserait aussitôt de progresser.

Sans l'imagination qui donne un corps à nos concepts, nous serions bientôt pris de vertige au milieu de nos symboles vides et notre propre pensée nous échapperait à nous-mêmes. C'est notre intuition de l'espace qui fournit, par analogie, le meilleur langage à l'analyse; elle fait apparaître des rapports cachés, suggère mille artifices et mille détours imprévus. C'est l'imagination qui est le principal instrument d'invention, la source de toutes les découvertes, et il est impossible de se passer d'elle.

C'est donc à l'imagination que revient la première place parmi les facultés du géomètre, car l'invention est la voie unique du progrès et, en mathématiques, si le progrès n'est pas tout, c'est presque tout. Le progrès est la condition de l'existence : une science qui ne progresse pas est une science qui décline quand ce n'est pas une science qui meurt.

La vérité mathématique cesserait bientôt de nous intéresser, bientôt peut-être cesserions-nous même de la comprendre, si ce n'était une vérité féconde, une lumière jetée sur la route pour conduire à d'autres vérités et celles-ci à d'autres encore. L'esprit humain, « plus fait, comme l'a dit Galois, pour chercher la vérité que pour la connaître », trouve plus de satisfaction dans la découverte que dans la contemplation de la vérité. La vérité qu'il reconnaît peut le ravir un instant, mais incomplète et restreinte, elle ne peut longtemps le retenir.

Pourquoi le regretter, si c'est la condition du progrès? La science est un arbre chargé de branches. Celles qui sont stériles, comme des rameaux morts, sont destinées à tomber et à disparaître tôt ou tard dans l'oubli.

Il y eut autrefois un peuple, ingénieux entre tous. Ce peuple pouvait se vanter d'avoir créé à lui seul toute la science ancienne. Parmi ses géomètres, Euclide, Appollonius et Archimède ont laissé des œuvres qui restèrent sans rivales jusqu'au milieu des temps modernes. Mais ce même peuple, qui avait enfanté ces génies immortels, s'est soustrait, après eux, à la loi du progrès. Désespérant de mieux faire, les géomètres de la décadence s'enfermèrent dans l'étude de leurs modèles, sans autre ambition désormais que de les bien comprendre. Vous savez ce qu'il en advint. Peu à peu le sens même du texte s'altéra, finit par se perdre, et quelques siècles suffirent pour tout obscurcir. Ce n'est que de nos jours que l'on put pénétrer de nouveau la profondeur de ces monuments de la pensée antique; mais il fallut, pour cela, qu'une science jeune et vivante, créée sur de nouvelles bases, parvînt par elle-même aux mêmes vérités et leur

donnât une expression rajeunie. Alors seulement on put reconnaître, dans l'œuvre des anciens Grecs, l'expression d'une science parfois presque égale à la nôtre (*).

Cet exemple, auquel on pourrait en joindre d'autres, est la condamnation d'une instruction trop dogmatique. Puisque le travail personnel est la sauvegarde de l'esprit scientifique, la principale qualité d'un bon enseignement sera donc d'apprendre la manière de travailler. Que l'on fasse donc appel à l'intuition sensible dans l'enseignement, on ne le fera jamais trop. C'est en éveillant ses représentations, en les rapprochant, en les éclairant les unes par les autres, en gardant soigneusement le fil qui relie l'abstraction et l'image, que le professeur sera intéressant, suggestif, initiateur; c'est ainsi qu'il fera naître le goût de la science et qu'il fera grandir le talent capable de la faire progresser. Qu'il n'oublie jamais cependant que l'imagination n'est qu'un guide, que ce guide n'est pas infaillible et que, en dernier ressort, c'est à la raison seule qu'il appartient de prononcer.

(*) Voy. ZEUTHEN, *Histoire des mathématiques* (traduite par MASCART), p. 18. — P. TANNERY, *Pour l'histoire de la science hellène*, p. 7.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, ff. de secrétaire perpétuel, proclame, dans les termes suivants, les résultats des concours et des élections :

CONCOURS ANNUEL DE LA CLASSE (1908).

—

SECTION DES SCIENCES NATURELLES.

La Classe avait reçu, avant le délai réglementaire du 31 juillet, deux travaux manuscrits en réponse à la troisième question du programme : *On demande des recherches originales concernant la sexualité chez les Sporozoaires.*

Le mémoire n° 1 a pour titre : *Contributions à l'étude de la sexualité chez les Myxosporidies et chez les Microsporidies.* Il porte pour devise : *Les hypothèses sont le fonds qui manque le moins; la certitude nous échappe toujours au moment où nous croyons la saisir.*

Le deuxième travail est une *Étude sur la sexualité chez les Grégarines.* Il a pour devise : *Correlated with their wide distribution, the sporozoa exhibit the utmost diversity of structural and developmental characters* (Minchin).

La Classe, adoptant les conclusions de ses commissaires, a partagé le prix de *mille francs* entre ces deux travaux.

L'ouverture des billets cachetés a fait connaître que l'auteur du premier mémoire est M. Louis Mercier, docteur en sciences, chef des travaux de zoologie à la Faculté des sciences de Nancy.

Le deuxième mémoire est dû à MM. Louis Léger, professeur de zoologie à la Faculté de Grenoble, et Octave Duboscq, professeur de zoologie à la Faculté de Montpellier.

—

PRIX ÉDOUARD MAILLY

POUR FAVORISER LES PROGRÈS DE L'ASTRONOMIE EN BELGIQUE.

(IVe période : 1904-1907.)

La Classe, se ralliant aux conclusions du jury chargé de juger cette période, estime que le seul mémoire soumis à son jugement ne satisfait pas aux conditions réglementaires et qu'il n'y a pas lieu de décerner le prix.

—

PRIX STAS

Le Comité pour la publication, en 1894, des œuvres de Jean-Servais Stas, ancien membre de l'Académie, ayant demandé à la Classe des sciences d'en offrir chaque année, en séance publique, un exemplaire aux docteurs en sciences chimiques qui obtiendront leur diplôme légal *avec la plus grande distinction,* ces œuvres, en trois volumes, sont offertes, cette année, à M. Pierre Bruylants et à M. Joseph Lemaire, anciens élèves de l'Université de Louvain.

—

ÉLECTIONS.

La Classe des sciences a eu le regret de perdre, cette année :

Dans la Section des sciences mathématiques et physiques : Albert Lancaster, membre titulaire.

Dans la Section des sciences naturelles : Albert-

Auguste de Lapparent, Alfred Giard et Jean-Albert Gaudry, associés.

Elle a élu :

1° Dans la séance du 6 juin : Membre titulaire de la Section des sciences mathématiques et physiques : M. Ch.-J. de la Vallée Poussin; associés de la même Section : M. Oreste Chwolson, professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg, et sir James Dewar, de la Société royale de Londres;

2° Dans la séance du 15 décembre : Correspondant de la Section des sciences mathématiques et physiques : M. Paul Stroobant, professeur à l'Université libre de Bruxelles, chef du service méridien de l'Observatoire royal de Bruxelles; associés de la Section des sciences naturelles : M. Charles Barrois, professeur à l'Université de Lille, et M. Marie-Yves Delage, professeur de zoologie à la Sorbonne et directeur du laboratoire de Roscoff, à Sceaux (Seine).

OUVRAGES PRÉSENTÉS.

—

Fraipont (*Julien*). Les sciences anthropologiques et archéologiques. Bruxelles, 1908; extr. in-4° (27 p., illustré).

— Les sciences zoologiques. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (88 p., illustré).

Cogniaux (*Alfred*). Melastomataceae peruvianae. Leipzig, 1908; extr. in-8° (18 p.).

— Cucurbitaceae peruvianae. Leipzig, 1908; extr. in-8° (2 p.).

— Melastomataceae indiae occidentalis. Leipzig, 1908; extr. in-8° (5 p.).

— Deux Cucurbitacées nouvelles des îles Samoa. Leipzig, 1908; extr. in-8° (2 p.).

De Donder (*Th.*). Nouvelles recherches sur les relations de 4 points. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (18 p.).

— Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé. Bruxelles, 1908; extr. in-8° (22 p.).

Monier (*Marcel*). Recherches expérimentales sur l'albuminate de cuivre soluble. Anvers, 1908; extr. in-8° (8 p.).

Pâque (*E.*). Maladie du chêne en 1908. Quelques champignons nuisibles ou intéressants. Gand, 1908; extr. in-8° (13 p.).

Pasquier (*Ern.*). Sur certains travaux de l'École d'Oppolzer relatifs aux éclipses et à la chronologie. Louvain, 1908; in-8° (9 p.).

Stroobant (*Paul*). Les progrès récents de l'astronomie (année 1907). Bruxelles, 1908; extr. in-16 (98 p. et pl.).

— Correction de la position et diamètre de Mercure déduits des observations de contact effectuées lors du passage du 13-14 novembre 1907. Bruxelles, 1908; extr. in-4° (20 p.).

Zunz (*Edgar*). Contribution à l'étude de la digestion et de la résorption des protéines dans l'estomac et dans l'intestin grêle chez le chien. Bruxelles, 1908; in-8° (65 p.).

Ministère de la Guerre. Carte de la Belgique au 100,000e, tableau d'assemblage et feuilles XIII à XXVI. 1908.

Ministère de l'Intérieur et de l'Agriculture. Le mouvement scientifique en Belgique, 1830-1905, tomes I et II. Bruxelles, 1907-1908; 2 vol. in-4°.

Ministère des Travaux publics. Port d'Ostende. Diagrammes des variations du niveau de la mer, observées à l'extrémité de l'estacade d'est du chenal d'entrée au port pendant l'année 1907. In-folio.

Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congres. Handelingen (21, 22 en 23 September 1907). Bruges, 1908; in-8° (LXII-240 p.).

Congrès de chimie et de pharmacie. Liége, 1905 (27-30 juillet). Rapports et communications. Tome Ier. Liége, 1907; in-8° (XXXVI-575 p.).

—

Dahlström (*A.*). Anatomische Veränderungen in vier Wegen Drucksteigerung enukleierten Augen mit Netzhauthämorrhagien. Leipzig, 1908; in-8° (148 p., 5 pl.).

BERLIN. *Deutsche physikalische Gesellschaft.* Die Fortschritte der Physik im Jahre 1907. I, II, III; 1908.

HANAU. *Wetteranische Gesellschaft für Naturkunde.* Festgabe zur Feier ihres 100 jährigen Bestehens (Jos. Zingel). 1908; in-8°.

HAMBOURG. *Sternwarte.* Mitteilungen, Nr 11. 1907.

VIENNE. *Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.* Schriften, XLVIII. In-16; 1908.

—

Savage (*T. E.*). On the Lower Paleozoic Stratigraphy of Southwestern Illinois. Philadelphie, 1908; extr. in-8° (14 p.).

SAO PAULO. *Museu Paulista.* Catalogos da Fauna Brazileira. Vol. Ier. As Aves do Brazil (Dr H. von Ihering et R. von Ihering). 1907; in-8° (485 p. et cartes).

NEW-YORK. *American Museum of Natural History.* Morris Ketchum Jesup. 1908; in-4° (18 p. et portr.).

—

FRANCE.

Janet (*Charles*). Remplacement des muscles vibrateurs du vol par des colonnes d'adipocytes, chez les fourmis, après le vol nuptial. Paris, 1906; extr. in-4° (4 p. et fig.).

— Sur un organe non décrit du thorax des fourmis ailées. 1906; extr. in-4° (3 p. et fig.).

— Histolyse, sans phagocytose, des muscles vibrateurs du vol, chez les reines des fourmis. Paris, 1907, extr. in-4° (4 p. et fig.).

— Histogenèse du tissu adipeux remplaçant les muscles vibrateurs histolysés après le vol nuptial, chez les reines des fourmis. Paris, 1907; extr. in-4° (4 p.).

— Histolyse des muscles de mise en place des ailes, après le vol nuptial, chez les reines des fourmis. Paris, 1907, extr. in-4° (3 p.).

Sauvageau (*C.*). Le professeur David Carazzi. Les huîtres de Marennes et la diatomée bleue. Bordeaux, 1908; in-8° (23 p.).

Rivière (*Émile*). Découverte d'un squelette humain quaternaire, chelléo-moustérien. Paris, 1908; extr. in-4° (3 p.).

Haton de la Goupillière. Surfaces nautiloïdes. Coïmbre, 1908; in-8° (177 p.).

— Application aux mouvements planétaire et cométaire

de la recherche du centre de gravité et des axes principaux du temps de parcours. Paris, 1908; extr. in-4° (25 p.).

PARIS. *Société photographique.* Catalogue illustré, 1907 (259 p.).

—

Darwin (*Sir George Howard*). Scientific Papers, vol. II. Tidal friction and Cosmogony. Cambridge, 1908; in-8° (XVI-516 p.).

LIVERPOOL. *Biological Society.* Proceedings and Transactions. Vol. XXII, 1908; in-8° (XVII-553 p., 13 pl.).

LONDRES. *Royal Society.* National Antarctic Expedition (1901-1904) : Album of photographs and sketches, with a portfolio of panoramic views. 1908; in-4°.

—

FLORENCE. *Società entolomologica italiana.* Bolletino, vol. XXXIX, 1907.

PADOUE. *Academia Scientifica Veneto-Trentino-Istriana.* Atti, 3e série, an. I, 1908.

—

BATAVIA. *Observatoire royal.* On the Rainfall in Java. (Dr W. Van Bemmelen.) Batavia, 1908; in-4° (84 p. et pl.).

UTRECHT. *Observatoire.* Recherches astronomiques, III; in-4°, 1908.

— *Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool.* Onderzoekingen. (C. A. Pekelharing en H. Zwaardemaker.) Vijfde reeks, IX. Utrecht, 1908.

—

Apéry (*Pierre*). La fièvre de Malte à Constantinople. Constantinople, 1908; in-16 (20 p.).

MONACO. *Musée océanographique*. Résultats des campagnes scientifiques accomplies par Albert Ier, prince souverain, fascicule XXXIII, 1908; in-4°.

TOKYO. *Imperial earthquake investigation Committee*. Bulletin, II, 1908.

DORPAT. *Université impériale*. Acta et commentationes, 1907, nos 1 à 9.

SAINT-PÉTERSBOURG. Missions scientifiques pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg. Mission russe, tomes I et II, 1907; in-4°.

— *Académie impériale des sciences*. Œuvres de P.-L. Tchebychef. Tome II. Saint-Pétersbourg, 1907, in-4° (XX-736 p., 2 portraits).

— *Observatoire central Nicolas*. Publications. Série II, vol. XVIII, in-4°; 1907.

HELSINGFORS. *Meteorologische Zentralanstalt*. Jahrbuch für Finland, 1901; Band 1, 1908; in-4°.

COPENHAGUE. *Conseil permanent international pour l'exploration de la mer*. Bulletin trimestriel, 1906-1907, n° 4, avril-juin, 1907; in-4°.

CAIRE. *Naturforschende Gesellschaft*. Jahresbericht, neue Folge, Band L, 1908.

NEUCHATEL. *Société neuchateloise de géographie*. Bulletin, tome XVIII, 1907.

LAUSANNE. *Commission géodésique suisse*. Travaux astronomiques et géodésiques exécutés en Suisse. Vol. XI. Mesure de la base géodésique du tunnel du Simplon. Zurich, 1908; in-4° (124 p., 35 fig.).

La Bibliothèque de l'Académie a reçu en outre, pendant l'année 1908, les Revues ainsi que les publications des Institutions suivantes :

Anvers. *Société de médecine. — Société médico-chirurgicale. — Société de pharmacie.*

Bruxelles. *Académie royale de médecine. — Annales de médecine vétérinaire. — Annales des mines. — Annales des travaux publics. — Association belge de photographie. — Bulletin de statistique démographique et sanitaire. — Ciel et Terre. — Instituts Solvay. — Ministères des Affaires étrangères, de l'Agriculture, de l'Intérieur, du Travail. — Moniteur belge. — Moniteur industriel belge. — Presse médicale belge. — Revue de l'Université. — Revue : Science et Nature. — — Sociétés : d'agriculture, d'anthropologie, d'astronomie, royale de botanique, chimique, d'électriciens, entomologique, de géologie et d'hydrologie, royale zoologique et malacologique, royale de médecine publique, de microscopie, des sciences médicales et naturelles, scientifique.*

Gand. *Société de médecine.*

Huy. *Cercle des sciences et des beaux-arts. — Cercle des Naturalistes.*

Liége. *Écho vétérinaire. — Société géologique de Belgique. — Société médico-chirurgicale.*

Berlin. *Kön. Akademie der Wissenschaften. — Deutsche chemische Gesellschaft. — Geologische Gesellschaft. — Gesellschaft für Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte.*

Bonn. *Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Brême. *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Brunswick. *Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie. — Physikalische Gesellschaft. — Meteorologisches Institut.*

Budapest. *Institut royal de géologie. — Académie des sciences.*

Charlottenbourg. *Physikalische-technische Reichsanstalt.*
Cracovie. *Académie des sciences.*
Francfort-sur-Main. *Senckenberg. naturforsch. Gesellschaft.*
Francfort-sur-Oder. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Göttingen. *Kön. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Halle. *Naturwiss. Verein für Sachsen und Thüringen.*
Heidelberg. *Naturhistorischer Verein.*
Iéna. *Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Leipzig. *Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie.* — *Kön. Gesellschaft der Wissenschaften.* — *Zoologischer Anzeiger.*
Munich. *Kön. Akademie der Wissenschaften.*
O-Gyalla. *Institut météorologique.*
Prague. *Académie tchèque des sciences.* — *Kön. Gesellschaft der Wissenschaften.* — *Société mathématique.*
Strasbourg. *Société des sciences, agriculture et arts.*
Vienne. *Kaiserl. Akademie der Wissenschaften.* — *Anthropologische Gesellschaft.* — *Kais. geologische Reichsanstalt.* — *Monatshefte für Mathematik und Physik.* — *Kais. naturhistorisches Hofmuseum.*
Wurzbourg. *Physikal.-medizinische Gesellschaft.*
Universités de Fribourg-en-Brisgau, Giessen, Heidelberg, Kiel, Marbourg, Strasbourg, Tubingue et Vienne.

Copenhague. *Institut météorologique.* — *Société royale des sciences.*

Albany. *University of the State of New York.*
Baltimore. *Johns Hopkins University.*
Berkeley. *University.*
Boston. *Academy of arts and sciences.* — *Natural History Society.* — *Astronomical Journal.*
Brooklyn. *Institute of arts and sciences.*
Buenos-Ayres. *Sociedad cientifica Argentina.*
Cambridge. *Museum of compar. zoology.* — *Observatory.*

Chicago. *Field Columbian Museum.* — *Yerkes Observatory.*
Cincinnati. *Lloyd library.*
Columbia. *University of Missouri.*
Cordova. *Academia de ciencias.*
Granville. *Denison University.*
Halifax. *Nova-Scotian Institute.*
Ithaca. *Journal of physical chemistry.*
Laurence. *The Kansas University.*
Lima. *Cuerpo de ingenieros de minas.*
Lincoln. *University of Nebraska.*
Madison. *Wisconsin Academy.*
Mexico. *Observatorio.* — *Sociedad de historia natural.*
Montevideo. *Universidad.*
Mont-Hamilton. *Lick Observatory.*
Montréal. *Natural history Society.*
New-Haven. *Journal of sciences.*
New-York. *Academy of sciences.* — *Mathematical Society.* — *Museum of natural history.*
Para. *Museu.*
Philadelphie. *Academy of natural sciences.* — *Franklin Institute.* — *The american Naturalist.* — *Philosophical Society.* — *Historical Society.*
Rochester. *Academy of sciences.* — *Geological Society.*
Saint-Louis. *Academy of sciences.*
Salem. *Essex Institute.*
San-Francisco. *California Academy of sciences.*
Santiago de Chili. *Société scientifique.*
Toronto. *Canadian Institute.*
Urbana. *Illinois State laboratory.*
Washington. *Department of Agriculture.* — *U. S. national Museum.* — *Smithsonian Institution.* — *U. S. Geological Survey.*

Amiens. *Société industrielle.*
Bordeaux. *Société des sciences physiques et naturelles.*

Caen. *Société linnéenne.*
Dax. *Société de Borda.*
Le Havre. *Société d'études diverses.*
Lille. *Société géologique du Nord.*
Lyon. *Université.*
Marseille. *Société scientifique industrielle.*
Montpellier. *Académie des sciences et des lettres.*
Nancy. *Société des sciences.*
Nantes. *Société des sciences naturelles.*
Paris. *Académie de médecine.* — *Bulletin scientifique.* — *École normale supérieure.* — *École polytechnique.* — *Journal de l'agriculture.* — *Le Cosmos.* — *La Nature.* — *Le Progrès médical.* — *Ministère de l'Instruction publique.* — *Moniteur scientifique.* — *Muséum d'histoire naturelle.* — *Revue générale des sciences.* — *Sociétés : d'agriculture, d'anthropologie, astronomique, de biologie, chimique, géologique, mathématique, météorologique, philomatique, zoologique.*
Toulouse. *Société d'histoire naturelle. Université.*

Adelaïde. *Royal Society of South Australia.*
Birmingham. *Philosophical Society.*
Calcutta. *Asiatic Society of Bengal.* — *Meteorological Department.* — *Geological Survey.*
Cambridge. *Philosophical Society.*
Dublin. *Royal Irish Academy.* — *Dublin Society.*
Édimbourg. *Botanical Society.* — *Geological Society.* — *Physical Society.* — *Royal Society.* — *Laboratory of the R. College of physicians.*
Glascow. *Geological Society.*
Le Cap. *Philosophical Society.*
Londres. *Anthropological Institute.* — *Royal Astronomical Society.* — *Chemical Society.* — *Geological Society.* — *Institution of mechanical Engineers.* — *Royal Institution of Great Britain.* — *Linnean Society.* — *Mathematical Society.* — *Meteorological Society.* — *Royal Society.* — *Royal Microscopical Society.* — *Nature.* — *Zoological Society.*

Newcastle-upon-Tyne. *Institute of mining and mechanical Engineers.*

Sydney. *Linnean Society.* — *R. Society of N. S. Wales.*

Victoria. *Royal Society of Victoria.*

Florence. *Società entomologica italiana.* — *Rivista scientifico-industriale.*

Milan. *Società di scienze naturali.* — *R. Istituto di scienze.* — *Museo di storia naturali.*

Modène. *Società dei naturalisti.* — *Statione agrarie.*

Naples. *Società reale.*

Padoue. *Società veneto-trentina di scienze naturali.*

Palerme. *Circolo matematico.*

Pise. *Società toscana di scienze naturali.* — *Il nuovo cimento.*

Rome *Reale Academia dei Lincei.* — *Associazione elettrotecnica.* — *Comitato di artiglieria e genio.* - *Comitato geologico.* — *Gazetta chimica.* — *Ministero dei lavori pubblici.* — *Ministero d'agricoltura, industria e commercio.* — *Società zoologica.*

Turin. *Academia reale delle scienze.*

Venise. *R. Istituto di scienze.*

Amsterdam. *K. Akademie van wetenschappen.* — *Société mathématique.*

Batavia. *Genootschap van kunsten en wetenschappen.* — *Natuurkundige Vereeniging.*

Buitenzorg. *Jardin botanique.*

Harlem *Société hollandaise des sciences.*

Leyde. *Nederlandsche dierkundige Vereeniging.*

Bucarest. *Institut météorologique.* — *Ministère de l'Instruction publique.* — *Société des sciences physiques.*

Jassy. *Société scientifique et littéraire.*

Dorpat. *Université.* — *Naturforschende Gesellschaft.*

Kazan. *Université impériale.*

Moscou. *Société impériale des Naturalistes.*
Nowa-Alexandrya. *Annuaire géologique et minéralogique.*
Odessa. *Société des Naturalistes.*
Saint-Pétersbourg. *Académie impériale des sciences.* — *Institut impérial de médecine expérimentale.* — *Comité géologique.* — *Jardin impérial de botanique.* — *Société de chimie.* — *Mineralogische Gesellschaft.* — *Université impériale.*
Varsovie. *Travaux mathématiques et physiques.*

Bergen. *Museum.*
Christiania. *Archiv for Mathematik.* — *Société des sciences.* — *Université.*
Stockholm. *Académie royale des sciences.* — *Nordisk medicinsk Archiv.* — *Acta mathematica.* — *Institut royal géologique.* — *Société entomologique.*
Upsal. *Société royale des sciences.* — *Université.*

Bâle. *Université.*
Genève. *Archives des sciences physiques et naturelles.* — *Journal de chimie physique.* — *L'Enseignement mathématique.* — *Société de physique.*
Lausanne. *Société vaudoise des sciences naturelles.*
Zurich. *Naturforschende Gesellschaft.*

Alexandrie. *Institut égyptien.*
Belgrade. *Académie royale des sciences.*
Coïmbre. *Jornal mathematicas* (Teixeira).
Le Caire. *Institut égyptien.*
Lisbonne. *Academia real das sciencias.*
Madrid. *R. Academia de ciencias exactas.*
Manila. *Observatorio meteorologico.*
Monaco. *Musée océanographique.*
Tokyo. *Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens.* — *Imperial University.*

TABLES ALPHABÉTIQUES

Classe des sciences.

1908

TABLE DES AUTEURS.

A

Aerde (*M. Van*). Sur l'allyl-carbinol biméthylé, 921; rapports de MM. L. Henry et Spring, 889. 891.

Arnould (*V.*). Hommage d'ouvrage, 739.

Arzalier (*L.*). Action de corps solubles sur des corps insolubles, 577, 607; rapports de M. Spring, 562, 587.

Association internationale des Académies. La Reale Academia dei Lincei fait parvenir quatre exemplaires de l'ouvrage du baron R. Eötvös, de Budapest, 314.

B

Bambeke (*Ch. Van*). Hommages d'ouvrages, 583, 615, 691, 739. Note bibliographique : voir *Schuyten* (*C.*). — Rapports : voir *Bather* (*F.-A.*); *Julin* (*Ch.*); *Lams* (*H.*); *Lebrun* (*H.*); *Nolf* (*P.*); *Vander Stricht* (*O.*).

Barrois (*Ch.*). Élu associé, 1095.

Bather (*F.-A.*). Ptilocrinus antarcticus n. sp., a crinoid dredged by the Belgian Antarctic Expedition, 296; rapports de MM. Van Beneden, Van Bambeke et Plateau, 187, 188.

Beaupain (*J.*). Dépose des plis cachetés, 314, 946.

Beneden (*Éd. Van*). Hommage d'ouvrage, 691, 739. — Chargé de représenter l'Académie aux fêtes du centenaire de naissance de Charles Darwin, qui auront lieu à Cambridge, 738. — Rapports : voir *Bather* (*F.-A.*); *Julin* (*Ch.*); *Lams* (*H.*); *Lebrun* (*H.*); *Nolf* (*P.*); *Sainmont* (*G.*); *Winiwarter* (*H. von*).

Bertrand (*Émile*). Sur les principes fondamentaux de la mécanique à l'examen, 172; rentre en possession de son manuscrit, 740.

Bordiga (*G.*). Remercie pour le prix accordé à son mémoire, 3.

Boutquin (*J.*) Soumet pour le Prix Mailly une réédition de son travail : « Le Monde physique. — Les Astres », 4, 62; avis de MM. le Paige et Lagrange, 955, 956. — Hommage d'ouvrage, 691.

Bronislawski (*Boleslas*). Contribution à l'étude de la conductibilité électrique, 708; avis de M. De Heen, 692.

Bruylants (*P.*). Contribution à l'étude des composés cycliques triméthyléniques du type $\begin{matrix} H_2C \\ | \\ H_2C \end{matrix} > CH - R$, 881; rapport de MM. Henry et Spring, 998, 1000. — Prix J.-S. Stas, 1157

Buelens (*Arm.*). Sur l'éthyl-isoamyl- et le méthyl-isohexyl-carbinol; rapport de MM L. Henry et Spring, 886, 888.

C

Callebaut (*P.*). Dépose un pli cacheté, 582.

Carpiaux (*E.*). Contribution à l'étude de l'assimilation du phosphore et de la chaux pendant la vie embryonnaire du poussin, 283; rapports de MM. Fredericq, Jorissen et Malaise, 185, 186, 187.

Castelnuovo (*G.*). Remercie pour les vœux de réussite adressés au IVe Congrès des mathématiciens, 314.

Cesàro (*G.*). Assemblages sphériques, 87. — Tellure natif des mines de Balia (Asie Mineure), 255. — Biréfringence de l'Adulaire, de la Sanidine, de la Thomsonite, de la Willémite, de la Microsommite et de la Thomsénolite, 619. — Hommage d'ouvrages, 739. — Rapport : voir *Pasquet* (*J.*).

Chauveau (*A.*). Hommages d'ouvrages, 3, 583.

Chauvenet (*Ed.*). Sur un alliage de thorium et de nickel, 684; rapport de M. W. Spring, 618.

Chwolson (*O.*). Élu associé, 639; remercie, 614

Cogniaux (*Alfr.*). Hommage d'ouvrage avec note par Th. Durand (Mélastomacées et Cucurbitacées nouvelles), 881, 882

Coiseau (*L.*) Remercie pour son Prix Charles Lemaire, 3

Cousin (*J.*). Remercie pour son Prix Ch. Lemaire, 3.

D

Darwin (*G.*). Hommage d'ouvrage, 946.

Daussin (*A.*). Dépose un billet cacheté, 172, 583.

Dautry. Sur les réactions du chlorure mercurique avec les acides organiques, 55; rapport de M. Spring, 5.

Debry (*J.*). A propos d'une nouvelle théorie de la chaleur (à l'examen), 314; dépôt aux archives après avis de MM. Van der Mensbrugghe et De Heen, 561; lois de la densité qui paraissent se rattacher à la théorie matérialiste de la chaleur (à l'examen), 583.

De Donder (*Th.*). Dépose des plis cachetés, 62, 946. — Nouvelles recherches sur les relations de quatre points, 779. — Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé, 795; rapport de MM. de la Vallée Poussin, Demoulin et Deruyts, 740, 742. — Sur les invariants intégraux relatifs (à l'examen), 881.

De Heen (*P.*). Action des courants alternatifs de haute fréquence sur la germination (en collaboration avec H. Micheels), 82. — De l'induction de l'énergie sous ses trois formes : mécanique, électrique et électromagnétique, 411. — Sur l'absence de signification du point critique lorsqu'un liquide n'est pas en contact avec sa vapeur, 512. — Coup d'œil rétrospectif sur la science de l'électricité, 650. — Quel sens doit-on attacher au mot « dématérialisation » ? 694. — Rapports : voir *Bronilawski* (*B.*); *Debry* (*J.*); *Odeurs* (*A.*); *Schwers* (*F.*); *Tobiansky d'Althoof*; *Verschaffelt* (*J.-E.*).

Delaey (*Julien*). Croquis d'un aviateur (dépôt aux archives), 616. — Sur le vol plané de certains oiseaux (à l'examen), 739.

Delage (*M.-Y.*). Élu associé, 1095.

De la Vallée Poussin (*Ch. J.*). Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier, 193. — Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes, 319. — L'objet de la démonstration mathématique et la réalité, 1131. — Élu membre titulaire, 609; approbation royale de son élection, 614; remercie, 614. — Rapport : voir *De Donder* (*Th.*).

Demoulin (*A.*). Contribution à l'étude du biomécanisme (à l'examen), 314; dépôt aux archives sur les conclusions des rapports de MM. Fredericq et Jorissen, 561. — Rapport : voir *De Donder* (*Th.*).

Deruyts (*J.*). Élu directeur pour 1909, 57; remercie, 170. — Rapports : voir *De Donder* (*Th.*); *Fairon* (*J.*).

De Smet (*G.*). Sur la théorie des gaz analysables par combustion (à l'examen), 615; lecture des rapports de MM. Swarts, Cesàro et de Hemptinne, 740.

De Voldere (*G.*). Sur la théorie des gaz analysables par combustion (à l'examen), 615; lecture des rapports de MM. Swarts, Cesàro, de Hemptinne. 740.

Dewar (sir *James*). Élu associé, 609; remercie, 614.

De Wildeman (*E*). Envoie le règlement du IIIe Congrès international de botanique qui aura lieu à Bruxelles, en 1910, 556.

Dony-Hénault (*O*). Contribution à l'étude méthodique des oxydases (2e mémoire, 105; rapports de MM. Fredericq et Jorissen, 63, 64.

Duboscq (*Ost.*). Mémoire couronné (prix en partage) sur la sexualité chez les Sporozoaires. Rapports de MM. Plateau, Francotte et Willem, 947, 955; remercie, 997; proclamé lauréat, 1158.

Durand (*Th.*). Envoie le règlement du IIIe Congrès de botanique qui se tiendra à Bruxelles, en 1910, 556. — Note bibliographique : voir *Cogniaux* (*Alf.*).

E

Erculisse (*F.*). Remercie pour son Prix Stas, 3.

F

Faënza (Municipalité de la ville de). Célébrera le 25 octobre le 300e anniversaire de la naissance de Torricelli (adresse de félicitations). 583.

Fairon (*J.*). Sur les involutions du quatrième ordre (*Mémoires* in-8°). Rapport de MM. J. Deruyts et Neuberg, 184, 185. — Sur une correspondance entre le plan et l'espace (à l'examen), 997.

Falloise (*A.*). Remercie pour son Prix Th. Gluge, 3.

Fraipont (*Ch.*). Hommage d'ouvrages, 172.

Fraipont (*J.*). Mort d'Alb. Lancaster (hommage rendu à la mémoire du défunt), 170. — Mort d'Albert Gaudry (éloge), 944. — L'Okapi, ses affinités avec les Girafidés vivants et fossiles (discours), 1097. — Hommage d'ouvrage, 997.

Francotte (*Ch.*). Rapport : voir *Duboscq* (*O.*); *Léger* (*L.*); *Mercier* (*L.*); *Vander Stricht* (*O.*).

Fredericq (*L.*). L'etat de la végétation à la Baraque Michel et à Liége en 1908, 963. — Rapports : voir *Carpiaux* (*E.*); *Demoulin* (*A.*); *Dony-Hénault* (*O.*). *Julin* (*Ch*); *Lams* (*H.*); *Lebrun* (*H.*); *Nolf* (*P.*); *Pottier* (*Ch.*).; *Vandevelde* (*A.-J.-J.*)

G

Gaudry (*Alb.*). Son décès; son éloge, par J. Fraipont, 944.
Genoese (*F. Masciari*). Hommage d'ouvrage, 557.
Giard (*Alf.*). Son décès, 738.
Gilkinet (*Alf.*) Rapport : voir *Laer* (*H. Van*).
Goblet d'Alviella (comte *Eug.*). Antiquités protohistoriques de Court-Saint Etienne, 18.
Godeaux (*L.*) Dépose des plis cachetés, 314, 583, 615. — Sur une congruence linéo-linéaire de cubiques gauches, 531. — Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques, 597, 812 — Sur la représentation analytique de la conique dans l'espace, 896; rapport de M. Neuberg, 585, 743, 883.
Gomes Teixeira. Hommage d'ouvrage, 314.
Gourdron (*Ern.*). Hommage d'ouvrage, 615.
Gravis (*A.*). Rapport : voir *Lebrun* (*H.*).

H

Havet (*P.-J.*). Sollicite la faveur de pouvoir occuper, en 1908, une des tables belges de la Station zoologique de Naples, 62; avis de MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq, 183; nouvelle requête, 945.
Hemptinne (*A. De*). Rapport : voir *Odeurs* (*A.*); *Tobiansky d'Althof*.
Henry (*L.*). Sur la volatilité comparée de certains groupes de composés mixtes, 6. — De la volatilité dans les séries de « méthylation » des dérivés méthyliques H_3CX^3, 66. — Sur divers alcools heptyliques C_7H_{15} - OH, 957 - Note bibliographique : voir *Lebeau* (*P.*). — Rapports : voir *Aerde* (*Van*); *Bruylants* (*P.*); *Buelens Arm.*); *Hove* (*Th. Van*); *Laer* (*H. Van*); *Lebeau* (*P.*) — Hommage d'ouvrage, 880.
Heurck (*H. Van*). Dépôt aux archives des treize planches de son travail sur les Diatomées recueillies par la *Belgica*, 556.
Hove (*Th. Van*). Sur une nouvelle méthode de préparation de quelques éthers simples (2e communication), 540, rapports de MM. Swarts et Henry, 317, 318.

I

Institut botanique (*Université de Bruxelles*). Hommage d'ouvrage, 880.
Institut Nobel. Hommage d'ouvrage (Prix en 1905), 3, 4.
Ioteyko (Mlle *J.*). Hommages d'ouvrages, 3. — « Revue psychologique » (1er fasc.), avec note par M. Vanlair, 557, 559.

J

Janne (*H.*). Hommage d'ouvrage, 63.

Janssen (*P.-J.-C.*). Son décès, 2.

Janssens (*F.-A.*). Dépose un billet cacheté, 557.

Jorissen (*Arm.*). La composition du sol de cimetières situés dans la région de Liége au point de vue de la chimie toxicologique, 974. — Rapport : voir *Carpiaux* (*E.*); *Demoulin* (*A.*); *Dony-Hénault* (*O.*); *Pottier* (*Ch.*); *Vandevelde* (*A.-J.-J.*).

Julin (*Ch.*). Sollicite la faveur de pouvoir occuper, en 1908, une des tables belges de la Station zoologique de Naples (lecture des rapports de MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq), 63.

K

Kelvin (Lord) [Sir *William Thomson*]. Son décès, 2; l'Académie de Glascow remercie pour le message de sympathie qui lui a été adressé, 171.

Kerremans (*Ch.*). Hommage d'ouvrage, 172.

Kieffer (*J.-J.*). Description de deux nouveaux Chironomides, 705.

L

Laer (*H. Van*). Nouvelles recherches sur les fermentations visqueuses, 902; rapports de MM. Gilkinet et Henry, 884, 886.

Lagrange (*Ch.*). Dépôts de plis cachetés, 62, 172, 582, 644, 946; sera prié d'écrire pour l'*Annuaire* la notice d'Alb. Lancaster, 170. Réélu membre de la Commission spéciale des finances, 995 — Rapport : voir *Boutquin* (*J.*).

Lameere (*Aug.*). Rapport : voir *Vander Stricht* (*O.*).

Lams (*H.*). Sollicite de pouvoir occuper, en 1908 une des tables de la Station zoologique de Naples (lecture des rapports de MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq), 63; même requête pour 1909, 738, 945.

Lancaster (*Alb.*). Son décès. Hommage à sa mémoire. — Discours à ses funérailles par M. Mourlon. — M. Ch. Lagrange chargé d'écrire la notice du defunt. — Remerciements de Mme et de Mlle Lancaster, 170, 173.

Lapparent (*Alb. de*). Son décès. Lettre de condoléance à l'Académie des sciences de Paris, 582.

Lebeau (*P.*). Hommage d'ouvrage, avec note par M. Henry (Vie et travaux de Henri Moissan), 172, 177. — Sur quelques propriétés physiques du butane et de l'isobutane, 300; rapport de MM. L. Henry et Spring, 188, 191.

Lebon (*Ern.*). Hommages d'ouvrages, 63, 557, 691.

Lebrun (*H.*). Demande à pouvoir occuper, en 1908, une des tables belges de la Station zoologique de Naples (lecture des appréciations de MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq) 63; son rapport sur les résultats de ses études à l'Institut précité en 1908 (lecture du rapport de MM. Plateau, Van Bambeke et Gravis), 998.

Lecante (*G.*). Hommage d'ouvrage, 739, 881.

Léger (*L.*). Mémoire couronné (prix en partage) sur la sexualité chez les Sporozoaires. Rapports de MM. Plateau, Francotte et Willem, 947, 955; remercie, 997; proclamé lauréat, 1156.

Lemaire (*Jos.*). Sur l'action de l'éther mésoxalique avec les dérivés alkylhalomagnésiens et sur la synthèse de la pinacone malonique (à l'examen), 881; lauréat du prix Stas, 1157.

Le Paige (*C.*). Rapport : voir *Bouquin* (*J.*).

Lilert (*J.*). Hommage d'ouvrage, 691.

Lemoist (*Max*). Prix décennal des sciences minéralogiques (félicitations), 2.

M

Malaise (*C.*). Rapport : voir *Carpiaux* (*C.*).

Marchal (Chevalier *Edm.*). Note bibliographique : voir *Observatoire royal de Belgique.*

Massart (*J.*). Hommage d'ouvrage, 739.

Mercier (*L.*). Mémoire couronné (prix en partage) sur la sexualité chez les Sporozoaires. Rapports de MM. Plateau, Francotte et Willem, 947, 955; remercie, 997; proclamé lauréat, 1156.

Micheels (*H.*). Action des courants alternatifs de haute fréquence sur la germination (en collaboration avec M. P De Heen), 82. — Demande à pouvoir occuper une des tables belges de la Station zoologique de Naples, 945.

Ministre de la Guerre. Envoi d'ouvrage, 946.

Ministre de l'Intérieur et de l'Agriculture. Envoi d'ouvrage, 946.

Ministre des Sciences et des Arts. Envoi d'ouvrages, 171, 566, 880. — Demande avis sur des documents relatifs à la Conférence de Berne pour la protection des œuvres littéraires et artistiques, 556.

Ministre des Travaux publics. Envoi d'ouvrage, 946.

Mourlon (*M.*). Discours aux funérailles d'Albert Lancaster, 170, 173. — Hommages d'ouvrages, 557, 583, 615. — Délégué auprès de la Commission administrative pour 1908-1909, 578. — Rapport sur la propriété

littéraire et artistique, 616; remercié, 691. — La question du Quaternaire moséen résolue pour les environs de Bruxelles, par la découverte « in situ » de l'« Élephas antiquus ». 891. — Réélu membre de la Commission des finances, 995.

N

Neuberg (*J.*). Hommage d'ouvrage, 557. — Rapports : voir *Fairon* (*J.*); *Godeaux* (*L.*).

Noaillon (*P.*). Dépose un billet cacheté, 738.

Nolf (*P.*). Sollicite la faveur de pouvoir occuper, en 1908, une des tables belges de la Station zoologique de Naples (lecture des rapports de MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq) 63. — Rapport sur les résultats de ses études, en 1906, à la Station précitée (à l'examen), 738; lecture des appréciations des mêmes commissaires, 883. — De l'origine du complément hemolytique et de la nature de l'hemolyse par les serums, 748; rapport de M. L. Fredericq, 693.

Nordman (*Ch.*). Envoie la liste des travaux qu'il présente pour le prix Ch. Lagrange, 557.

O

Observatoire royal de Belgique. Hommage d'ouvrage. (Annuaire météorologique de 1908; par A. Lancaster, 557; note sur le volume, par le chevalier Edm. Marchal, 558.)

Odeurs (*A.*) Recherches sur le potentiel de la décharge disruptive, 855; rapports de MM. A. de Hemptinne et De Heen. 746, 747.

Oechsner de Coninck (*W.*). Les réactions du chlorure mercurique avec les acides organiques, 55. — Sur le sélénium, 57. — Détermination du poids moléculaire de l'oxyde uraneux, 163. — Observation relative à l'action du soufre sur le gaz acétylène, 305 — Quelques réflexions sur le rôle de l'ionisation dans certaines réactions chimiques, 305. — Action de corps solubles sur des corps insolubles, 577. 607. — Étude de quelques composés de l'uranium, 992; rapports de M. Spring, 5, 65, 192, 562. 587, 957.

P

Pasquet (*J*.) Pour les reconstitutions artificielles du diamant (à l'examen), 691; dépôt aux archives sur la proposition de M. Cesàro, 998.

Pasquier (*E.*). Hommage d'ouvrage, 946.

Pelseneer (*P.*). Les yeux branchiaux des Lamellibranches, 773.

Penazzo (*U.*). Remercie pour le prix accordé à son mémoire, 3.

Plateau (*F.*). Rapports : voir *Bather* (*F.-O.*); *Duboscq* (*O.*); *Julin* (*Ch.*); *Lams* (*H.*); *Lebrun* (*H.*); *Léger* (*L.*); *Mercier* (*L.*); *Nolf* (*P.*).

Pottier (*Ch.*). Contribution à l'étude du biomécanisme (à l'examen), 314; dépôt aux archives sur les conclusions des rapports de MM. Fredericq et Jorissen, 561.

Puech (*Arm.*). Remerciements pour la mention obtenue au concours pour le prix Ch. Lemaire, 3.

R

Reynaud (*H.*). Sur le sélénium, 57; rapport de M. Spring, 5.

Rutot (*A.*). Hommages d'ouvrages, 63, 171, 691. — Délégué au Congrès préhistorique de France, 171. — Sur l'âge des dépôts connus sous les noms de sable de Moll, d'argile de la Campine, de cailloux de quartz blanc, d'argile d'Andenne et de sable à facies marin, noté OM dans la légende de la Carte géologique au 40 000e (*Mémoires* in-4°, t. II, fasc. 1), 65. — Moustérien et Aurignacien, 518.

S

Sainmont (*G.*). De la formation post-fœtale des œufs définitifs chez le chat (en collab. avec H. von Winiwarter), 602; rapport de M. Éd. Van Beneden, 586.

Salignac-Fénelon (vicomte *Fr de*). Hommage d'ouvrages, 314.

Schuyten (*C.*). Hommages d'ouvrages, avec notes par Ch. Van Bambeke. (L'éducation de la femme, 584. — Paedologisch Jaarboek, 7e jaargang, 1e aflevering, 881, 882.)

Schwers (*F.*). Sur les propriétés physico-chimiques du glycol éthylénique et de ses solutions dans l'eau, 814; rapports de MM. Spring et De Heen, 743, 745.

Société géologique de Glascow. Célébration de son jubilé (adresse de félicitations), 946.

Société géologique de Londres. Remercie pour la délégation de M. Mourlon à son centenaire. Fait hommage du volume publié à cette occasion, 170.

Société physico médicale d'Erlangen. Centième anniversaire de fondation (félicitations), 583; remercie, 691.

Spring (*W.*). Membre de la « Royal Institution of Great Britain » (félicitations), 61. — Note complémentaire sur l'origine des nuances vertes des eaux de la nature, 262. — Membre de la Commission des finances, 995. — Rapports : voir *Bruylants* (*P.*); *Buelens* (*A.*); *Chauvenet* (*Ed.*); *Dautry*; *Lebeau* (*H.*); *Oechsner de Coninck* (*W.*); *Reynaud* (*H.*); *Schwers* (*F.*).

Stroobant (*Paul*). Hommages d'ouvrages. 583, 946, 997. — Élu correspondant. 1095.

Stuyvaert (*M.*). Hommages d'ouvrages, 3, 315. — Centres des moyennes distances de groupes de points sur une courbe gauche, 662; rapport de MM. A Demoulin et Neuberg, 616, 618.

Swarts (*Fr.*) A propos de la préparation de l'alcool bifluoré, 274. Rapports : voir *De Smet* (*G*); *De Voldere* (*G.*); *Hove* (*Th Van*).

T

Thomson (Sir *William*). Voir *Kelvin* (Lord).

Tinel (*Edgard*). Président de l'Académie pour 1908, 2.

Tobiansky d'Althof. Sur la faculté des différents corps en mouvement dans l'air de se charger d'électricité (à l'examen), 739; dépôt aux archives après avis de MM. De Heen et de Hemptinne, 883.

U

Université de Cambridge. Invite l'Académie à la commémoration en 1909, du centenaire de Ch. Darwin, 690.

Université de Londres (*University College*). Demande l'échange de publications, 556.

V

Van der Mensbrugghe (*G.*). Sur le pseudo-siphon de Joseph Plateau 257. — Sur les nombreux effets de l'élasticité des liquides, 1001. — Membre de la Commission des finances, 99[illegible]. — Rapport : voir *Debry* (*J*

Van der Stricht (*O*). La structure de l'œuf des mammifères (Chauves-souris, V. noctula, 3e partie. — L'oocyte à la fin du stade d'accroissement, au stade de la maturation, au stade de la fécondation et au début de la segmentation (à l'examen), 557; rapports de MM. Van Bambeke, Ch. Francotte et Lameere, 588, 596.

Vandevelde (*A.-J.-J.*). Sur l'existence d'une lactase dans le lait de vache, 563; rapports de MM Fredericq et Jorissen, 561, 562.

Vanlair (*C.*). Note bibliographique : voir *Ioteyko* (Mlle *J.*).

Verschaffelt (*J.-E.*). Sur les images multiples formées par les lentilles, 978; rapport de M. De Heen, 956.

Vincent (*J.*). Hommage d'ouvrages, 172.

W

Wève (*L.*). Hommage d'ouvrage, 172.

Willem (*V.*). Larves de Chironomides vivant dans les feuilles.

697. — Rapports : voir *Duboscq* (*O.*); *Léger* (*L.*); *Mercier L.*).

Winiwarter (*H. von*). De la formation post-foetale des œufs définitifs chez le chat (en collaboration avec G. Sainmont), 602; rapport de M. Éd. Van Beneden, 586.

Z

Zunz (*Edg.*). Remercie pour son prix Th. Gluge, 3. — Hommage d'ouvrage, 997.

TABLE DES MATIÈRES.

A

Acides organiques (Sur les réactions du chlorure mercurique avec les); par MM. Oechsner de Coninck et Dautry, 55; rapport de M. Spring, 5.

Adulaire. Voir *Biréfringence*.

Alcool. A propos de la préparation de l'alcool bifluoré; par Fréd. Swarts, 272.

Alcools heptyliques (Sur divers); par Louis Henry, 957.

Alliage. Voir *Thorium*.

Antiquités protohistoriques de Court-Saint-Etienne; par le comte Goblet d'Alviella, 18.

Arithmétique. Voir *Mathématiques*.

Aurignacien et Moustérien; par A. Rutot, 518.

Aviateur (Croquis d'un) déposé aux archives, 616.

Aviculture. Contribution à l'étude de l'assimilation du phosphore et de la chaux pendant la vie embryonnaire du poussin; par E. Carpiaux, 283; rapports de MM. Fredericq, Jorissen et Malaise, 185, 186, 187.

B

Belgica. Voir *Diatomées*.

Bibliographie. Observatoire royal de Belgique : Annuaire météorologique pour 1908; note par M. le chev. Edm. Marchal, 558. — Mlle Ioteyko : « Revue psychologique »; note par M. C. Vanlair, 559. — Dr C. Schuyten : L'éducation de la femme; note par M. Ch. Van Bambeke, 584. — Voir *Pédologie*.

Billets cachetés déposés par MM. Beaupain (J.), 314, 946; Bommel (A.), 314; Callebaut (P.), 582; Daussin (A.), 172, 583; De Donder (Th.), 62, 946; Godeaux (L.), 314, 583, 615; Janssens (F.-A.), 557; Lagrange (Ch.), 62, 172, 582, 614, 946; Noaillon (P.), 738; Van Heurck (H.), 556.

Biographie. Paroles prononcées par M. Fraipont en annonçant la mort d'Alb. Lancaster, 170. — Notice sur la vie et les travaux d'Henri Moissan (Paul Lebeau); note par L. Henry, 177. — Voir *Commission*; *Funérailles*; *Nécrologie*; *Notices*.

Biologie. De la formation post-fœtale des œufs définitifs chez le chat; par les Drs Hans von Winiwarter et G. Sainmont (communication préliminaire), 602; rapport de M. Éd. Van Beneden, 586. — Voir *Lamellibranches; Station zoologique de Naples.*

Biomécanisme (Contribution à l'étude du); par A. Demoulin et Ch. Pottier à l'examen), 315; dépôt aux archives, 561.

Biréfringence de l'Adulaire, de la Sanidine. de la Thomsonite, de la Willémite, de la Microsommite et de la Thomsénolite; par G. Cesàro, 619.

Botanique. Action des courants alternatifs de haute fréquence sur la germination; par H. Micheels et P. De Heen, 82. — Voir *Congrès; Prix; Végétation.*

Butane et isobutane (Sur quelques propriétés physiques du); par P. Lebeau, 300; rapports de MM. L. Henry et Spring, 188, 191.

C

Chaleur (Quelques mots à propos d'une nouvelle théorie de la); par J. Debry (à l'examen), 315; dépôt aux archives, 561. — Voir *Densité.*

Chauve-souris. Voir *Mammifères.*

Chimie. Sur la théorie des gaz analysables par combustion; par G. De Voldere et G. De Smet, 615; communication du rapport aux auteurs, 740. — Action des corps solubles sur des corps insolubles; par W. Oechsner de Coninck et L. Arzalier. 577, 607; rapports de M. W. Spring, 562, 587. — Voir *Acide; Alcool; Alliage; Aviculture; Biographie* (notice Moissan); *Butane; Composés; Eaux; Éther; Éthyl; Fermentations; Glycol; Ionisation; Isobutane; Lactase; Méthyl; Oxyde; Réactions; Sélénium; Soufre; Volatilité.*

Chimie toxicologique (La composition du sol de cimetières situés dans la région de Liége au point de vue de la); par A. Jorissen, 974.

Chironomides (Larves de) vivant dans des feuilles; par Victor Willem, 697. — Description de deux nouveaux; par J.-J. Kieffer, 705.

Commission administrative. M. Mourlon élu membre, 307, 578.

Commission de la Biographie nationale. M. Fraipont élu membre, 307.

Commission permanente de l'Association internationale de sismologie. Hommage d'ouvrage, 881.

Commission polaire internationale. Hommage d'ouvrage, 739.

Commission spéciale des finances. Réélection, 995.

Composés (Contribution à l'étude

des) cycliques triméthyléniques du type $\begin{matrix} H_2C \\ H_2C \end{matrix} > CH - R$; par Pierre Bruylants, 1011; rapport de M. L. Henry, 998. — Préparation du chlorobromure et du bibromure de triméthylène; par P. Bruylants, 1085.

Concours annuel de la Classe des sciences :

1907. MM. Bordiga et Peruzzo remercient pour les distinctions accordées à leurs mémoires, 3.

1908. (Sciences naturelles). Mémoires reçus et désignation des commissaires, 692; rapports de MM. Plateau, Francotte, Willem, 947, 954. — MM. Léger, Duboscq et Mercier, lauréats, remercient, 997. — Proclamation, 1157.

1909. Programme, 180. — Voir *Prix*.

Conductibilité. Voir *Électricité*.

Conférence de Berlin, 556.

Congrès international de botanique (IIIe réunion à Bruxelles), 556.

Congrès international des mathématiciens (IVe réunion à Rome). Adresse de félicitations, 171; remerciements, 314.

Congrès international de pêche (à Washington) 614.

Congrès international pour combattre la tuberculose (à Washington), 690.

Congrès préhistorique de France. M. Rutot délégué à la quatorzième session, 171.

Congruence (Sur une) linéo-linéaire de cubiques gauches; par L. Godeaux, 350; rapport de M. Neuberg, 315.

Conique (Sur la représentation analytique de la) dans l'espace; par Lucien Godeaux, 896; rapport de M. Neuberg, 883.

Court-Saint-Étienne. Voir *Antiquités*.

Crinoïd. Voir *Ptilocrinus antarcticus*.

Cristallographie. Voir *Biréfringence*.

Cubiques gauches. Voir *Congruence*.

D

Darwin. Voir *Jubilés*.

Dématérialisation. Voir *Physique*.

Démonstration. Voir *Objet*.

Densité (Sur les lois de la) qui paraissent se rattacher à la théorie matérialiste de la chaleur; par J. Debry (à l'examen), 583. Dépôt aux archives.

Diatomées recueillies par l'expédition de la « Belgica », 556.

Dons. Ouvrages imprimés. Académie polytechnique de Porto, 315; Arnould (V.), 739. Association internationale des Académies, 314; Bambeke (Ch. Van), 583, 615, 739; Beneden (Éd. Van), 739. Cesàro (G.), 739; Chauveau (A.), 583; Cogniaux (A.), 882; Commission polaire internationale, 739; Darwin (Sir G.), 946; Fraipont fils (Ch.), 172; Frai-

pont (J.), 997; Genoese (M.), 557; Goudron (E.), 615; Henry (L.), 880; Institut botanique (Université de Bruxelles), 880; Institut Nobel, 3; Ioteyko (J.), 3, 557; Janne (H.), 63; Kerremans (Ch.), 172; Lebeau (P.), 172; Lebon (E.), 63, 557; Massart (J.), 739; Ministre de l'Intérieur et de l'Agriculture, 946; Ministre de la Guerre, 946; Ministre des Sciences et des Arts, 171; Ministre des Travaux publics, 946; Mourlon (M.), 557, 583, 615; Neuberg (J.), 557; Observatoire royal de Belgique, à Uccle, 557; Pasquier (E.), 946; Rutot (A.), 63, 171; Salignac-Fénelon (F. de), 315; Schuyten (C.), 584, 881; Stroobant (P.), 583, 880, 946, 997; Stuyvaert (M.), 3, 315; Vincent (J.), 172; Wève (L.), 172; Zunz (Edg.), 997.

E

Eaux. Note complémentaire sur l'origine des nuances vertes des eaux de la nature; par W. Spring, 262.

Éducation. Voir *Bibliographie.*

Élasticité (Sur les nombreux effets de l') des liquides (5e communication); par G. Van der Mensbrugghe, 1001.

Élections :

1908. M. E. Tinel président pour 1908, 2.

M. Spring élu membre titulaire de la « Royal Institution of Great Britain », 62.

Adoption définitive des candidatures aux places vacantes, 578. — M. Ch.-J. de la Vallée Poussin élu membre titulaire, 608; félicitations, 614; arrêté royal, 614; remerciements, 614. — M. Oreste Chwolson et Sir James Dewar élus associés, 609; remercient, 614. — M. Paul Stroobant élu correspondant, 1095. — MM. Charles Barrois et M. Y. Delage élus associés, 1095. — Proclamation, 1158.

1909. M. Deruyts élu directeur, 57. — Voir *Commissions.*

Électricité. Action des courants alternatifs de haute fréquence sur la germination; par H. Micheels et P. De Heen, 82. — Coup d'œil rétrospectif sur la science de l'électricité; par P. De Heen, 650. — Contribution à l'étude de la conductibilité électrique; par Boleslas Bronilawski, 708. — Sur la faculté de différents corps en mouvement dans l'air de se charger d'électricité atmosphérique; par Tobiansky d'Althoff (dépôt aux archives), 883. — Voir *Énergie.*

Embryologie. Voir *Aviculture; Biologie.*

Énergie (De l'induction de l') sous ses trois formes : mécanique, électrique et électromagnétique; par P. De Heen, 411.

Entomologie. Voir *Chironomides.*

Erlangen. Voir *Jubilés.*

Éthers. Sur une nouvelle méthode de préparation de quelques éthers simples; par Th Van Hove, 540; rapports de MM. Swarts et L. Henry. 317, 318. — Sur l'action de l'éther mésoxalique avec les dérivés alkylhalomagnésiens et sur la synthèse de la pinacone malonique; par J. Lemaire (à l'examen), 881.

Éthyl. Sur l'éthyl-isoamyl et le méthyl-isohexyl-carbinol $(CH_3)_2CH - (CH_2)_2 - CHOH - C_2H_5$ et $(CH_3)_2CH - (CH_2)_3 - CHOH - CH_3$; par Armand Buelens. 921; rapport de M. L. Henry, 886.

F

Fermentations (Nouvelles recherches sur les) visqueuses; par H. Van Laer, 902; rapport de M. Alf. Gilkinet, 884.

Fonctions. Voir *Mathématiques*.

Funérailles. Discours prononcé aux funérailles d'Alb. Lancaster; par M. Mourlon, 173.

G

Géologie. Sur l'âge des dépôts connus sous les noms de sable de Moll, d'argile de la Campine, de cailloux de quartz blanc, d'argile d'Andenne et de sable à facies marin, noté OM dans la légende de la Carte géologique au 40 000e; par A. Rutot (*Mémoires* in-4°, t. II, fasc. 1), 65. — Moustérien et Aurignacien; par A. Rutot, 518. — Voir *Aurignacien; Jubilés*.

Géométrie. Assemblages sphériques; par G. Cesàro, 87. — Centres des moyennes distances de groupes de points sur une courbe gauche; par M. Stuyvaert, 662; rapport de M. A. Demoulin, 616. — Sur une correspondance entre le plan et l'espace; par J. Fairon (à l'examen), 997. — Voir *Congruence; Conique; Cubiques; Fonctions; Involutions; Prix Deruyts*.

Germination. Voir *Botanique*.

Glascow. Voir *Jubilés*.

Glycol (Sur les propriétés physico-chimiques du) éthylénique et de ses solutions dans l'eau; par F. Schwers, 814; rapports de MM. W. Spring, 743; De Heen, 745.

H

Hémolyse (De l'origine du complément hémolytique et de la nature de l'); par P. Nolf, 748; rapport de M. Léon Fredericq, 693.

I

Involutions (Sur les) du quatrième ordre; par M. Fairon; rapports de MM. J. Deruyts et Neuberg, 184, 185.

Ionisation (Quelques réflexions sur le rôle de l') dans certaines

réactions chimiques; par Oechsner de Coninck, 305; rapport de M. W. Spring, 192.
Isobutane. Voir *Butane*.

J

Jubilés. Invitation à la célébration du centenaire de Darwin à Cambridge, 690; M. Éd. Van Beneden accepte de représenter l'Académie, 738.

Centième anniversaire de la Société physico médicale d'Erlangen, félicitations, 583; remerciements, 690.

Trois centième anniversaire de la naissance de Torricelli, félicitations à la municipalité de Faënza, 583.

Centième anniversaire de la Société géologique de Londres (remerciements et hommage de l'ouvrage publié à cette occasion), 171.

Cinquantième anniversaire de la Société géologique de Glascow, 946.

L

Lactase (Sur l'existence d'une) dans le lait de vache; par A.-J.-J. Vandevelde (à l'examen), 315; rapports de MM. L. Fredericq et A. Jorissen, 561, 563.
Lamellibranches (Les yeux branchiaux des); par Paul Pelseneer, 773.
Lentilles (Sur les images multiples formées par les); par J.-E. Verschaffelt, 978; rapport de M. De Heen, 956.
Liége (Région de). Voir *Chimie toxicologique*.
Liquides. Voir *Élasticté*.
Londres. Société géologique : voir *Jubilés*. — Université : échange des publications accordé, 556.

M

Mammifères (La structure de l'œuf des) [Chauves-souris, V. noctula], 3e partie; par O. Van der Stricht, 557; rapports de MM. Van Bambeke, Francotte et Lameere, 588, 596.
Mathématiques. Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier; par Ch. de la Vallée Poussin, 193. — Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes; par le même, 319. — Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé; par Th. De Donder, 795. — Nouvelles recherches sur les relations de quatre points; par le même, 779; rapport de M. de la Vallée Poussin, 740. — Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques; par Lucien Godeaux, 597; rapport de M. Neuberg, 585. — Deuxième note, 812; rapport de M. Neu-

berg, 743. — Voir *Congrès; Géométrie; Objet.*

Mécanique (Sur les principes fondamentaux de la) [à l'examen]; par Ém. Bertrand. 172; restitution du manuscrit, 740. — Voir *Énergie.*

Métaphysique des mathématiques. Voir *Objet.*

Microsommite. Voir *Biréfringence.*

Minéralogie. Voir *Prix; Tellure.*

Moustérien et Aurignacien; par A. Rutot, 519.

N

Nécrologie. Décès de Gaudry (Albert), 944; Giard (Alfred), 738; Janssen (P.-J.-C.). 2; Lancaster (Alb.), 170; Lord Kelvin (sir William Thomson), 2; Lapparent (Alb. de). 582.

Nickel. Voir *Thorium.*

Notices biographiques pour l'Annuaire. M. Lagrange sera prié d'écrire la notice d'Alb. Lancaster, 170.

O

Objet (L') de la démonstration mathématique et la réalité; par Ch.-J. de la Vallée Poussin, 1131.

Observatoire. Voir *Bibliographie.*

OEufs. Voir *Biologie.*

Okapi (L'). Ses affinités avec les Giraffidés vivants et fossiles; par J. Fraipont, 1097.

Oocyte. Voir *Mammifères.*

Optique. Voir *Lentilles.*

Ouvrages présentés. Janvier, 58; février. 165: mars, 307; avril, 552; mai, 579; juin, 609: juillet, 686; août. 733; octobre, 875; novembre. 939; décembre, 1161.

Oxydases (Contribution à l'étude méthodique des), 2e mémoire; par O. Dony-Hénault, 105; rapports de MM. Fredericq et Jorissen, 63, 64.

Oxyde uraneux (Détermination du poids moléculaire de l'); par W. Oechsner de Coninck, 163; rapport de M. Spring, 65.

P

Pêche. Voir *Congrès.*

Pédologie. « Paedologisch Jaarboek », 7e jaargang, 1e aflevering (M. C. Schuyten); note par M. Ch. Van Bambeke, 881.

Physiologie. Voir *Hémolyse.*

Physique. Sur l'absence de signification du point critique lorsqu'un liquide n'est pas en contact avec sa vapeur; par P. De Heen, 512. — Quel sens doit-on attacher au mot « dématérialisation »? par P. De Heen, 694. — Voir *Butane; Chaleur; Eaux; Élasticité; Électricité; Énergie; Lentilles; Potentiel; Siphon.*

Plis cachetés. Voir *Billets cachetés.*

Poids moléculaire. Voir *Oxyde uraneux.*

Potentiel (Recherches sur le) de la décharge disruptive (1re partie); par A. Odeurs, 855; rapports de MM. de Hemptinne et De Heen, 746, 748.

Préhistoire. Voir *Congrès; Moustérien et Aurignacien.*

Prix décennaux :

(Sciences botaniques, IIe période. M. le Ministre demande une liste double de candidats pour le choix du jury, 880; élection de dix noms, 995.

(Sciences minéralogiques, IIe période). M. Lohest, lauréat, 2. — M. le Ministre transmet vingt exemplaires du rapport du jury, 556.

(Physique et chimie expérimentales, IIe période). M. le Ministre des Sciences et des Arts demande une liste double de candidats pour le choix du jury, 880; élection de dix noms, 995.

Prix François Deruyts (Géométrie analytique). Ouvrages offerts par M. Stuyvaert, lauréat, 3.

Prix Théophile Gluge (Physiologie). MM. Zunz et Falloise remercient pour les récompenses qui leur ont été décernées, 3.

Prix Lagrange. M. Nordmann envoie la liste des travaux qu'il présentera. 557.

Prix Charles Lemaire (Questions relatives aux travaux publics).

1905-1907. MM. Coiseau, Cousin et Puech remercient pour les récompenses qu'ils ont obtenues, 3.

Prix Ed. Mailly :

1904-1907 (IVe période). Ouvrage soumis par M. Boutquin et désignation des commissaires, 4, 62; rapport de MM. Lepaige et Lagrange, 955; prix non décerné, 1158.

Prix Melsens (IIe période, 1er juillet 1904-30 juin 1908). Aucun ouvrage présenté, 616.

Prix Nobel. Prix décernés en 1905. Hommage d'ouvrage, avec note, 3.

Prix J.-S. Stas. M. Ereulisse, lauréat, remercie, 3. — Décerné à MM. P. Bruylants et J. Lemaire, 1158.

Propriété littéraire et artistique. M. le Ministre demande l'avis de l'Académie sur les documents préliminaires à la Conférence de Berlin, 556; rapport de M. Mourlon, 616; adoption du dit rapport et remerciements, 691.

Protohistoire. Voir *Antiquités.*

Ptilocrinus antarcticus n. sp. A Crinoid dredged by the Belgian Antarctic Expedition; by F.-A. Bather. 296; rapport de MM. Éd. Van Beneden, Van Bambeke et Plateau, 187, 188.

R

Réactions (Sur les) du chlorure mercurique avec les acides organiques; par Oechsner de Coninck et Dautry, 55; rapport de M. Spring, 5. — Voir *Ionisation; Soufre.*

S

Sanidine. Voir *Biréfringence.*

Sélénium (Sur le); par W. Oechsner

de Coninck et Raynaud, 57; rapport de M. Spring. 5.
Siphon (Sur le pseudo-) de Joseph Plateau; par G. Van der Mensbrugghe, 257.
Sismologie. Voir *Commission*.
Soufre (Observation relative à l'action du) sur les gaz acétylénés; par W. Oechsner de Coninck, 305; rapport de M. Spring, 192.
Sphère. Assemblages sphériques; par G. Cesàro, 87.
Station zoologique de Naples. Requête de M. Havet demandant qu'il lui soit attribué une table d'études pour 1908, 62; lecture des rapports de MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq sur cette demande et sur celles de MM. Nolf, Lams, Julin et Lebrun, 63, 183. — Communication du rapport du Dr Nolf, 738: requête du Dr Lams, 739; lecture des appréciations de MM. Van Beneden, Van Bambeke, Plateau et Fredericq, 883. — M. le Ministre des Sciences et des Arts soumet les requêtes de MM. Havet, Lams et Micheels et le rapport de M. Lebrun, 945; lecture des appréciations de MM. Plateau, Van Bambeke et Gravis sur le rapport de M. Lebrun, 998.

T

Tellure natif des mines de Balia (Asie Mineure); par G. Cesàro, 255.
Thomsénolite. Voir *Biréfringence*.
Thomsonite. Voir *Biréfringence*.
Thorium (Sur un alliage de) et de nickel; par Ed. Chauvenet, 684; rapport de M. W. Spring, 618.
Torricelli. Voir *Jubilés*.
Tuberculose. Voir *Congrès*.

U

Union internationale pour la protection des œuvres littéraires. Voir *Propriété littéraire et artistique*.
Uranium (Étude de quelques composés de l'); par W. Oechsner de Coninck, 992; rapport de M. Spring, 957.

V

Végétation (L'état de la) à la Baraque Michel et à Liége en 1908; par Léon Fredericq, 963.
Volatilité (Sur la) comparée de certains groupes de composés mixtes; par L. Henry, 6. — De la volatilité dans les séries de « méthylation » des dérivés méthyliques $H_3C.X$, 66.

W

Willémite. Voir *Biréfringence*.

Z

Zoologie. Voir *Okapi; Ptilocrinus antarcticus*.

TABLE DES PLANCHES ET DES FIGURES.

BATHER (F.-A.). *Ptilocrinus antarcticus* (1 planche), 298.

BRONILAWSKI (BOLESLAS). Contribution à l'étude de la conductibilité électrique (1 planche), 732.

CESARO (G.). Assemblages sphériques (6 figures), 88-97.

Tellure natif des mines de Balia [Asie Mineure] (1 figure), 255.

DE HEEN (P.). De l'induction de l'énergie sous ses trois formes : mécanique, électrique et électromagnétique (36 figures), 411-512.

Sur l'absence de signification du point critique lorsqu'un liquide n'est pas en contact avec sa vapeur (3 figures), 512-518.

FRAIPONT (J.). L'Okapi, ses affinités avec les Giraffidés vivants et fossiles (4 planches), 1130.

GOBLET D'ALVIELLA (comte Eug.) Antiquités préhistoriques de Court Saint-Étienne (7 planches et 5 figures), 18-53.

SCHWERS (F.). Sur les propriétés physico-chimiques du glycol éthylénique et de ses solutions dans l'eau (2 figures), 816, 833; (1 planche), 854.

VAN DER MENSBRUGGHE (G.). Sur le pseudo-siphon de Joseph Plateau (1 figure), 258.

WILLEM (VICTOR) Larves de Chironomides vivant dans les feuilles (1 planche), 704.

PUBLICATIONS ACADÉMIQUES.

Depuis la réorganisation, en 18

Mémoires, t. I-LIV (1820-1904); in-4°.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, t. I-LXII (1817-1904), in-4°.

Mémoires couronnés, t. I-LXVI (1840-1904); in-8°.

Tables des Mémoires, nouvelle édition, 1772-1897; in-8°.

Mémoires (n. sér.) **in-4°** de la Classe des sciences, t. I.

Mémoires (n. sér.) **in-8°** de la Classe des sciences, t. I, II (3e fasc.).

Mémoires (n. sér.) **in-4°** de la Classe des lettres, t. I à IV.

Mémoires (n. sér.) **in-8°** de la Classe des lettres, t. I à IV.

Tables de Logarithmes, par A. Namur et P. Mansion; in-8°.

Annuaire, 1re à 75me année, 1835-1909; in-18.

Règlements et Documents concernant les trois Classes (éditions de 1896 et de 1905); in-18.

Bulletins, 1re sér., t. I-XXIII, avec annexes; — 2e sér., t. I-L; — 3e sér., t. I-XXXVI; in-8°. — Classe des sciences, années 1899-1908; Classe des lettres et des sciences morales et politiques et des Beaux-Arts, années 1899-1908. — **Tables générales,** 1re sér., t. I-XXIII (1832-1856), 1858; — 2e sér., t. I-XX (1857-1866), t. XXI-L (1867-1880), 1883; — 3e sér., t. I-XXX (1881-1895), 1898; in-8°.

Bibliographie académique, 1re édit. (1854); — 2e édit. (1874); — 3e édit. (1886); — 4e édit. (1896); in-18.

Catalogue de la Bibliothèque de l'Académie, 1re partie : Sociétés savantes et Recueils périodiques; — 2de partie : sciences, lettres, arts (1881-1890); 4 vol. in-8°.

Catalogue de la bibliothèque du baron de Stassart (1863); in-8°

Centième anniversaire *de fondation* (1772-1872), 1872; 2 vol. gr. in-8°.

Monuments de la littérature flamande.

Œuvres de Van Maerlant : DER NATUREN BLOEME, t. Ier, publié par J. Bormans, 1857; 1 vol. in-8°. — RYMBYBEL, avec Glossaire, publié par J. David, 1858-1860; 3 vol. — ALEXANDERS GEESTEN, publié par Snellaert, 1860-1862; 2 vol. — **Nederlandsche gedichten,** etc., publiées par Snellaert, 1869; 1 vol. — **Parthonopeus van Bloys,** publié par J. Bormans, 1871; 1 vol. — **Speghel der Wysheit,** van Jan Praet, publié par J. Bormans, 1872; 1 vol.

Œuvres des grands écrivains du pays.

Œuvres de Chastelain, publiées par le baron Kervyn de Lettenhove. 1863-1865, 8 vol. in-8°. — **Le premier livre des Chroniques de Froissart,** par le même. 1863, 2 vol. — **Chroniques de Jehan le Bel,** par L. Polain. 1863, 2 vol. — **Li Roumans de Cléomadès,** par André Van Hasselt. 1866, 2 vol. — **Dits et Contes de Jean et Baudouin de Condé,** par Auguste Scheler. 1866, 3 vol. — **Li ars d'amour,** etc., par J. Petit. 1866-1872, 2 vol. — **Œuvres de Froissart :** *Chroniques,* par le baron Kervyn de Lettenhove. 1867-1877, 26 vol. — *Poésies,* par Aug. Scheler. 1870-1872, 3 vol. — *Glossaire,* par le même. 1874, 1 vol. — **Lettres de Commines,** par Kervyn de Lettenhove. 1867, 3 vol. — **Dits de Watriquet de Couvin,** par A. Scheler. 1868, 1 vol. — **Les Enfances Ogier,** par le même. 1874, 1 vol. — **Bueves de Commarchis,** par Adenès li Rois, par le même. 1874, 1 vol. — **Li Roumans de Bertes aux grans piés,** par le même. 1874, 1 vol. — **Trouvères belges du XIIe au XIVe siècle,** par le même. 1876, 1 vol. — Nouvelle série. 1879, 1 vol. — **Li Bastars de Bullion,** par le même. 1877, 1 vol. — **Récits d'un Bourgeois de Valenciennes (XIVe siècle),** par le baron Kervyn de Lettenhove. 1877, 1 vol. — **Œuvres de Ghillebert de Lannoy,** par Ch. Potvin. 1878, 1 vol. — **Poésies de Gilles li Muisis,** par Kervyn de Lettenhove. 1882, 2 vol. — **Œuvres de Jean Lemaire de Belges,** par J. Stecher. 1882-1891, 4 vol. avec notice. — **Li Regret Guillaume,** par A. Scheler. 1882. 1 volume.

Biographie nationale.

Biographie nationale, t. I à XIX. Bruxelles, 1866-1907.

Commission royale d'histoire.

Collection de Chroniques belges inédites, publiées par ordre du Gouvernement; 117 vol. in-4°. (Voir la liste sur la couverture des Chroniques.)

Comptes rendus des séances, 1re sér., avec table (1837-1849), 17 vol. in-8°; sér., avec table (1850-1859), 13 vol. in-8°; — 3me sér., avec table (1860-1872), in-8°; — 4me sér., avec table (1873-1891), 18 vol. in-8°; — 5me sér., t. I-XI le 1902, t. 71-77.

...tes aux *Bulletins.* (Voir la liste sur la couverture des Chroniques e ...ndus.)

SEP 12 1927

MAR 29 1913

DUE JUN 21 1914

DUE JUN 4 1926

SEP 1 1927

MAR -2 1929

~~DUE NOV -9 '36~~

7/7/41

~~DUE JUL -2 '48~~

~~DUE JUL -2 '48~~

~~DUE JUL -2 '48~~